Редактор
Ростислав Мартиняк

КОНТАКТНА МЕХАНІКА

ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

КОНТАКТНА МЕХАНІКА

ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

Колективна монографія

За загальною редакцією
Р. М. Мартиняка

Видавець Вікторія Кундельська
Львів 2022

УДК 539.3
М 29

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Лобода
д-р фіз.-мат. наук, доц. Й.З. Піскозуб
д-р техн. наук, ст. дослідник М.М. Ткачук

Мартиняк Р.М.

М 29 Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь : колективна монографія / М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова, В.І. Острик, М.С. Слободян, В.І. Кузьменко, О.В. Приходько, Н.М. Д'яченко, Є.В. Шашкова, В.П. Силованюк, Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко, О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк, О.В. Максимук, Ю.В. Сачук, А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека, Т.С. Нагірний, К.А. Червінка, А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М. Феньків; за заг. ред. Р.М. Мартиняка // Львів : Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с . – URL: https://www.researchgate.net/publication/366177313

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

Монографія присвячена математичному моделюванню та розробленню аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, проковзування і розшарування спряжених поверхонь, механічного контакту берегів внутрішніх і міжфазних тріщин та фрикційного зношування рухомих поверхонь.

Для наукових та інженерних працівників, які спеціалізуються в галузі механіки деформівного твердого тіла, контактної механіки і трибології.

Іл. 224. Табл. 23. Бібліогр. 395 назв.

УДК 539.3

ISBN 978-617-8116-13-2 (PDF)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 9

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ 12

РОЗДІЛ 1. Відшарування і руйнування гнучкого підсилення півплощини за сталого й циклічного навантажень
М.М. Кундрат 14

1.1. Гранична рівновага півбезмежної пластини з підсиленням 14
1.1.1. Формулювання задачі та її розв'язок 15
1.1.2. Відшарування за деформаційним критерієм 18
1.1.3. Автономність зон біля кінців підсилення 21
1.1.4. Розрив підсилення 21
1.2. Матеріал контактної межі крихкий 26
1.3. Термопружна задача для півплощини з підсиленням 29
1.4. Пластина з періодичною системою підсилень 31
1.4.1. Формулювання задачі та її розв'язування 31
1.4.2. Відшарування підсилень 34
1.4.3. Контактні напруження 36
1.4.4. Розривання підсилення 38
1.5. Відшарування підсилення за циклічного навантаження 39
1.5.1. Формулювання задачі 39
1.5.2. Статичне навантаження 40
1.5.3. Циклічне навантаження 45
Список використаних джерел 46

РОЗДІЛ 2. Прямі та обернені плоскі контактні задачі за односторонньої взаємодії пружних тіл
Н.А. Гук, Н.Л. Козакова 48

2.1. Моделювання контакту тіл за наявності односторонніх зв'язків та тертя з використанням варіаційних принципів 48
2.2. Числовий метод розв'язання контактної задачі та ітераційний алгоритм 58
2.3. Дослідження поведінки двошарової системи за наявності односторонніх зв'язків та тертя під дією нормального навантаження 63
2.4. Задача ідентифікації додаткового зовнішнього навантаження для запобігання відшарування шарів 70
2.4.1. Математична модель оберненої задачі 71
2.4.2. Метод і алгоритм розв'язання задачі ідентифікації 72
2.4.3. Числовий аналіз задачі ідентифікації 74
Список використаних джерел 77

РОЗДІЛ 3. Фрикційний контакт берегів тріщини у пружному тілі
В.І. Острик.. 79
3.1. Контакт берегів прямолінійної тріщини у пружній площині за складного навантаження і різних умов контакту 80
3.2. Міжфазна тріщина у кусково-однорідній площині 86
3.2.1. Напівнескінченна тріщина 86
3.2.2. Скінченна тріщина 91
3.2.3. Взаємодія двох напівнескінченних тріщин 94
3.3. Міжфазна кругова тріщина у кусково-однорідному просторі 97
3.4. Міжфазна напівнескінченна тріщина у кусково-однорідній смузі 99
3.4.1. Закрита тріщина 99
3.4.2. Часткове розкриття тріщини 103
3.4.3. Необмежена область розкриття тріщини 105
3.5. Тріщина на межі поділу кругового включення і матриці 106
Список використаних джерел 109

РОЗДІЛ 4. Згин та розтяг пластини з круговим отвором та системою прямолінійних тріщин за смугового контакту їх берегів
М.С. Слободян.. 115
4.1. Формулювання задачі 115
4.2. Побудова розв'язку задачі про згин пластини 117
4.3. Побудова розв'язку плоскої задачі 124
4.4. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі 130
4.5. Числовий аналіз задачі 131
4.5.1. Згин і розтяг пластини з отвором та однією прямолінійною тріщиною 131
4.5.2. Згин пластини з отвором та двома прямолінійними тріщинами 134
Список використаних джерел 137

РОЗДІЛ 5. Контактні задачі для пружно-пластичної смуги з мікрорельєфом на поверхні
В.І. Кузьменко 140
5.1. Формулювання контактних задач теорії пластичності за складного навантаження 140
5.2. Квазіваріаційна нерівність 142
5.3. Числове розв'язання квазіваріаційної нерівності 145
5.4. Обкочування роликом мікронерівностей на поверхні смуги 147
5.5. Активне навантаження та розвантаження. Залишкова форма поверхні 154
5.6. Обернені задачі утворення мікрорельєфу заданого профілю.............. 159
Список використаних джерел 166

РОЗДІЛ 6. Математичне моделювання фрикційного і безфрикційного контакту пружних шорстких тіл
О.В. Приходько 168

6.1. Моделювання нормальної і тангенціальної контактної податливості шорстких поверхонь........ 169
6.2. Крайові умови контактних задач для шорстких тіл 176
6.2.1. Контактні задачі без урахування тертя 179
6.2.2. Контактні задачі з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування 180
6.3. Зведення контактних задач до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь 183
6.4. Дискретизація інтегральних рівнянь контактної задачі........ 187
6.4.1. Контактні задачі без урахування тертя 187
6.4.2. Контактні задачі з урахуванням тертя........ 188
6.5. Ітераційні процеси для розв'язування дискретизованих рівнянь........ 191
6.5.1. Контактні задачі без урахування тертя 191
6.5.2. Контактні задачі з урахуванням тертя........ 191
Список використаних джерел 193

РОЗДІЛ 7. Задачі про контакт пружних шорстких тіл без тертя та зі зчепленням і проковзуванням
О.В. Приходько 194

7.1. Розв'язування контактних задач без урахування тертя........ 194
7.1.1. Задача про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір 194
7.1.2. Задача про контакт пружних куль зі шорсткими поверхнями .. 195
7.1.3. Задача про стискування пружних циліндрів........ 198
7.2. Розв'язування контактних задач з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування 199
7.2.1. Задача про вдавлювання пружної кулі в шорсткий пружний півпростір........ 199
7.2.2. Задача про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування........ 203
7.2.3. Задача про вдавлювання прямокутного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування........ 206
Список використаних джерел 209

РОЗДІЛ 8. Деякі просторові контактні задачі з урахуванням тертя і шорсткості
Н.М. Д'яченко, Є.В. Шашкова 211
8.1. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору з лінійним законом деформування шорсткості 211
8.1.1. Формулювання задачі 211
8.1.2. Метод розв'язання 214
8.1.3. Аналіз результатів числових досліджень 218
8.2. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору за степеневого закону деформування шорсткості 220
8.2.1. Метод розв'язання 221
8.2.2. Числові результати 224
8.3. Статична задача про контакт в умовах часткового проковзування 226
8.3.1. Формулювання задачі 226
8.3.2. Метод розв'язання 228
8.3.3. Аналіз числових результатів 230
Список використаних джерел 233

РОЗДІЛ 9. Нелінійні моделі контактної взаємодії в транстропних тілах із залікованими тріщинами
В.П. Силованюк 235
9.1. Основні співвідношення теорії пружності транстропного тіла 235
9.2. Задача про поверхню розриву переміщень і напружень в транстропному тілі 237
9.3. Нелінійна модель заповненої тріщини в транстропному тілі 243
9.4. Плоска деформація транстропного тіла із залікованою тріщиною 245
9.5. Заліковування еліпсоїдальної тонкої порожнини-тріщини в транстропному тілі 249
9.6. Ефект розклинювання, що супроводжує заліковування тріщини ін'єктуванням 252
Список використаних джерел 256

РОЗДІЛ 10. Втискування кругового штампа у півнескінченний пружний шар на гладкій жорсткій основі
Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко 257
10.1. Формулювання задачі 258
10.2. Зведення задачі до одновимірної та її розв'язання 260
10.3. Виведення сингулярного інтегрального рівняння 263
10.4. Розв'язання сингулярного інтегрального рівняння 265
10.5. Встановлення моменту сили та осадки штампу 278
Список використаних джерел 279

РОЗДІЛ 11. Локальне зношування пружних півпросторів із виступами
О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк ... 281

11.1. Метод дослідження локального зношування тіл з поодиноким виступом на основі моделі фрикційно-втомного руйнування ... 282
11.2. Аналітичні розв'язки задач про зношування тіл із виступами різної форми ... 285
11.3. Зносо-контактна задача для тіл із регулярною системою виступів ... 291
11.4. Зносо-контактна задача для тіл з хвилястою поверхнею ... 296
Список використаних джерел ... 300

РОЗДІЛ 12. Контактні задачі з урахуванням зношування матеріалу
О.В. Максимук, Ю.В. Сачук ... 303

12.1. Зношування півплощини штампами канонічної форми ... 303
12.2. Зношування півплощини, захищеної шаром Вінклера ... 313
Список використаних джерел ... 319

РОЗДІЛ 13. Міжфазні розрізи між пластинкою з отвором і ребром жорсткості
А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека ... 322

13.1. Моделювання контактної взаємодії для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра ... 323
13.2. Напружена посадка замкненого пружного ребра в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки ... 329
13.3. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності симетричного міжфазного розрізу ... 337
13.4. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності двох симетричних міжфазних розрізів ... 344
Список використаних джерел ... 351

РОЗДІЛ 14. Приповерхнева неоднорідність густини та шорсткість поверхні у моделі локально неоднорідного пружного тіла
Т.С. Нагірний, К.А. Червінка ... 354

14.1. Густина та шорсткість поверхні тіла ... 354
14.1.1. Геометрична неоднорідність профілю реальної поверхні ... 354
14.1.2. Густина на поверхні тіла ... 356
14.2. Базові положення модельного опису ... 357
14.2.1. Балансові рівняння ... 357
14.2.2. Визначальні співвідношення ... 358
14.2.3. Ключова система рівнянь ... 360
14.3. Приповерхнева неоднорідність густини у півпросторі ... 361

14.4. Шорсткість поверхні та стан гетерогенного пружного шару............ 363
Список використаних джерел 368

РОЗДІЛ 15. Модель Комніноу міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу матеріалів
А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М.Феньків.. 370

15.1. Розподіл напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактом берегів, яка виходить з кутової точки ламаної межі розділу 371
15.2. Наслідки контактної моделі міжфазної тріщини та межі її застосовності.. 376
15.3. Параметри маломасштабної області контакту берегів біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу 380
Список використаних джерел 386
Додаток 389

ПЕРЕДМОВА

В колективній монографії «Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь» відображено сучасні результати українських вчених в галузі моделювання та розроблення аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, порушення контакту, проковзування і розшарування спряжених поверхонь, механічного контакту берегів внутрішніх і міжфазних тріщин та фрикційного зношування рухомих поверхонь.

Авторами монографії є співробітники інститутів НАН України в Києві, Львові і Сумах, національних університетів і коледжів Дніпра, Запоріжжя, Луцька, Львова, Одеси, Рівного й Умані, незалежні дослідники, а також українські вчені, які працюють в університетах Великої Британії і Польщі.

В монографії досліджено граничну рівновагу тіла з нерозтягливим гнучким підсиленням вільного краю. З'ясовано вплив навантаження на розвиток локалізованих зон передруйнування. Визначено критичну довжину підсилення, за якої відбувається зміна характеру руйнування. Модельна схема застосована до аналізу процесу відшарування підсилення. Знайдено аналітичні залежності робочої довжини підсилення від амплітуди навантаження та кількості циклів за циклічного навантаження.

Змодельовано контактну поведінку двошарової системи за наявності односторонніх зв'язків та тертя на лінії розмежування матеріалів. Задачу сформульовано з урахуванням геометричної та конструктивної нелінійності у вигляді крайової задачі з додатковими умовами у вигляді нерівностей, що описують явища зчеплення, фрикційного проковзування та відриву шарів. Сформульовано і розв'язано обернену задачу для ідентифікації додаткового силового навантаження, що запобігає відшаруванню в системі.

Розглянуто фрикційне проковзування та часткове зчеплення берегів прямолійної тріщини в однорідній площині. За моделлю Комніноу вивчено фрикційний контакт берегів міжфазної прямолінійної тріщини у кусково-однорідній площині та смузі, кругової тріщини на межі поділу матеріалів у кусково-однорідному просторі та криволінійної тріщини на межі матриці та кругового включення.

Сформульовано задачу про згин з розтягом безмежної пластини з круговим отвором та системою наскрізних прямолінійних тріщин, береги яких гладко контактують по смузі сталої ширини. Використовуючи метод комплексних потенціалів, її зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь для похідних від стрибків переміщень та кутів повороту на берегах тріщин. Досліджено поведінку контактного зусилля між берегами тріщин та коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль за різних параметрів задач.

Розглянуто клас контактних задач для пружно-пластичної смуги з мікрорельєфом на поверхні та отримано числовий розв'язок задачі

поверхневого пластичного деформування обкочуванням роликом. Запропоновано формулювання та метод розв’язання обернених задач формування мікрорельєфу заданого профілю.

Змодельовано механічний контакт шорстких поверхонь з урахуванням нормальних і зсувних деформацій мікронерівностей. Сформульовано статичні контактні задачі для пружних шорстких тіл у вигляді систем рівностей та нерівностей для невідомих розподілів контактних напружень на поверхні можливого дотику. Описано алгоритм чисельного розв’язування систем нелінійних інтегральних рівнянь. Розв’язано задачі про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір, про контакт пружних куль та про стискування пружних циліндрів за відсутності тертя; з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування отримано розв’язок задачі про контакт пружної кулі з пружним півпростором та задач про вдавлювання циліндричного і прямокутного штампів у шорсткий півпростір.

Розглянуто просторову квазістатичну контактну задачу про ковзання з тертям квадратного в плані штампа по межі шорсткого півпростору і статичну задачу про вдавлювання з тертям такого штампа в шорсткий півпростір за наявності зон зчеплення і проковзування. Задачі розв’язано, поєднуючи метод ітерацій та метод механічних квадратур. Досліджено вплив початкових параметрів (коефіцієнтів шорсткості і висоти прикладання горизонтальної сили) на контактні характеристики і форму початково невідомої ділянки контакту, областей зчеплення і проковзування.

Побудовано модель деформування трансверсально-ізотропних тіл, що містять заліковані ін'єктуванням тріщини. В основу моделі покладені умови взаємодії матеріалу заповнювача із основним матеріалом, що враховують нелінійність деформування тонких прошарків ін'єкційного матеріалу. В результаті проблема зведена до розв'язування системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь відносно переміщень поверхонь тріщини. Отримано аналітичні розв'язки рівнянь для залікованих тріщин нормального відриву.

Розвинуто метод розв’язання контактної задачі про втискування кругового штампа позацентровою силою у півнескінченний пружний шар на гладкій жорсткій основі. Знайдені момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа, та заглиблення штампа.

Сформульовано контактні задачі про зношування тіл з виступами за повного налягання поверхонь, використовуючи модель фрикційного втомного руйнування. Враховано, що стирання відбувається не на всій поверхні контакту, а лише на привершинних ділянках виступів, де питома сила тертя перевищує певне порогове значення. Розвинуто метод розв’язування задач цього класу, що полягає у зведенні їх до сингулярних інтегральних рівнянь на товщину зношеного матеріалу. Побудовано аналітичні розв’язки зносоконтакних задач для тіл з поодинокими виступами різної форми, для тіл з періодично розташованими виступами та тіл з хвилястими поверхнями.

Досліджено контактну взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною з урахуванням зношування матеріалу. На основі моделі абразивного зношування побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Розроблена методика розв'язування інтегрального рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення. Розглянуто контакт жорстких штампів канонічної форми з пружною півплощиною, захищеною покриттям, за його зношування. Відповідне інтегро-диференціальне рівняння розв'язано, використовуючи поліноми Чебишова. Визначено розподіл контактного тиску, область контакту та величину зношування в різні моменти часу.

Досліджено напружений стан на межі поділу матеріалів нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра великої кривини при їх гладкому з'єднанні методом пресової посадки або за наявності одного чи двох міжфазних розрізів, береги яких у процесі деформації не контактують, при з'єднанні зварюванням (склеюванням). Математичні моделі таких задач побудовано у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь, числова реалізація яких проведена методами механічних квадратур і колокації. При визначенні початкових параметрів статично невизначеного підсилювального ребра використано метод сил.

Локально градієнтний підхід у термомеханіці використано до побудови математичних моделей, що враховують геометричну неоднорідність реальної поверхні тіла. Порівняно із існуючими моделями, введено додатковий параметр, що описує шорсткість поверхні, та досліджено його вплив на приповерхневу неоднорідність густини і напружень та міцність тонкої плівки.

В рамках моделі Комніноу досліджено напружено-деформований стан в околі вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу біматеріального тіла. Виявлено існування інтервалів кутів зламу межі розділу і коефіцієнтів тертя берегів тріщини, для яких контакт берегів не забезпечує усунення осциляційної особливості напружень і переміщень, притаманних моделі повністю розкритої міжфазної тріщини. За допомогою методу Вінера–Гопфа отримано розв'язок задачі про параметри маломасштабної області контакту берегів тріщини, що взаємодіють за законом сухого тертя.

Львів, грудень 2022 р. Ростислав Мартиняк

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Вайсфельд Н.Д. − доктор фізико-математичних наук, професор, Королівський коледж, Лондон, Об'єднане Королівство – King’s College, London, United Kingdom

Гук Н.А. – доктор фізико-математичних наук, професор, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Дейнека О.Ю. – кандидат технічних наук, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

Дудик М.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна

Д’яченко Н.М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

Камінський А.О. – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Козакова Н.Л. – кандидат фізико-математичних наук, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Козачок О.П. – кандидат фізико-математичних наук, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

Кузьменко В.І. – доктор фізико-математичних наук, професор, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

Кундрат М.М. – доктор технічних наук, професор, Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна

Максимук О.В. – доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Мартиняк Р.М. – доктор фізико-математичних наук, професор, Львів, Україна

Нагірний Т.С. – доктор фізико-математичних наук, професор, Зеленогурський університет, Зелена Гура, Польща – University of Zielona Góra, Zielona Góra, Poland

Острик В.І. – доктор фізико-математичних наук, професор, Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна

Приходько О.В. – кандидат фізико-математичних наук, Відокремлений структурний підрозділ «Запорізький металургійний фаховий коледж Запорізького національного університету», Запоріжжя, Україна

Сачук Ю.В. – кандидат фізико-математичних наук, КЗВО «Луцький педагогічний коледж» Волинської обласної ради, Луцьк, Україна

Силованюк В.П. – доктор технічних наук, професор, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, Україна

Слободян М.С. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Сяський А.О. – доктор технічних наук, професор, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

Сяський В.А. – кандидат технічних наук, доцент, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

Феньків В.М. − Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини, Умань, Україна

Фесенко Г.О. − кандидат фізико-математичних наук, доцент, Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

Червінка К.А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Шашкова Є.В. – магістр математики, Київ, Україна

Шевцова Н.В. – кандидат технічних наук, Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

РОЗДІЛ 1

ВІДШАРУВАННЯ І РУЙНУВАННЯ ГНУЧКОГО ПІДСИЛЕННЯ ПІВПЛОЩИНИ ЗА СТАЛОГО Й ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕНЬ

М.М. Кундрат

За умов плоскої задачі досліджено граничну рівновагу тіла з нерозтягливим гнучким підсиленням вільного краю. З'ясовано вплив навантаження на розвиток локалізованих зон передруйнування, розподіли контактних напружень та осьових зусиль. Визначено критичну довжину підсилення, за якої відбувається зміна характеру руйнування.

Модельна схема застосована до аналізу процесу відшарування підсилення. Розв'язок задачі за неперервного навантаження зведено до задачі Коші для диференціального рівняння, а за циклічного – до інтегрування заданої функції від параметрів навантаження та характеристик системи. За умови, що енергія відшарування на одиницю довжини відома, знайдено аналітичні залежності для зміни робочої довжини підсилення залежно від амплітуди навантаження та кількості циклів. Матеріал розділу ґрунтується на результатах, опублікованих у працях [4–7, 15].

1.1. Гранична рівновага півбезмежної пластини з підсиленням

Задача розрахунку підсилювальних елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення роботоздатності інженерних конструкцій залишається на часі. Для з'ясування граничного експлуатаційного навантаження таких композицій необхідні поглиблений аналіз полів напружень і деформацій біля підкріплювальних елементів та пов'язана з ним побудова відповідних математичних моделей, які б описували ці поля безпосередньо перед руйнуванням. Використовувані підкріплювальні елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень, які спричиняють нелінійні та пластичні деформації чи розвиток зон розпушення, що суттєво ускладнює розрахунок напружено-деформованого стану та умов граничної рівноваги системи загалом. Результати дослідження та огляд контактної задачі Мелана [18] для пружного тіла подано у багатьох працях: монографіях М.І. Мусхелішвілі [9], Е.І. Григолюка, В.М. Толкачова [2], Г.Я. Попова [12], В.М. Александрова, С.М. Мхітаряна [1], Г.Т. Сулима [14], В.І. Острика [10], Р.М. Мартиняка, Х.І. Середницької [8] та ін. Тут використані ідеалізовані схеми математичної постановки задачі, які не враховують можливості виникнення біля країв підкріплень часто спостережуваних зон послабленого контакту. Вплив малих зон пластичності матеріалу в околі країв підкріплення на розподіл контактних напружень дослідив Ю.І. Кудишин [3], використовуючи ітераційний метод пружних розв'язків О.І. Ільюшина. Розрахункова схема для аналізу напружено-де-

формованого стану та граничної рівноваги в системі півплощина–підсилення, запропонована автором в працях [4–7], дала можливість уникнути сингулярності напружень в околах країв підсилень та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції. Одержані дані про розвиток зон передруйнування в околі підсилення можуть служити основою для проведення експериментів на визначення характеристик тріщиностійкості таких композицій, а також необхідні для подальших теоретичних праць з уточнення картини розподілу напружень і деформацій у композиції безпосередньо перед її локальним руйнуванням.

1.1.1. Формулювання задачі та її розв'язок

За умов плоскої задачі теорії пружності розглядаємо півбезмежну пластину, що розтягується на нескінченності заданими напруженнями $\sigma_{xx}^{\infty} = q$ паралельно до її краю (рис. 1.1). Вільна поверхня пластини підкріплена нерозтягливим гнучким (позбавленим згинної жорсткості) підсиленням завдовжки $2a$. Підсилення перебуває в одновісному напруженому стані, а під ним виникають лише тангенціальні контактні напруження. Осі декартової системи координат xOy збігаються з осями геометричної симетрії композиції.

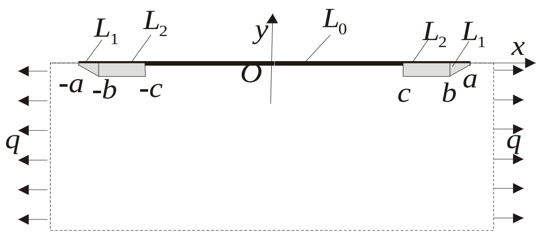


Рис. 1.1

Найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців підсилення, де насамперед слід очікувати появи й розвитку локалізованих зон передруйнування. Останні можуть імітувати накопичення пошкоджень, пластичного деформування (проковзування), часткового розриву зв'язку між пластиною й підсиленням тощо. Під час досягнення переміщеннями внаслідок проковзування матеріалу під підсиленням певної граничної межі у зонах передруйнування може порушитися зв'язок між матеріалами. З іншого боку, дотичні напруження шляхом передачі дії прикладених зусиль спричиняють у підсиленні осьові зусилля розтягу. Останні з досягненням межі міцності підсилення можуть зумовити його розрив.

Аналіз двовимірного напруженого стану в композиції свідчить, що максимальні дотичні напруження $\tau_{\max}$ виникають уздовж межі між пластиною й підсиленням в околах кінців. Приймаємо, що саме під кінцями підсилення

зароджуються зони передруйнування, які просуваються від кожного краю до центральної частини уздовж межі пластина–підсилення, і складаються з ділянок розпушення $L_1 \equiv (-a,-b) \cup (b,a)$ та ділянок нелінійного деформування $L_2 \equiv (-b,-c) \cup (c,b)$. У зонах передруйнування виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_s^*

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a-|x|}{a-b} \operatorname{sign}(x) \quad (x \in L_1), \tag{1.1}$$

а на ділянках нелінійного деформування є сталими:

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \operatorname{sign}(x) \quad (x \in L_2). \tag{1.2}$$

Тут τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі пластина–підсилення, а за пластичного деформування – її зсувний поріг пластичності; σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $\operatorname{sign}(x) = \{1$ для $x > 0$; -1 для $x < 0$; 0 для $x = 0\}$. Значення параметра c знаходимо з додаткової фізичної умови, а параметр b задаємо. Його доцільно пов'язати з розмірами структурних елементів (зерен) матеріалу адгезійного прошарку.

Запровадження у такий спосіб зони передруйнування дає можливість уникнути особливостей напружень в околах кінців підсилення та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які дають механічно коректну картину деформування, що задовольняє також і закон парності дотичних напружень.

На відрізку $|x| < c$ пружного деформування зберігається ідеальний контакт і тому деформації там відсутні:

$$\partial u(x)/\partial x = 0 \quad (x \in L_0), \tag{1.3}$$

де u, v – компоненти вектора переміщень у напрямах осей Ox та Oy відповідно. Напруження на нескінченності

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q, \quad \sigma_{yy}^{\infty} = \sigma_{xy}^{\infty} = 0. \tag{1.4}$$

Для розв'язування задачі використаємо відомі [9] подання для напружень і деформацій через комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\operatorname{Re}\Phi(z), \quad \sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{1.5}$$

де $z=x+iy$; $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ – для плоского напруженого стану та $\kappa = 3 - 4\nu$ – в умовах плоскої деформації; G, ν – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу півплощини.

Оскільки верхня межа і торці підкріплення та вільний край пластини ненавантажені, то по всьому краю півплощини можна прийняти $\sigma_{yy} = 0$. Задо-

вольнивши цю умову за допомогою другого подання з (1.5), отримуємо, що скрізь на краю півплощини

$$\Phi^+(t)-\overline{\Phi}^+(t)-\left(\Phi^-(t)-\overline{\Phi}^-(t)\right)=0\,.$$

Звідси слідує, що функція $\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)$ голоморфна на всій площині і дорівнює нулю скрізь, оскільки заникає на нескінченності. А отже,

$$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z).$$

Задовольнивши з допомогою подань (1.5) крайові умови (1.1)–(1.3) та врахувавши останній вираз, для визначення функції $\Phi(z)$ отримаємо задачу лінійного спряження з кусково-неперервними коефіцієнтами

$$\Phi^+(x)-g_0\Phi^-(x)=f_0(x), \tag{1.6}$$

де $g_0=\begin{cases}-1\ (x\in L_0)\\ 1(x\in L_1\cup L_2)\end{cases},\quad f_0(x)=\begin{cases}f_1(x)\ \ (x\in L_1)\\ f_2(x)\ (x\in L_2)\\ 0\quad (x\in L_0)\end{cases},$

$$f_1=-i\tau_s^*\frac{a-|x|}{a-b}\operatorname{sign}(x),\qquad f_2=-i\tau_s^*\operatorname{sign}(x).$$

Розв’язок однорідної задачі для (1.6) вибираємо у вигляді

$$\mathrm{X}(z)=1\big/\sqrt{z^2-c^2}\,.$$

Тоді загальним розв’язком задачі (1.6) з урахуванням умови на нескінченності буде функція напружень

$$\Phi(z)=B_2z\mathrm{X}(z)+\frac{\tau_s^*}{2\pi}f_3(z,a,b,c), \tag{1.7}$$

де $B_2=q/4-\left(\tau_s^*/\pi\right)f_4(a,b,c)$,

$$f_3(z,a,b,c)=\frac{1}{a-b}\left\{b\Gamma_1(z,b,c)-a\Gamma_1(z,a,c)+z\left[\Gamma_2(z,a,c)-\Gamma_2(z,b,c)\right]\right\}$$

$$f_4(a,b,c)=\frac{1}{a-b}\left[\sqrt{b^2-c^2}-\sqrt{a^2-c^2}-b\ln\frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{c}+a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right],$$

$$\Gamma_1(z,\alpha,c)=\ln\frac{\alpha\sqrt{z^2-c^2}-z\sqrt{\alpha^2-c^2}}{\alpha\sqrt{z^2-c^2}+z\sqrt{\alpha^2-c^2}},\ \ \Gamma_2(z,\alpha,c)=\ln\frac{\sqrt{\alpha^2-c^2}-\sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{\alpha^2-c^2}+\sqrt{z^2-c^2}}\,.$$

Формули (1.7), (1.5) повністю описують поля напружень та деформацій у тілі з підсиленням та дають можливість дослідити умови його руйнування. Залежно від довжини підсилення, міцнісних та пружних параметрів розглянемо такі механізми руйнування в системі: *а*) розривні зусилля досягнуть міцності підсилення і пройде його розрив; *б*) переміщення точок на поверхні підсилення досягнуть деякого граничного значення і відбудеться розшарування між

підсиленням та пластиною. За інших однакових умов існує критична довжина підсилення зміни характеру руйнування, яка разом із пружними та міцнісними характеристиками композиції визначає механізм можливого локального руйнування. За довжини, більшої за неї, відбуватиметься розрив підсилення на частини, а за меншої – його відшарування.

1.1.2. Відшарування за деформаційним критерієм

З умови, що напруження в околах точок $x = \pm c$ неперервні (обмежені), отримуємо нелінійне рівняння

$$\frac{q}{2\tau_s^*} - \frac{2}{\pi} f_4(a,b,c) = 0\,, \tag{1.8}$$

яке пов'язує силові та геометричні параметри в композиції. На рис. 1.2 відображено залежність відносної довжини зон передруйнування $\varepsilon = (a-c)/a$ від параметра навантаження $\tilde{q} = q/(2\tau_s^*)$. Номери біля ліній відповідають різній довжині ділянки розпушення $\gamma = (a-b)/a$, яку можна вважати залежним від структури матеріалів додатковим механічним параметром контактної взаємодії пари пластина–підсилення: *1* – $\gamma = 10^{-10}$ (ділянка розпушення практично відсутня); *2* – 0,05; *3* – 0,1; *4* – 0,15; *5* – 0,2. Зі збільшенням ділянки розпушення за фіксованого навантаження зона передруйнування загалом видовжується, хоча ділянка пластичного деформування при цьому зменшується.

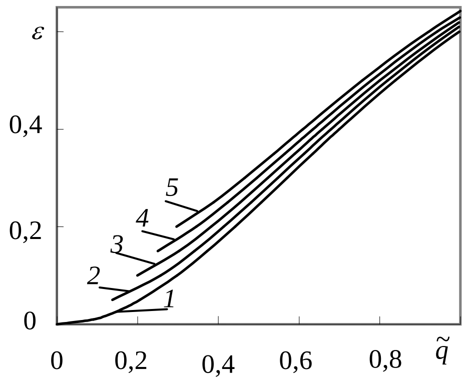


Рис. 1.2

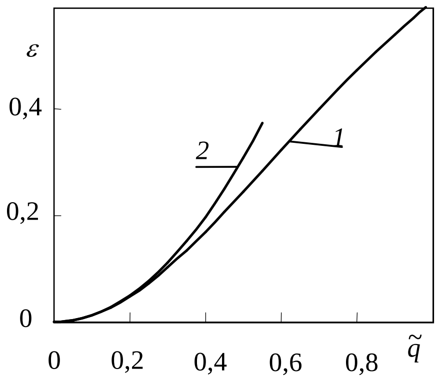


Рис. 1.3

За незначних ділянок розпушення, спрямовуючи їх довжину γ до нуля ($b \to a$), отримаємо простий аналітичний вираз для обчислення довжини зон передруйнування

$$\varepsilon \equiv \frac{a-c}{a} = 1 - 1\Big/\operatorname{ch}\left(\frac{\pi q}{4\tau_s^*}\right),$$

або в першому наближенні після розвинення функції $f_4(a,b,c)$ в ряд за степенями ε:

$$\varepsilon = \pi^2 q^2 \Big/ \left(8\tau_s^{*2}\right). \tag{1.9}$$

На рис. 1.3 зображено порівняльні криві відносної довжини зони передруйнування, побудовані для безмежно малих ділянок розпушення за розв’язком рівняння (1.8) – лінія *1* та за простою наближеною формулою (1.9) – лінія *2*.

На відміну від зони $|x| < c$ пружного контакту у смугах пластичного деформування та розпушення $c \le |x| \le a$ відбувається зміщення (проковзування) точок матеріалу півплощини відносно підсилення. Інтегруванням у третій формулі (1.5) з урахуванням результатів (1.7) знаходимо переміщення під підсиленням на ділянках пластичності та розпушення:

$$u(x) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{8\pi G} f_5(x,a,b,c), \tag{1.10}$$

де

$$f_5(x,a,b,c) = \frac{1}{a-b}\Big\{\left(a^2+x^2\right)\Gamma_2(x,a,c) + 2x\left[b\Gamma_2(x,b,c) - a\Gamma_1(x,a,c)\right] -$$

$$- \left(b^2+x^2\right)\Gamma_2(x,b,c) - 2\sqrt{x^2-c^2}\left(\sqrt{a^2-c^2} - \sqrt{b^2-c^2}\right)\Big\}.$$

Звідси випливає, що найбільшого значення переміщення досягають в околах кінців $x = \pm a$

$$u(a) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G} f_6(a,b,c), \tag{1.11}$$

де

$$f_6(a,b,c) = f_5(a,a,b,c) = \frac{1}{a-b}\Bigg[2a^2 \ln\left(\frac{a}{c}\right) + ab\Gamma_1(a,b,c) - \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\Gamma_2(a,b,c) +$$

$$+ c^2 - a^2 + \sqrt{\left(a^2-c^2\right)\left(b^2-c^2\right)}\Bigg].$$

Коли ці максимальні переміщення $u(a)$ досягають граничного значення δ_{2c}, яке є характеристикою зсувної контактної міцності системи пластина–підсилення та визначається експериментально, то втрачається безпосередній механічний зв’язок між підсиленням й пластиною – відбувається відшарування.

Критеріальна умова

$$u(a) = \delta_{2c}, \tag{1.12}$$

що характеризує початок відшарування підсилення, аналогічна відомій [11] умові δ_c-моделі. З формул (1.11), (1.12) отримуємо зв’язок між параметром δ_{2c} та розмірами зон передруйнування в гранично рівноважному стані. За

схемою праці [19] з розв'язку системи рівнянь

$$\pi q^* = 4\tau_s^* f_4(a,b,c),$$
$$4\pi G\delta_{2c} = (\kappa+1)\tau_s^* f_6(a,b,c) \quad (1.13)$$

визначаємо значення граничного навантаження $q = q^*$ відшарування підсилення за критерієм (1.12). У першому наближенні з рівнянь (1.13)

$$q^* = 8\sqrt{\frac{G\tau_s^*\delta_{2c}}{\pi(\kappa+1)a}}\,.$$

За безмежно малої довжини ділянки розпушення граничне навантаження

$$q^* = \frac{4\tau_s^*}{\pi}\operatorname{arch}\left(\exp\frac{2\pi G\delta_{2c}}{(\kappa+1)\tau_s^* a}\right).$$

На рис. 1.4 подано значення функції $\tilde{f}_6 \equiv f_6(a,b,c)/a$ з формули (1.11) залежно від параметра навантаження $q/(2\tau_s^*)$. Номери біля ліній відповідають різним довжинам ділянки розпушення $\gamma = (a-b)/a$: *1* – $\gamma = 10^{-10}$ (ділянка розпушення практично відсутня); *2* – 0,05; *3* – 0,1; *4* – 0,15; *5* – 0,2. За сталих навантаження та фізико-механічних характеристик зі збільшенням ділянки розпушення зміщення точок матеріалу півплощини відносно підсилення зростає. Чи, інакше, за фіксованого δ_{2c} зі збільшенням ділянки розпушення допустиме граничне навантаження розшарування зменшується.

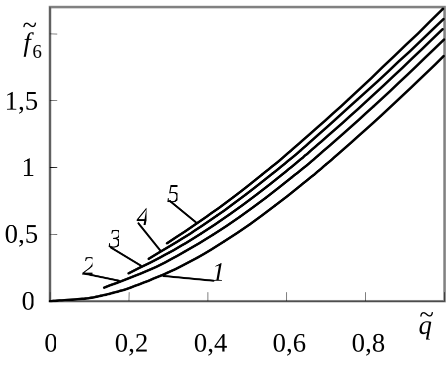


Рис. 1.4

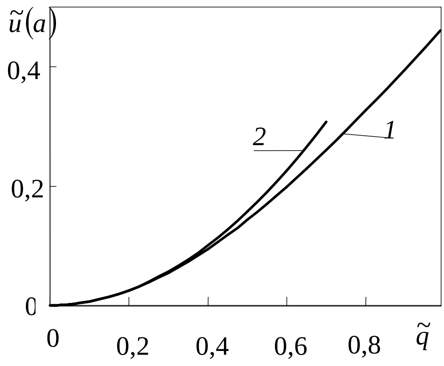


Рис. 1.5

Для зон передруйнування, малих порівняно з довжиною підсилення, формули (1.11) після розвинення в ряд за степенями ε спрощуються до

$$u(a) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{2\pi G}(a-c)\,. \quad (1.14)$$

На рис. 1.5 подано знерозмірені значення переміщень

$\tilde{u}(a) = Gu(a) / (\tau_s^* a)$ від параметра навантаження за безмежно малих ($\gamma \to 0$) ділянок розпушення, пораховані для $\kappa = 2{,}2$ за точними розв'язками (1.11), (1.8) – лінія *1* та наближеними (1.14), (1.9) – лінія *2*. Результати за простими інженерними формулами можна використати для оцінки розривів переміщень.

1.1.3. Автономність зон біля кінців підсилення

Нехай довжина підсилення $2a$ достатньо велика порівняно з параметром δ_{2c} та розмірами зон передруйнування $a - c$: $a >> \delta_{2c}$, $a - c << a$. Такі підсилення називаємо макроскопічними. Покажемо, що для них виконується гіпотеза автономності кінцевої області, тобто у стані граничної рівноваги (умова (1.12)) розмір зон передруйнування та розподіл сил зчеплення в них не залежить від навантаження та довжини підсилення. Крім того, вкажемо необхідну для цього довжину підсилення.

Якщо зовнішнє навантаження q таке, що відповідає відшаруванню підсилення, тобто $u(a) = \delta_{2c}$, то за першим наближенням довжина зони передруйнування досягає деякого граничного значення $c = c_*$ і

$$a - c_* = \frac{2\pi G \delta_{2c}}{(\kappa + 1)\tau_s^*} . \tag{1.15}$$

Права частина формули (1.15) не залежить від характеру навантаження та довжини підсилення, а лише від пружних та міцнісних характеристик. Тому можна зробити висновок, що для макроскопічних підсилень справедлива гіпотеза автономності зон в околах їх кінців.

Довжину макроскопічного підсилення оцінимо за результатами розрахунків граничного навантаження відшарування за точним розв'язком (система рівнянь (1.13)) та наближеним. При $G\delta_{2c} / (\tau_s^* a) < 0{,}2$ різниця між граничними навантаженнями не перевищує 5%, тому з такою похибкою підсилення вважатимемо макроскопічним, якщо $a > 5G\delta_{2c} / \tau_s^*$.

1.1.4. Розрив підсилення

Розподіл дотичних напружень σ_{xy} під підсиленням згідно з другою формулою (1.5) та розв'язком (1.7) такий:

$$\sigma_{xy} = 2i\Phi(x), \tag{1.16}$$

що дає можливість записати для правої половини (ліва антисиметрична):

$$\sigma_{xy} = \frac{2\tau_s^*}{\pi} f_7(x, a, b, c) \quad (x < c), \tag{1.17}$$

де

$$f_7(x,a,b,c)=a\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{a^2-c^2}}{a\sqrt{c^2-x^2}}-b\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{c^2-x^2}}+$$

$$+x\left(\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}\right).$$

Параметр c визначаємо зі системи рівнянь (1.13) за відомим силовим навантаженням. На ділянках L_1, L_2 розподіл контактних напружень описують формули (1.1), (1.2).

На рис. 1.6 подано розподіл контактних дотичних напружень уздовж правої половини підсилення (на лівій – картина антисиметрична) за фіксованого навантаження $q/(2\tau_s^*)=0{,}2$: для лінії *1* – $\gamma=10^{-10}$ (при цьому згідно з рівнянням (1.8) довжина зони передруйнування $\varepsilon=0{,}0474$); *2* – 0,05 ($\varepsilon=0{,}0723$); *3* – 0,1 ($\varepsilon=0{,}10035$). Основна частина дотичних зусиль передається підкріпленню в околах його кінців і з наближенням до центральної частини підсилення напруження швидко зменшуються за модулем: в околах точок $x=\pm c$ і в центральній ділянці підсилення вони вже порівняно невеликі. Зміна довжини ділянки розпушення γ впливає на розподіл контактних напружень біля кінців підсилення, не змінюючи картину розподілу в середній частині.

Дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення підсилення з пластиною спричиняють у його поперечному перерізі осьове зусилля

$$P(x)=\int_x^a \sigma_{xy}(x)dx\ ,$$

яке під час перевищення деякого граничного значення може спричинити розрив. Розподіл осьових зусиль на різних ділянках контакту обчислюємо за формулами

$$P(x)=\begin{cases}0{,}5\tau_s^*(a-x)^2/(a-b) & (b\le|x|\le a),\\ 0{,}5\tau_s^*(a+b-2x) & (\mathrm{c}\le|x|\le b),\\ (\tau_s^*/\pi)f_8(x,a,b,c)/(a-b) & (0\le|x|\le c),\end{cases}\qquad(1.18)$$

де

$$f_8(x,a,b,c)=2x\left(b\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{c^2-x^2}}-a\,\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{a^2-c^2}}{a\sqrt{c^2-x^2}}\right)+$$

$$+(b^2+x^2)\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}+\sqrt{c^2-x^2}\left(\sqrt{b^2-c^2}-\sqrt{a^2-c^2}\right)+$$

$$+0{,}5\pi\left(a^2-b^2\right)-\left(a^2+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

На рис. 1.7 подано розподіл знерозмірених $\tilde{P}(x)=P(x)/\left(\tau_s^* a\right)$ осьових зусиль уздовж правої половини підсилення за $\gamma=0{,}01$ та фіксованих навантажень: для лінії *1* – $q/\left(2\tau_s^*\right)$=0,15; *2* – 0,25. Помітне існування області у центральній частині підсилення, де осьові розривні зусилля змінюються незначно. Наприклад, якщо не зважати на їх зміну у межах 5% (скажімо, похибки визначення сталих, обчислень, математичної моделі тощо), то така область складає більше третини довжини підсилення, що свідчить про можливість за відносно швидкої зміни навантаження одночасного множинного розриву підкріплювального елемента у цій зоні.

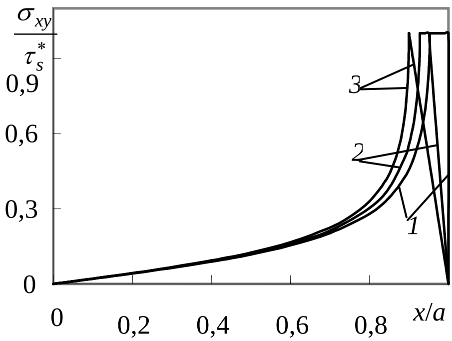


Рис. 1.6

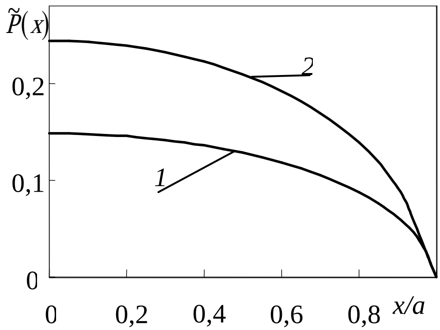


Рис. 1.7

Найбільшого значення осьові розривні зусилля досягають посередині підсилення:

$$P(0)=\frac{\tau_s^*}{\pi}f_9(a,b,c), \tag{1.19}$$

де $f_9=\dfrac{1}{a-b}\left[\begin{array}{l} c\left(\sqrt{b^2-c^2}-\sqrt{a^2-c^2}\right)+b^2\operatorname{arctg}\left(c/\sqrt{b^2-c^2}\right)- \\ -a^2\operatorname{arctg}\left(c/\sqrt{a^2-c^2}\right)+0{,}5\pi\left(a^2-b^2\right)\end{array}\right].$

На рис. 1.8 подано їх знерозмірену величину $\tilde{P}(0)=P(0)/\left(\tau_s^* a\right)$ залежно від параметра навантаження. Номери біля ліній відповідають різним довжинам ділянки розпушення: для лінії *1* – $\gamma=10^{-10}$ (практично відсутня); *2* – 0,05; *3* – 0,1. Лінії *2*, *3* обриваються в нижній частині через обмеження на навантаження. Зміна довжини ділянки розпушення дуже слабо впливає на максимальні осьові розривні зусилля у підсиленні.

Зі збільшенням навантаження та розвитком зон передруйнування осьові зусилля також зростають. Розривні зусилля у підсиленні зростатимуть до початку його відшарування чи, що те саме, до моменту досягнення зсувами межі пластини відносно підсилення граничного значення δ_{2c}. Тому максимальні осьові зусилля у підсиленні $P_{\max}^{(1)}$, на які необхідно орієнтуватися під час вибору його довжини, знаходимо з розв'язку системи рівнянь

$$\pi P_{\max}^{(1)} - \tau_s^* f_9(a,b,c) = 0\,,$$
$$4\pi G\delta_{2c} - (\kappa+1)\tau_s^* f_6(a,b,c) = 0\,. \tag{1.20}$$

На рис. 1.9 (лінія *1*) подано їх знерозмірені значення $\widetilde{P}_{\max}^{(1)} = P_{\max}^{(1)}\big/\left(\tau_s^* a\right)$ залежно від гранично допустимих переміщень $\widetilde{\delta}_{2c} = G\delta_{2c}\big/\left(\tau_s^* a\right)$ за безмежно малих ділянок розпушення та $\kappa = 2{,}2$ із розв'язку системи рівнянь (1.20).

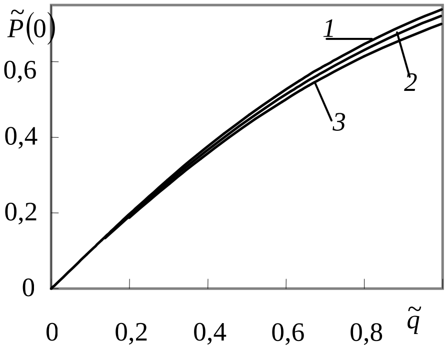


Рис. 1.8

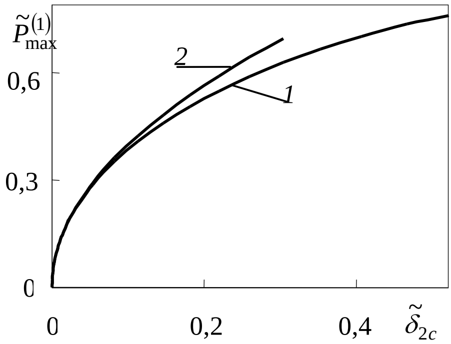


Рис. 1.9

У першому наближенні, виконавши у виразах $f_6(a,b,c)$, $f_9(a,b,c)$ системи рівнянь (1.20) розвинення в ряд за степенями ε та зберігаючи перші доданки, отримали

$$P_{\max}^{(1)} = 4\sqrt{\frac{G\delta_{2c}\tau_s^* a}{\pi(\kappa+1)}}\,. \tag{1.21}$$

Лінія *2* на рис. 1.9 ілюструє межі можливого використання наближеної формули (1.21) для розрахунку максимально допустимих розривних зусиль.

Для запобігання розриву підсилення необхідно, щоб осьові зусилля не перевищували його міцності на розрив P_{ut}, тобто

$$P_{\max}^{(1)} \le P_{ut}\,. \tag{1.22}$$

Приймаючи останню умову за критеріальну і розв'язавши систему рівнянь

$$\pi P_{ut} - \tau_s^* f_9(a,b,c) = 0\,,$$
$$\pi q^{**} - 4\tau_s^* f_4(a,b,c) = 0\,, \tag{1.23}$$

знаходимо граничні значення силового навантаження $q = q^{**}$ розриву підсилення. Прості наближені формули отримаємо, виконавши розвинення в ряд Тейлора в рівняннях (1.23) за степенями ε. Зберігаючи лише перші доданки розвинення, отримуємо лінійну залежність

$$q^{**} = 2P_{ut}/a . \tag{1.24}$$

На рис. 1.10 відображено залежність допустимого граничного навантаження $\tilde{q}^{**} = q^{**}/(2\tau_s^*)$ системи від знерозміреної міцності підсилення $\tilde{P}_{ut} = P_{ut}/(\tau_s^* a)$ на розрив за безмежно малих ділянок розпушення та $\kappa = 2{,}2$: лінія *1* – за розв'язком системи рівнянь (1.23); лінія *2* – за наближеною формулою (1.24).

Отримані співвідношення дають можливість виявити довжину підсилення зміни характеру руйнування, яка разом із пружними та міцнісними характеристиками системи визначає механізм можливого локального руйнування. За довжини підсилення, більшої за $a_{xp}^{(1)}$, яку визначають з розв'язку системи рівнянь

$$\pi P_{ut} - \tau_s^* f_9\left(a_{xp}^{(1)}, b, c\right) = 0 ,$$
$$4\pi G\delta_{2c} - (\kappa + 1)\tau_s^* f_6\left(a_{xp}^{(1)}, b, c\right) = 0 \tag{1.25}$$

відносно двох невідомих $a_{xp}^{(1)}$ та c, руйнування відбуватиметься шляхом розриву підсилення. Відповідне граничне навантаження знаходимо зі системи рівнянь (1.23) чи за наближеною формулою (1.24). А за довжини підсилення, меншої за $a_{xp}^{(1)}$, руйнування відбуватиметься способом його відшарування. Граничне навантаження відшарування знаходимо з розв'язку системи рівнянь (1.13) або за відповідними наближеними формулами.

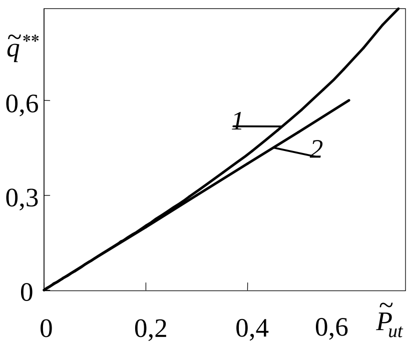


Рис. 1.10

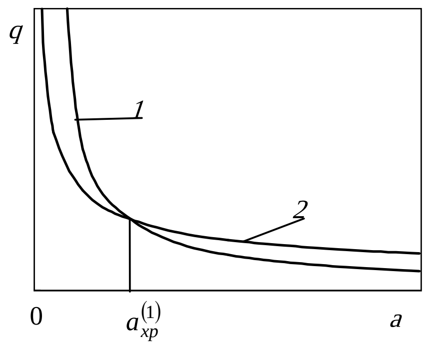


Рис. 1.11

На рис. 1.11 подано схематичну залежність навантаження розриву підсилення q^{**} (лінія *1*) та відшарування q^{*} (лінія *2*) від його підвдовжини. Точка

перетину ліній *1* та *2* описує критичну довжину підсилення $a_{xp}^{(1)}$ зміни способу руйнування. У першому наближенні її можна оцінити за простою формулою

$$a_{xp}^{(1)} = \frac{(\kappa+1)(P_{ut})^2}{16G\delta_{2c}\tau_s^*}. \tag{1.26}$$

1.2. Матеріал контактної межі крихкий

Якщо в розглядуваній вище модельній задачі у зоні передруйнування присутня лише ділянка розпушення L_1, то відповідну функцію напружень отримуємо з формул (1.7) за умови $c = b$:

$$\Phi_{fr}(z) = \frac{\tau_s^*}{2\pi(a-b)}\left[-a\Gamma_1(z,a,b) + z\Gamma_2(z,a,b)\right]. \tag{1.27}$$

Довжину зони передруйнування знаходимо із розв'язку нелінійного рівняння

$$\frac{\pi q}{4\tau_s^*} - \frac{1}{a-b}\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} - \sqrt{a^2-b^2}\right) = 0. \tag{1.28}$$

Просту формулу отримаємо після розвинення виразів в (1.28) в ряд Тейлора за степенями $\gamma = (a-b)/a$ та збереження першого доданку

$$\sqrt{\gamma} = \frac{3\pi q}{8\sqrt{2}\tau_s^*}. \tag{1.29}$$

Формули (1.29) та (1.9) аналогічні за структурою і різняться сталим множником, що пов'язано з різною інтерпретацією сил зчеплення в зонах передруйнування. На рис. 1.12 зображена відносна довжина зон розпушення залежно від навантаження, обчислена за розв'язком рівняння (1.28) – лінія *1*, наближеною формулою (1.29) – лінія *2*.

Зміщення берегів пластини стосовно підсилення в зонах розпушення після інтегрування у третій формулі (1.5) з урахуванням функції напружень (1.27)

$$u(x) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{8\pi G(a-b)}\left[\begin{array}{l} 2\sqrt{(a^2-b^2)(x^2-b^2)} + \\ +(a^2+x^2)\Gamma_2(x,a,b) - 2ax\Gamma_1(x,a,b)\end{array}\right]. \tag{1.30}$$

Найбільші відносні переміщення досягаються під кінцями підсилення

$$u(a) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G(a-b)}\left(a^2 - b^2 + 2a^2\ln\frac{b}{a}\right), \tag{1.31}$$

а рівняння відшарування підсилення за деформаційним критерієм $u(a) = \delta_{2c}^{fr}$:

$$G\delta_{2c}^{fr} - \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi}\left(a+b+\frac{2a^2}{a-b}\ln\frac{b}{a}\right) = 0\,. \tag{1.32}$$

Залежність між характеристикою $\tilde{\delta}_{2c}^{fr} = G\delta_{2c}^{fr}/(\tau_s^* a)$ та відносною довжиною зони розпушення $\gamma = (a-b)/a$, що їй відповідає, подано на рис. 1.13 (лінія *1*) за розв'язком рівняння (1.32) при $\nu = 0{,}25$. Така залежність корисна для експериментальної механіки руйнування під час визначення параметра δ_{2c}^{fr}.

Для малої проти довжини підсилення зони розпушення формули спрощуються. Зокрема, така залежність з рівняння (1.32) зі збереженням одного члена в розвиненні за степенями γ буде лінійною:

$$G\delta_{2c}^{fr} = \frac{\kappa+1}{2\pi}\tau_s^*\gamma a\,. \tag{1.33}$$

Їй відповідає лінія *3* на рис. 1.13. Лінія *2* відповідає результатам зі збереженням двох членів ряду:

$$G\delta_{2c}^{fr} = \frac{\kappa+1}{2\pi}\tau_s^* a\left(\gamma + \frac{1}{3}\gamma^2\right).$$

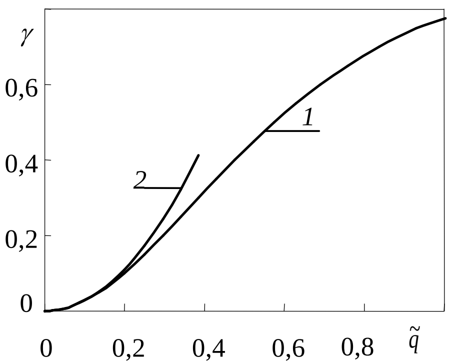


Рис. 1.12

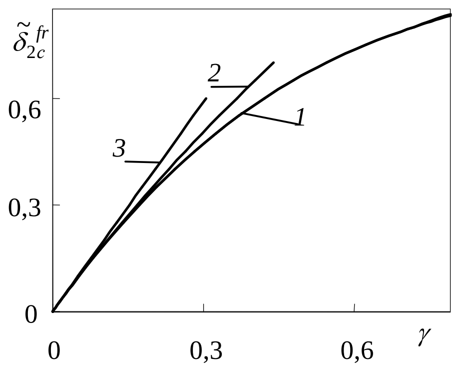


Рис. 1.13

Розподіл осьових зусиль уздовж підсилення описує формула (для правої половини)

$$P(x) = \begin{cases} (\tau_s^*/\pi) f_{21}(x,a,b) & (x<b), \\ 0{,}5(a-x)^2/(a-b) & (b<x<a), \end{cases} \tag{1.34}$$

де $f_{21}(x,a,b) = \frac{1}{a-b}\left[\left(a^2+x^2\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2-x^2}} - 2ax\cdot\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-x^2}} - \right.$

$$-\sqrt{\left(b^2-x^2\right)\left(a^2-c^2\right)}\Bigg],$$

а їхня якісна поведінка аналогічна до зображеної на рис. 1.7. Також є деяка область посередині підсилення, де значення розривних осьових зусиль практично однакові. В межах п’ятипроцентної смуги відхилення осьових зусиль така область складає більше третини довжини підсилення.

Максимальне значення осьових зусиль $P_{\max}$ досягається посередині підсилення ($x=0$) за навантаження, при якому виконується умова $u(a)=\delta_{2c}^{fr}$, тобто в гранично рівноважному стані відшарування підсилення. Після цього осьові зусилля лише зменшуватиметься, тобто подальше руйнування відбуватиметься способом відшарування підсилення від пластини.

З іншого боку, для запобігання розриву підсилення необхідне виконання умови $P_{\max}<P_{ut}$, де P_{ut} – його міцність на розрив. Приймаючи $P_{\max}=P_{ut}$, отримуємо систему рівнянь для знаходження довжини підсилення зміни способу руйнування $a=a_{xp}^{(2)}$, яка разом із міцнісними P_{ut}, δ_{2c}^{fr}, τ_s^* і пружними ν, G характеристиками системи визначатиме механізм руйнування та граничне навантаження:

$$\frac{\pi P_{ut}}{\tau_s^*}-\frac{1}{a_{xp}^{(2)}-b}\left(a_{xp}^{(2)2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a_{xp}^{(2)2}-b^2}}{b}-b\sqrt{a_{xp}^{(2)2}-b^2}\right)=0,$$

$$\frac{G\delta_{2c}^{fr}}{\tau_s^*}-\frac{(\kappa+1)}{4\pi}\left(a_{xp}^{(2)}+b-\frac{2a_{xp}^{(2)2}}{a_{xp}^{(2)}-b}\ln\frac{a_{xp}^{(2)}}{b}\right)=0,$$

$$\frac{\pi q}{4\tau_s^*}-\frac{a_{xp}^{(2)}}{a_{xp}^{(2)}-b}\ln\frac{a_{xp}^{(2)}+\sqrt{a_{xp}^{(2)2}-b^2}}{b}+\sqrt{\frac{a_{xp}^{(2)}+b}{a_{xp}^{(2)}-b}}=0. \qquad (1.35)$$

У першому наближенні, коли $a-b<<a$, зі системи рівнянь (1.35) можна отримати прості інженерні формули, виконавши розвинення у ряд за степенями γ та зберігаючи перші доданки:

$$3\pi P_{ut}=4\tau_s^*\sqrt{2a_{xp}^{(2)}\left(a_{xp}^{(2)}-b\right)},$$

$$2\pi G\delta_{2c}=\tau_s^*(\kappa+1)\left(a_{xp}^{(2)}-b\right),$$

$$3\pi q=8\tau_s^*\sqrt{\left(a_{xp}^{(2)}-b\right)\Big/a_{xp}^{(2)}}.$$

Зі збереженням двох доданків у розвиненнях рівнянь (1.35) за степенями γ:

$$\frac{P_{ut}}{\tau_s^* a_{xp}^{(2)}} = \frac{2\sqrt{2\gamma}}{3\pi}\left(2 - 0{,}3\gamma\right),$$

$$\frac{G\delta_{2c}^{fr}}{\tau_s^* a_{xp}^{(2)}} = \frac{\kappa + 1}{2\pi}\gamma\left(1 + \frac{1}{3}\gamma\right),$$

$$\frac{\pi q}{2\tau_s^*} = \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\pi}\left(\frac{2}{3} + 0{,}3\gamma\right).$$

Отримані результати дають можливість, наприклад, за заданим навантаженням підібрати довжину підкріплювального елемента так, щоб не відбувалося його руйнування чи відшарування від пластини.

1.3. Термопружна задача для півплощини з підсиленням

У доповнення до умов задачі підрозділу 1.1 приймаємо, що підсилення нагрівається до температури T_1, а температура вільного краю півплощини дорівнює T_0. Тепловий контакт між півплощиною й підсиленням ідеальний. Тобто дія прикладених на нескінченності зовнішніх зусиль доповнюється напруженнями, спричиненими різними температурними коефіцієнтами лінійного розширення матеріалів півплощини та підсилення.

Крайові умови в зонах передруйнування (1.1), (1.2) та на нескінченності (1.4) залишаються такими ж. На проміжку $|x| < c$ пружного деформування зберігається ідеальний зв'язок і тому деформації тут на відміну від умови (1.3) суто силової задачі:

$$\partial u(x)/\partial x = \alpha_p T_1 \quad (x \in L_0)\,, \tag{1.36}$$

де α_p – температурний коефіцієнт лінійного видовження матеріалу підсилення. Температура підсилення на межі півплощини T_1, а вільного краю T_0:

$$T(x) = \begin{cases} T_1 & (|x| < a,\ y = 0), \\ T_0 & (|x| > a,\ y = 0). \end{cases} \tag{1.37}$$

Для розв’язання задачі використовуємо відомі [9, 13] подання для напружень (1.5) і деформацій

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \beta\Psi_0(z), \tag{1.38}$$

де $\beta = 4G(1+\nu)\alpha_0$ – в умовах плоскої деформації та $\beta = 4G\alpha_0$ – для плоского напруженого стану; α_0 – температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу півплощини. Останні позначення залишаються такими ж. Зауважимо, що за плоского напруженого стану вільні поверхні півплощини вважають теплоізольованими.

Невідому функцію $\Psi_0(z)$ визначають співвідношення [9, 13]

$$2\,\mathrm{Re}\,\Psi_0(z) = T\ ,\ \ \Psi_0(z) = F_0(z) - \overline{F}_0(z),$$
$$F_0(z) - F_0(\bar{z}) = T + i\eta\ , \qquad (1.39)$$

де η – дійсна функція, $F_0(z)$ – аналітична функція, визначена в областях D^+ ($y<0$) та D^- ($y>0$). Звідси, задовольнивши крайові умови (1.37), отримуємо [13], що

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}T_0 + \frac{T_1 - T_0}{2\pi i}\ln\frac{z+a}{z-a}\,. \qquad (1.40)$$

Функцію напружень $\Phi(z)$ знайдемо після підставляння формул (1.38) у крайові умови (1.1), (1.2), (1.36). З урахуванням результату (1.40) одержимо задачу спряження з кусково-неперервними коефіцієнтами:

$$\Phi^+(x) - g_0(x)\Phi^-(x) = f_{20}(x),$$

де $f_{20}(x) = \begin{cases} f_1(x) & (x \in L_1) \\ f_2(x) & (x \in L_2) \\ f_0^T(x) & (x \in L_0) \end{cases}$, $f_0^T(x) = 2\left[G\alpha_p T_1 - \beta\,\mathrm{Re}\,\Psi_0^+(x)\right]$;

g_0, $f_1(x)$, $f_2(x)$ визначені вище формулами (1.6). Загальним розв'язком крайової задачі з урахуванням умови на нескінченності буде функція

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}f_0^T(z) + B_4 z\mathrm{X}(z) + \frac{\tau_s^*}{2\pi}f_3(z,a,b,c), \qquad (1.41)$$

де $B_4 = q/4 - f_0^T/2 - (\tau_s^*/\pi)f_4(a,b,c)$. Функції $f_3(z,a,b,c)$, $f_4(a,b,c)$ подані раніше формулами (1.7).

Формули (1.38), (1.41) повністю описують поля напружень та деформацій у тілі з підсиленням і дають можливість дослідити умови його локального руйнування.

З умови, що напруження у вершинах ($x=\pm c$) зон передруйнування обмежені, отримаємо нелінійне рівняння

$$\frac{q}{4} - \frac{2GT_1}{\kappa+1}(\alpha_p - \kappa_1\alpha_0) - \frac{\tau_s^*}{\pi}f_4(a,b,c) = 0\,, \qquad (1.42)$$

де $\kappa_1 = 1$ – в умовах плоского напруженого стану та $\kappa_1 = 1+\nu$ – за плоскої деформації. Рівняння (1.42) пов'язує температурні, силові та геометричні параметри композиції.

За температурного навантаження, прийнявши у результатах (1.41), (1.42) параметр навантаження $q=0$, отримуємо розв'язок термопружної задачі, а за заданого $q \neq 0$, поклавши $T_1 = 0$, – розв'язки, подані в підрозділі 1.1.

Комбіноване навантаження ($q \neq 0$, $T_1 \neq 0$). Якщо силове навантаження таке, що $q = 8GT_1(\alpha_p - \kappa_1\alpha_0)/(\kappa+1)$, то згідно з рівнянням (1.42) для

одного підсилення за комбінованої дії зусиль та температури виконуються умови $c = b = a$ та $c_i = b_i = a_i \ (i = 1,2)$ відповідно і зони передруйнування не виникають. Так само, задаючи на підсиленні залежну від зусиль розтягу температуру

$$T_1 = q(\kappa + 1) / [8G(\alpha_p - \kappa_1 \alpha_0)],$$

можна уникнути виникнення зон передруйнування біля країв підсилення. Якщо $\alpha_p = \kappa_1 \alpha_0$, то саме лише нагрівання підсилення ($q = 0$) не спричинятиме появу зон передруйнування. При $\alpha_p < \kappa_1 \alpha_0$ навантаження розтягу і температурні чинники взаємно підсилюють розвиток зон передруйнування, а при $\alpha_p > \kappa_1 \alpha_0$ температурні напруження послаблюють дію зусиль розтягу.

1.4. Пластина з періодичною системою підсилень

Запропоноване вище формулювання задачі дає можливість розглянути і отримати механічно коректні результати для періодичної системи підсилень, зокрема, за як завгодно малої відстані між ними (аж до співдотику). Зазначимо, що розв’язок близької до неї періодичної задачі [16], в якій враховано лише пластичні деформації в зонах передруйнування, характеризується логарифмічною особливістю напружень в околах країв підкріплень.

1.4.1 Формулювання задачі та її розв’язування

На відрізках $[-a + 2nd, a + 2nd]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ пластина підкріплена періодичною системою нерозтягливих гнучких підсилень завдовжки $2a$, що перебувають в одновісному напруженому стані, а під ними виникають лише тангенціальні контактні напруження (рис. 1.14).

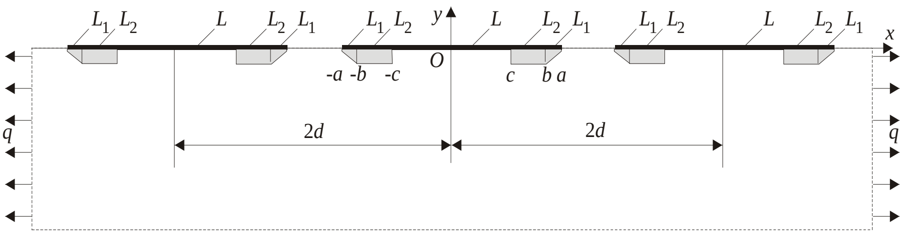


Рис. 1.14

Зони передруйнування зароджуються і просуваються від кожного краю до центральної частини уздовж межі пластина–підсилення і складаються з ділянок розпушення $L_1 \approx b < |x - 2nd| < a$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ та ділянок пластич-

ного деформування $L_2 \approx c < |x - 2nd| < b$. При цьому виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до граничного значення τ_s^*

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \frac{a - |x - 2nd|}{a - b} sign(x - 2nd) \quad (x \in L_1), \tag{1.43}$$

на ділянках пластичного деформування

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* sign(x - 2nd) \quad (x \in L_2). \tag{1.44}$$

На відрізках $|x - 2nd| < c$ пружного деформування зберігається ідеальний контакт і тому деформації там відсутні та виконується умова (1.3).

Для розглядуваної задачі функція $\Phi(z)$ буде кусково–аналітичною періодичною (з періодом $2d$), яка згідно зі теоремою Ліувілля [9] задовольняє умову $\Phi(z) = \overline{\Phi}(z)$. Задоволення з допомогою подань (1.5) крайових умов породжує для функції $\Phi(z)$ задачу спряження з кусково–неперервними коефіцієнтами

$$\Phi^+(x) - g(x)\Phi^-(x) = f(x), \tag{1.45}$$

де

$$g(x) = \begin{cases} -1 \quad (x \in L), \\ \;\;1 \; (x \in L_1 \cup L_2); \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} f_{10}(x) = -i\tau_s^* \dfrac{a - |x - 2nd|}{a - b} sign(x - 2nd)\,(x \in L_1), \\ f_{20}(x) = -i\tau_s^* sign(x - 2nd)\;(x \in L_2), \\ f_{30}(x) = 0 \;(x \in L). \end{cases}$$

З фізичних міркувань повинні також виконуватися умови рівноваги кожного з підсилень:

$$\int_{-a}^{a} \sigma_{xy}(t)dt = 0. \tag{1.46}$$

Тоді загальним розв'язком крайової задачі (1.45) з урахуванням умови на нескінченності буде функція напружень

$$\Phi(z) = \frac{f_{22}(a,b,c,d)\sin(\omega z)}{X(z)} + \frac{\tau_s^*}{2\pi} f_{23}(z,a,b,c,d), \tag{1.47}$$

де $f_{22}(a,b,c,d) = q/4 - (\tau_s^*/\pi) f_{24}(a,b,c,d)$,

$$f_{24}(a,b,c,d) = X_1(a,b,d)\left[X(b) - X(a) - \sin(\omega b)\ln\frac{\sin(\omega b) + X(b)}{\sin(\omega c)} + \right.$$
$$\left. + \sin(\omega a)\ln\frac{\sin(\omega a) + X(a)}{\sin(\omega c)}\right], \tag{1.48}$$

$$f_{23}(z,a,b,c,d) = \mathrm{X}_1(a,b,d)\{\sin(\omega b)\Gamma_1(z,b,c,d) - \sin(\omega a)\Gamma_1(z,a,c,d) + \\ + \sin(\omega z)[\Gamma_2(z,a,c,d) - \Gamma_2(z,b,c,d)]\}, \tag{1.49}$$

$$\mathrm{X}(z) = \sqrt{\sin(\omega(z-c))\sin(\omega(z+c))}, \ \mathrm{X}_1(a,b,d) = \left[\sin\frac{\omega(a-b)}{2}\sin\frac{\omega(a+b)}{2}\right]^{-1},$$

$$\omega = \frac{\pi}{2d}, \ \Gamma_1(z,t,c,d) = \ln\left(\zeta^-/\zeta^+\right), \ \zeta^{\pm} = \mathrm{X}(z)\sin(\omega t) \pm \mathrm{X}(t)\sin(\omega z),$$

$$\Gamma_2(z,t,c,d) = \ln\left(\xi^-/\xi^+\right), \ \xi^{\pm} = \mathrm{X}(t) \pm \mathrm{X}(z). \tag{1.50}$$

Формули (1.5), (1.46)–(1.50) повністю описують поля напружень та деформацій у пластині з підсиленнями. Із умови обмеженості розв’язку в околах вершин зон передруйнування ($x = \pm c$) отримуємо нелінійне рівняння

$$\frac{q}{2\tau_s^*} - \frac{2}{\pi} f_{24}(a,b,c,d) = 0, \tag{1.51}$$

яке означає, що множники біля сингулярних членів функції напружень дорівнюють нулю, і яке зв’язує довжину зон передруйнування із навантаженням композиції.

За результатами обчислень з використанням рівняння (1.51) на рис. 1.15 відображено залежність відносної довжини зон передруйнування $\varepsilon \equiv (a-c)/a$ від знерозміреного параметра навантаження $\tilde{q} = q/\left(2\tau_s^*\right)$ за фіксованої безрозмірної довжини підсилень $\lambda \equiv a/d = 0{,}5$. Номери біля ліній відповідають різним довжинам ділянки розпушення $\gamma \equiv (a-b)/a$: *1* $-\gamma = 10^{-6}$ (ділянка розпушення практично відсутня); *2* – 0,05; *3* – 0,1; *4* – 0,2. Зі збільшенням ділянки розпушення за фіксованого рівня навантаження видовжується зона передруйнування, хоча сама область пластичного деформування при цьому зменшується. З розвитком зон передруйнування абсолютна різниця між їх довжинами для різних γ зменшується, що пояснюють зростанням впливу ділянок пластичного деформування.

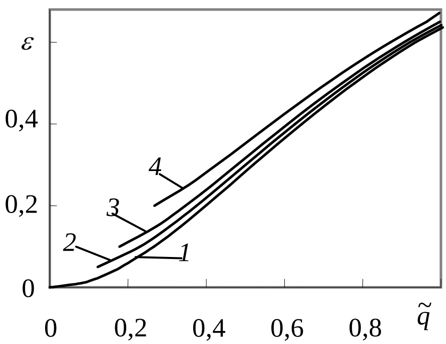


Рис. 1.15

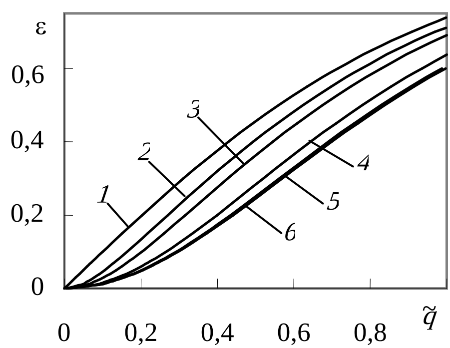


Рис. 1.16

На рис. 1.16 подана та ж довжина зон передруйнування для різних відстаней між підсиленнями за зафіксованої ділянки розпушення $\gamma = 10^{-6}$: *1* – $\lambda = 1$ (підсилення максимально зближені – співдотикаються); *2* – $\lambda = 0{,}9$; *3* – 0,8; *4* – 0,5; *5* – 0,2; *6* – 0,01. Помітно, що зі зростанням відстані (зменшенням λ) довжина зони передруйнування зменшується і вже при $\lambda = 0{,}2$ та $\lambda = 0{,}01$ їх значення практично збігаються (лінії *5*, *6*).

За умови $\lambda = 1$ ($a = d$) кінці підсилень взаємно дотикаються. Результати в цьому випадку можуть бути орієнтиром для дослідження ситуації, що виникає після розриву довгого суцільного підсилення на однакові частини завдовжки $2a = 2d$. При $\tilde{q} < 0{,}5$ для дуже зближених підсилень залежність між довжиною зон та навантаженням практично лінійна (лінія *1*).

На рис. 1.17 подано залежність загальної довжини зони передруйнування від відстані між підсиленнями за фіксованого навантаження $\tilde{q} = 0{,}2$ та трьох довжин ділянок розпушення: лінія *1* – $\gamma = 10^{-6}$; *2* – 0,05; *3* – 0,1.

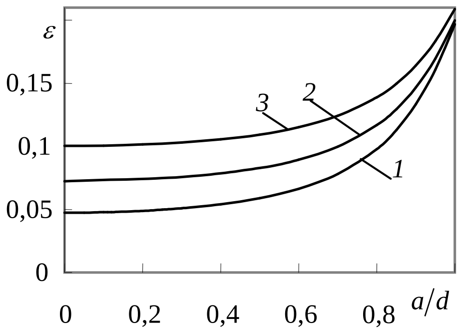


Рис. 1.17

Для великих відстаней довжина зон виходить на асимптоту розв’язку для одного підсилення: наприклад, для $\gamma = 10^{-6}$ різниця менша 5%, якщо $\lambda < 0{,}25$, менша 1% – якщо $\lambda < 0{,}12$; для $\gamma = 0{,}1$ різниця менша 5% якщо $\lambda < 0{,}4$, менша 1% якщо $\lambda < 0{,}2$. За розглядуваного навантаження $\tilde{q} = 0{,}2$ ($\gamma = 10^{-6}$) при співдотику підсилень найбільше відхилення довжини зон передруйнування від такої ж для одного ізольованого дорівнює 315%.

1.4.2. Відшарування підсилень

На відміну від зон пружного контакту, де матеріал пластини нерозривно з’єднаний з підсиленнями, у смугах пластичного деформування та розпушення ($x \in L_1 \cup L_2$) відбувається зміщення (проковзування) точок матеріалу пластини відносно підсилення. Інтегруванням у поданні (1.5) з урахуванням

розв'язку (1.46) обчислюємо переміщення під підсиленнями:

$$u(x) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G}\int_c^x f_{23}(t,a,b,c,d)dt \qquad (x \le a). \tag{1.52}$$

Зазначимо, що на кожному з відрізків $L_i\ (i=1,2)$ інтегрування необхідно виконувати окремо, оскільки вирази для функції $f_{23}(t,a,b,c,d)$ на них різні.

Із виразу (1.52) випливає, що зміщення точок пластини відносно підсилення найбільші при $x=a$ (для $x=-a$ протилежні за знаком). Коли максимальні переміщення $u(\pm a)$ досягають деякого граничного значення δ_{2c}, яке є характеристикою зсувної контактної міцності системи пластина–підсилення та визначається експериментально, то можлива втрата безпосереднього механічного зв'язку між підсиленнями й пластиною. Відповідна критеріальна умова $u(a)=\delta_{2c}$, що характеризує початок відшарування, застосована вище. Система рівнянь (1.51), (1.52) з критеріальною умовою (1.12) описує стан граничної рівноваги композиції, коли можливе розшарування між пластиною й підсиленнями, а її розв'язок дає значення відповідного цій ситуації граничного навантаження $q=q^*$.

За результатами здійснених на основі залежностей (1.52), (1.51) обчислень на рис. 1.18 подано знерозмірені зміщення точок пластини під торцями підсилень стосовно цих торців $\tilde{u}(a)=Gu(a)/(\tau_s^* a)$ залежно від навантаження $\tilde{q}$ за фіксованої $\lambda=0{,}5$ та $\kappa=2{,}2$. Номери біля ліній відповідають тим же довжинам ділянок розпушення γ, що й на рис. 1.15. За сталих навантаження та фізико-механічних характеристик зі збільшенням ділянки розпушення зміщення точок матеріалу пластини відносно підсилення зростає. Те саме можна висловити інакше: за фіксованого δ_{2c} зі збільшенням ділянки розпушення допустиме граничне навантаження розшарування зменшується.

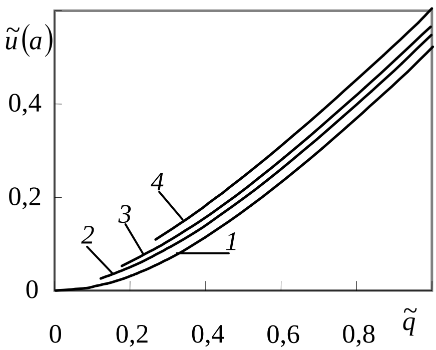


Рис. 1.18

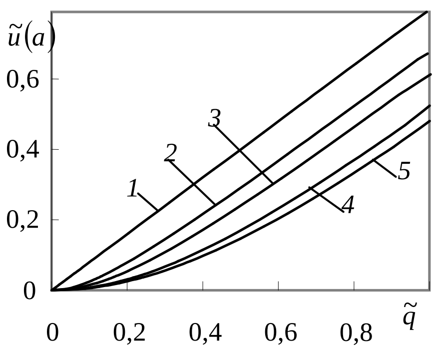


Рис. 1.19

Відображені на рис. 1.18 залежності якісно відповідають результатам

розрахунку довжини зони передруйнування (див. рис. 1.15). При цьому довжина ділянки розпушення γ практично не впливає на зв'язок між зміщеннями $u(a)$ та загальною довжиною зони передруйнування ε, що узгоджується з відповідними результатами для пластини з включенням.

На рис. 1.19 подано залежність відносних зміщень від навантаження за різних відстаней між підсиленнями і таких же значень λ, що й на рис. 1.16. За умови $\lambda = 1$ кінці підсилень дотикаються і зміщення точок пластини дорівнює переміщенню одного підсилення відносно іншого як єдиного цілого. При цьому переміщення практично пропорційні (лінія *1*) прикладеному навантаженню.

Переміщення, подані на рис. 1.18 та 1.19, є різницею між переміщеннями підсилення як цілого відносно краю смуги періодичності $x = d + 2nd$ та точок пластини на поверхні $y = 0$. На ділянці пружного контакту $x \in L$ ці переміщення мають однакові значення і тому відносні переміщення там дорівнюють нулю. Переміщення підсилення стосовно краю смуги періодичності обчислюємо за формулою

$$u^{(n)} = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G}\int_c^d f_{23}(t,a,b,c,d)dt\,. \tag{1.53}$$

Тут слушне зауваження, зроблене після формули (1.52). Із аналізу та порівняння обчислень за формулами (1.53) та (1.51) випливає, що

$$\frac{1}{d}\int_c^d f_{23}(t,a,b,c,d)dt = \frac{\pi q}{2\tau_s^*}\,. \tag{1.54}$$

Тому переміщення краю смуги періодичності задачі відносно підсилення (чи переміщення підсилення стосовно цього краю) лінійно залежить від навантаження та довжини періоду задачі:

$$u^{(n)} = \frac{(\kappa+1)d}{8G}q\,. \tag{1.55}$$

1.4.3. Контактні напруження

Загалом контактні дотичні напруження уздовж межі пластина–підсилення згідно з поданням (1.5) дає вираз

$$\sigma_{xy}(x) = -\operatorname{Im}\left[\Phi^+(x) - \Phi^-(x)\right]. \tag{1.56}$$

На ділянках L_1, L_2 їх описують формули (1.43)–(1.44), а на ділянці L визначають згідно з розв'язком (1.46)-(1.50):

$$\sigma_{xy}(x) = \frac{2\tau_s^*}{\pi} f_{27}(x,a,b,c,d), \tag{1.57}$$

де

$$f_{27}(x,a,b,c,d) = \mathrm{X}_1(a,b,d)\left[\sin(\omega a)\Gamma_3(x,a) - \sin(\omega b)\Gamma_3(x,b) + \right.$$
$$\left. + \sin(\omega x)\left(\Gamma_4(x,a) - \Gamma_4(x,b)\right)\right],$$
$$\Gamma_3(x,t) = arctg\frac{\sin(\omega x)\mathrm{X}(t)}{\left(\sin(\omega t)\mathrm{X}_2(x)\right)},\ \Gamma_4(x,t) = arctg\frac{\mathrm{X}_2(x)}{\mathrm{X}(t)},$$
$$\mathrm{X}_2(x) = \sqrt{\sin(\omega(c-x))\sin(\omega(c+x))}.$$

Навантаження пластини тут входить опосередковано через значення довжини зон за рівнянням (1.51).

На рис. 1.20 подано розподіл контактних дотичних напружень уздовж правої половини підсилення за фіксованих навантажень $\tilde{q} = 0{,}2$ та відстані між підсиленнями $\lambda = 0{,}5$ ($t = x/a$, координата $t = 1$ відповідає точці $x = a$, $t = 0$ – середині підсилення): для лінії *1* – $\gamma = 0{,}01$ (при цьому згідно з рівнянням (1.51) довжина зони передруйнування $\varepsilon = 0{,}0636$); *2* – $\gamma = 0{,}05$ ($\varepsilon = 0{,}0829$); *3* – 0,1 ($\varepsilon = 0{,}10936$). Основна частина дотичних зусиль передається підкріпленню в околах його кінців і у центральній області вони вже порівняно невеликі. Зміна довжини ділянки розпушення γ впливає на розподіл контактних напружень лише біля кінців підсилення, не змінюючи картину розподілу в її центральній частині.

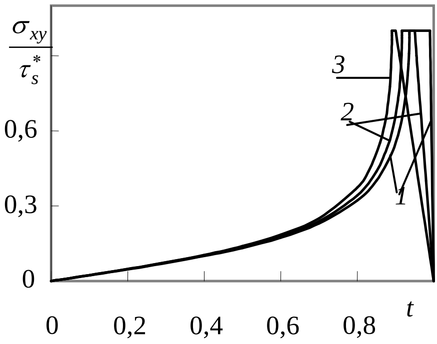


Рис. 1.20

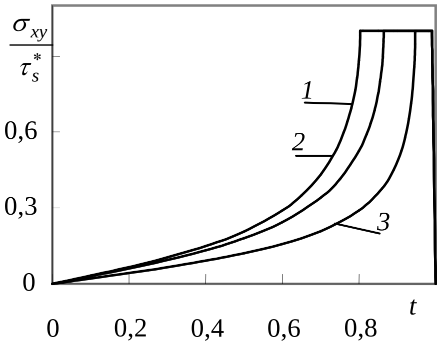


Рис. 1.21

Розподіл дотичних напружень за того ж навантаження, сталої ділянки розпушення $\gamma = 0{,}01$ та різних відстаней між підсиленнями подано на рис. 1.21: для лінії *1* – $\lambda = 1{,}0$ ($\varepsilon = 0{,}19691$), для лінії *2* – 0,9 ($\varepsilon = 0{,}13564$), *3* – 0,2 ($\varepsilon = 0{,}05369$). Зближення підсилень супроводжується збільшенням області концентрації напружень в околах кінців (більшою ділянкою пластичного деформування).

1.4.4. Розривання підсилення

Дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення пластини з підсиленням (1.57), (1.43), (1.44) спричиняють у поперечному перерізі останнього осьові зусилля, середнє значення яких описує формула

$$P(x)=\int_x^a \sigma_{xy}(t)dt. \tag{1.58}$$

На рис. 1.22 подано розподіл нормованої сили $\tilde{P}(x)=P(x)/\left(\tau_s^* a\right)$ уздовж правої половини підсилення за тих же навантаження та відстані, що й на рис. 1.20. Позначення для ліній також зберігаємо: *1* – $\gamma=0{,}01$; *2* – 0,05; *3* – 0,1. Зі збільшенням довжини ділянки розпушення осьові розривні зусилля у підсиленні дещо знижуються по всій довжині.

Зі зближенням підсилень осьові зусилля зростають. На рис. 1.23 подано їх розподіл за тих же навантаження, довжини ділянки розпушення та відстаней між підсиленнями, що й на рис. 1.21. Для практично невзаємодіючих підсилень (лінія *1*) значення максимальних зусиль (при $x=0$, $t=0$) за однакового навантаження $\tilde{q}=0{,}2$ на 44% менше, ніж для максимально зближених.

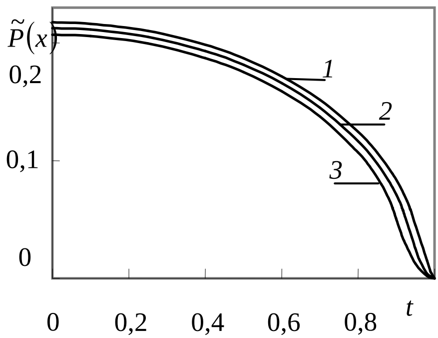


Рис. 1.22

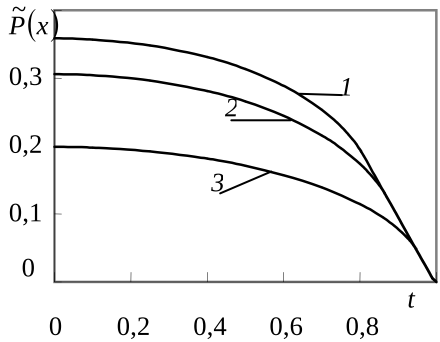


Рис. 1.23

Зі збільшенням навантаження та розвитком зон пластичного деформування осьові зусилля також зростають. Розривні зусилля у підсиленнях зростатимуть до початку їх відшарування чи, що те саме, до моменту досягнення відносними переміщеннями точок пластини відносно підсилення граничного значення δ_{2c}. Тому максимальні осьові зусилля $P_{\max}$, на які необхідно орієнтуватися під час вибору підсилення, знаходимо, розв'язуючи отримані системи рівнянь за умови $P(0)=P_{\max}$.

Для запобігання розриву підсилення необхідно, щоб осьові зусилля не перевищували границі міцності підсилення на розтяг P_{ut}: $P_{max}\le P_{ut}$. Приймаючи останню умову за критеріальну і розв'язавши систему рівнянь (1.51),

(1.58) за умови $P(0) = P_{ut}$, отримуємо граничне значення навантаження $q = q^{**}$ розриву підсилення.

1.5. Відшарування підсилення за циклічного навантаження

Наведено математичне формулювання та отримано аналітичні розв’язки задач про відшарування підсилення за неперервного та циклічного навантажень. Прийнято, що енергія відшарування підсилення на одиницю довжини стала та відома і знайдено аналітичні залежності зміни робочої довжини підсилення від навантаження, міцнісних та пружних характеристик, а також аналітичні залежності між кількістю циклів навантаження та робочою довжиною підсилення. Подано числові приклади розрахунку.

1.5.1. Формулювання задачі

В умовах плоскої задачі теорії пружності розглядаємо півплощину, до краю якої прикріплено гнучке підсилення завдовжки $2a$ (рис. 1.24). На безмежності така система навантажена циклічними зусиллями інтенсивності $q = q_0 + \Delta q \sin \omega t$, направленими паралельно краю півплощини, де ω – кругова частота, $\Delta q << q_0$. Вважаємо, що частота невелика й інерційні та теплові ефекти малоістотні. При цьому в околах точок найбільшої концентрації напружень (кінців підсилення) розвиваються локальні зони передруйнування матеріалу, просуваючись від країв до центральної частини.

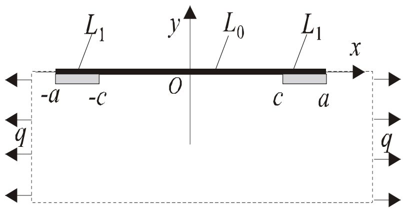


Рис. 1.24

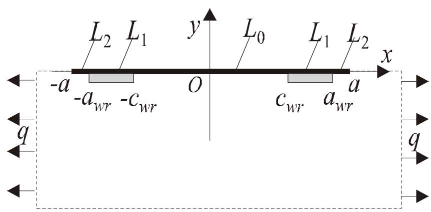


Рис. 1.25

Приймаємо, що за певної комбінації значень навантаження q та кількості циклів n підсилення відшаровуватиметься від півплощини, тобто в зонах передруйнування втратиться зв'язок між півплощиною й підкріпленням. Довжину підсилення без відшарованих на кінцях частин позначаємо через $2a_{wr}$ і називаємо його робочою довжиною (рис. 1.25). При цьому для макроскопічних підсилень зони передруйнування, зберігаючи свої розміри, переміщаються до їх середини на довжину відшарованої частини, тобто вважаємо, що ви-

конується гіпотеза автономності в околах кінців робочої довжини підсилення. Умови автономності зон передруйнування розглянуто вище в підпункті 1.1.3.

Для такої композиції приймаємо, що енергія відшарування підсилення на одиницю довжини – стала і знайдемо аналітичні залежності зміни робочої довжини підсилення $2\,a_{wr}$ від навантаження q, кількості циклів *n*, міцнісних τ_s^* та пружних характеристик.

1.5.2. Статичне навантаження

Спочатку розглянемо відшарування підсилення за однорідного навантаження на нескінченності $\sigma_{xx}^{\infty} = q$. Відповідну крайову задачу теорії пружності сформулюємо так. Ділянка $c_{wr} < |x| < a_{wr}$ (рис. 1.25) відповідає зоні передруйнування, на берегах якої діють дотичні напруження

$$\sigma_{xy} = \tau_s^* \operatorname{sign}(x) \quad \left(x \in L_1\right), \tag{1.59}$$

де τ_s^* – адгезійна зсувна міцність контактної межі пластина–підсилення. На ділянці $|x| < c_{wr}$ підсилення ідеально зв'язане з пластиною і тому тут поздовжні деформації на межі півплощини рівні нулю:

$$\partial u(x)/\partial x = 0 \;\left(x \in L_0\right). \tag{1.60}$$

Формулювання крайової задачі теорії пружності (1.59), (1.60) відповідає наведеному в підрозділі 1.1 за безмежно малої ділянки розпушення. Таке допущення значно спрощує аналітичні викладки.

Отриманий за схемою підрозділу 1.1 комплексний потенціал Колосова–Мусхелішвілі крайової задачі (1.59), (1.60) має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{\tau_s^*}{2\pi} \ln \frac{a_{wr}\sqrt{z^2 - c_{wr}{}^2} + z\sqrt{a_{wr}{}^2 - c_{wr}{}^2}}{a_{wr}\sqrt{z^2 - c_{wr}{}^2} - z\sqrt{a_{wr}{}^2 - c_{wr}{}^2}}. \tag{1.61}$$

З умови обмеженості напружень в околах вершин $x = \pm c_{wr}$ зон передруйнування отримуємо нелінійну залежність

$$c_{wr} = \frac{a_{wr}}{\operatorname{ch} H_2}, \; H_2 = \frac{\pi q}{4\tau_s^*}, \tag{1.62}$$

яка зв'язує силові та геометричні параметри композиції. Для смуг передруйнування, малих проти довжини підсилення ($d \equiv a_{wr} - c_{wr} << a_{wr}$), виконавши у формулі (1.62) розвинення в ряд за степенями ($\left(a_{wr} - c_{wr}\right)/a_{wr}$) та зберігши перші доданки, в першому наближенні отримуємо

$$c_{wr} = a_{wr}\left(1 - H_2^2\right).$$

У смугах передруйнування точки матеріалу півплощини зміщуються відносно підсилення. Інтегруванням у третій формулі (1.5) з урахуванням ви-

разу (1.61) знаходимо переміщення на $c_{wr} < x < a_{wr}$:

$$u(x) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G}\left[a_{wr}\ln\frac{\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} - \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}}{\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} + \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}} - \right.$$
$$\left. - x\ln\frac{a_{wr}\sqrt{z^2 - c_{wr}^2} - z\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{a_{wr}\sqrt{z^2 - c_{wr}^2} + z\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}\right]. \quad (1.63)$$

На рис. 1.26 подано їх знерозмірені значення $\tilde{u}(x) = Gu(x)/(\tau_s^* a_{wr})$ по довжині смуги передруйнування при $\kappa = 2{,}2$ за різної інтенсивності навантаження: для лінії *1* – $H_2 = \pi/8$, лінії *2* – $\pi/6$, *3* – $\pi/5$. Для більших навантажень відносні переміщення також зростають. Найбільшого значення відносні зміщення досягають під кінцями підсилень в точках $x = \pm a_{wr}$:

$$u(a_{wr}) = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{2\pi G} a_{wr}\ln\frac{a_{wr}}{c_{wr}}. \quad (1.64)$$

Для робочої довжини підсилення за умов

$$a_{wr} >> \delta_{2c}, \ \varepsilon_{wr} << 1, \ \varepsilon_{wr} = (a_{wr} - c_{wr})/a_{wr}$$

виконується гіпотеза автономності кінцевої області, тобто область кінцевої частини робочої довжини підсилення під час відшарування поступово переміщається, зберігаючи свої розміри. Це слідує із залежності

$$a_{wr} - c_{wr} = \frac{2\pi G\delta_{2c}}{(\kappa+1)\tau_s^*}.$$

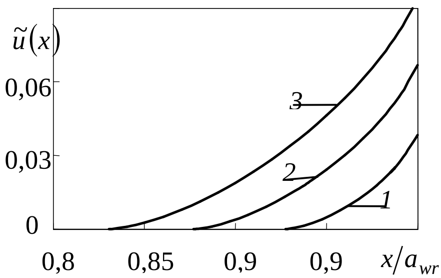


Рис. 1.26

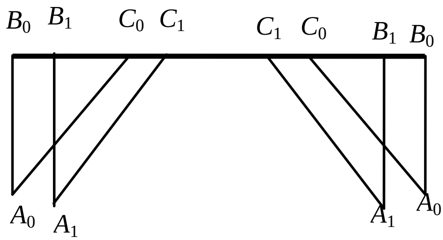


Рис. 1.27

Нехай у деякий момент, що відповідає значенням довжини підсилення a_{wr} та навантаження q у стані граничної рівноваги, переміщення $u(x, a_{wr})$ на відрізках смуг передруйнування ($a_{wr} - c_{wr}, a_{wr}$) зображуються умовним трикутником A_0, B_0, C_0 згідно з рис. 1.27. Правомірність такого подання випливає з характеру розподілу переміщень у смугах передруйнування згідно з рис. 1.26 чи формули (1.63) та автономності зон в околі вершини робочої частини під-

силення. Через деякий час, що відповідає зміні робочої довжини підсилення a_{wr} та навантаження q на деякі малі величини Δa_{wr} і Δq відповідно, розглядуваний відрізок займе зсунуте в напрямку центра підсилення положення, яке умовно можна зобразити трикутником A_1, B_1, C_1. Точки C_0 та C_1 відповідають кінцям смуг передруйнування, а точки A_0, B_0 і A_1, B_1 – кінцям робочої частини підсилення до і після її відшарування на величину Δa_{wr}.

Енергію γ_τ^*, необхідну для відшарування підсилення на одиницю довжини, вважаємо відомою характеристикою композиції. З іншого боку, зі зменшенням робочої довжини на величину Δa_{wr} напруження виконають роботу

$$\gamma_\tau^* \Delta a_{wr} = \int\limits_{a_{wr}-\Delta a_{wr}}^{a_{wr}-d-\Delta a_{wr}} \sigma_{xy}(x)\left[u(x, a_{wr}-\Delta a_{wr}, q+\Delta q) - u(x, a_{wr}, q)\right]dx\,, \tag{1.65}$$

де $d = a_{wr} - c_{wr}$. Знехтуємо у формулі (1.65) доданками порядку $(\Delta a_{wr})^2$ за схемою праці [17], тоді

$$\gamma_\tau^* \Delta a_{wr} = \int\limits_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} \sigma_{xy}(x)\left[u(x, a_{wr}-\Delta a_{wr}, q+\Delta q) - u(x, a_{wr}, q)\right]dx + O\left((\Delta a_{wr})^2\right),$$

$$\gamma_\tau^* = \tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} \int\limits_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr}, q)}{\partial x} dx - \tau_s^* a_{wr} \frac{du(a_{wr}, a_{wr}, q)}{da_{wr}}. \tag{1.66}$$

Використовуючи вирази для деформацій у смугах передруйнування (1.63), знайдемо, що

$$\frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G} \ln \frac{a_{wr}\sqrt{x^2 - c_{wr}^2} + x\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{a_{wr}\sqrt{x^2 - c_{wr}^2} - x\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}.$$

Звідси

$$\int x \frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} dx = -\frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G}\left[\left(x^2 - a_{wr}^2\right)\ln \frac{a_{wr}\sqrt{x^2 - c_{wr}^2} - x\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{a_{wr}\sqrt{x^2 - c_{wr}^2} + x\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}} - \right.$$
$$\left. - 2a_{wr}\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}\,\ln\left(\left(x + \sqrt{x^2 - c_{wr}^2}\right)\Big/ c_{wr}\right)\right]$$

та $$\int\limits_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} dx = -\frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{4\pi G} a_{wr}\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}\,\ln \frac{a_{wr} + \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2}}{c_{wr}}.$$

Враховуючи залежність між розмірами смуг передруйнування та навантаженням (1.62), останню формулу подамо так:

$$\int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} dx = -\frac{(\kappa+1)\tau_s^* H_2}{4\pi G} {a_{wr}}^2 \text{th} H_2 \,, \; H_2 = \frac{\pi q}{4\tau_s^*} \,.$$

Тоді перший доданок формули (1.66) після диференціювання за параметром a_{wr} матиме вигляд

$$\tau_s^* \frac{d}{da_{wr}} \int_{a_{wr}-d}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr})}{\partial x} dx =$$

$$= \frac{(\kappa+1)\tau_s^* a_{wr}}{4\pi G} \left[2H_2 \text{th} H_2 + a_{wr} \left(\text{th} H_2 + \frac{H_2}{\cosh^2 H_2} \right) \frac{dH_2}{da_{wr}} \right]. \tag{1.67}$$

Для запису другого доданку із формул (1.64), (1.62) знаходимо залежності між параметром навантаження та довжиною смуг. Після диференціювання за параметром a_{wr}

$$\frac{\partial u(a_{wr}, a_{wr})}{\partial a_{wr}} = \frac{(\kappa+1)\tau_s^*}{2\pi G} \left(\ln(\text{ch} H_2) + a_{wr} \text{th} H_2 \frac{dH_2}{da_{wr}} \right). \tag{1.68}$$

З урахуванням результатів (1.67), (1.68) формула (1.66) набуває вигляду

$$\gamma_\tau^* = \frac{(\kappa+1){\tau_s^*}^2 a_{wr}}{4\pi G} \left[2(H_2 \text{th} H_2 - \ln(\text{ch} H_2)) + a_{wr} \left(\frac{H_2}{\text{ch}^2 H_2} - \text{th} H_2 \right) \frac{dH_2}{da_{wr}} \right] \tag{1.69}$$

і описує залежність робочої довжини підсилення a_{wr} від навантаження q через параметр H_2. Для її числового аналізу зручно ввести безрозмірну робочу довжину підсилення

$$\lambda_{wr} = \frac{(\kappa+1)(\tau_s^*)^2}{2\pi G \gamma_\tau^*} a_{wr} \,. \tag{1.70}$$

Тоді

$$\frac{dH_2}{d\lambda_{wr}} = \frac{\lambda_{wr}}{a_{wr}} \frac{dH_2}{da_{wr}} \,. \tag{1.71}$$

Шукану залежність між навантаженням $H_2 = \pi q / (4\tau_s^*)$ та довжиною підсилення λ_{wr}, враховуючи результати (1.69)–(1.71), подамо у вигляді диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{dH_2}{d\lambda_{wr}} = \frac{2}{f(H_2, \lambda_{wr})} \,, \tag{1.72}$$

$$f\left(H_2,\lambda_{wr}\right)=\frac{1+\lambda_{wr}\left(\ln\left(\operatorname{ch}H_2\right)-H_2\operatorname{th}H_2\right)}{\lambda_{wr}^2\left(\dfrac{H_2}{\operatorname{ch}^2 H_2}-\operatorname{th}H_2\right)},$$

яке описує зміну робочої довжини підсилення від навантаження. Під час розв'язування конкретної задачі його необхідно доповнити початковою умовою, що задає навантаження за відомої початкової робочої довжини:

$$\lambda_{wr}\left(H_2=H_0\right)=\lambda_0,$$

де λ_0 – початкова робоча довжина підсилення за фіксованого навантаження $H_2=H_0$. Таким чином, розв'язок задачі зведено до задачі Коші для диференційного рівняння першого порядку відносно робочої довжини підсилення.

На рис. 1.28 подано інтегральні криві за неперервного навантаження, отримані з числового розв'язку задачі Коші методом Рунге–Кутта за різних початкових робочих довжин підсилення $\lambda_0=0{,}25$; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0 та фіксованого $H_0=0$. Відповідну цим параметрам лінію вибираємо за її значенням на осі λ_{wr}; пружні та міцнісні параметри композиції враховані через змінні λ_{wr} та H_2. Значення на осі абсцис (при цьому $H_0=0$) відповідають початковій безрозмірній довжині підсилення за відсутності навантаження.

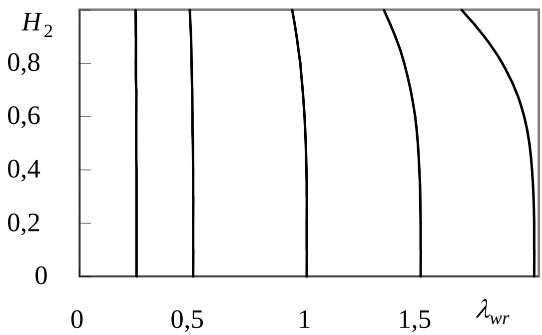


Рис. 1.28

Зі зростанням навантаження робоча довжина підсилення зменшується, наприклад, підсилення з робочою довжиною $\lambda_0=0{,}25$ за навантаження $H_2=0{,}7$ зменшується до $\lambda_{wr}=0{,}249$, тобто на 0,4% від початкової; відповідно підсилення робочої довжини $\lambda_0=0{,}5$ – до $\lambda_{wr}=0{,}4958$, тобто на 0,84%; підсилення робочої довжини $\lambda_0=1{,}5$ – до $\lambda_{wr}=1{,}4568$, тобто на 2,88% за того ж рівня навантаження. Що менша робоча довжина підсилення, то більше навантаження необхідне для його відшарування.

1.5.3. Циклічне навантаження

Диференційне рівняння (1.72) використаємо для розв'язання задачі про відшарування підсилення за циклічного навантаження. Приймаємо, що відшарування відбувається на кожному періоді навантаження, а при розвантаженні робоча довжина підсилення не змінюється. Співвідношення (1.72) описує відшарування підсилення за один цикл, тому, інтегруючи його від мінімального $H_{2\min}$ до максимального $H_{2\max}$ навантаження за цикл і приймаючи величину λ_{wr} сталою впродовж одного циклу, отримуємо швидкість відшарування у вигляді

$$\frac{d\lambda_{wr}}{dn} = \frac{1}{2}\int\limits_{H_{2\min}}^{H_{2\max}} \frac{dH_2}{f\left(H_2, \lambda_{wr}\right)} \equiv F_2\left(H_{2\max}, H_{2\min}, \lambda_{wr}\right),$$

де n – кількість циклів навантаження. Звідси, проінтегрувавши, знаходимо залежність між кількістю циклів навантаження та значенням робочої довжини підсилення:

$$n = \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_{wr}}{F_2\left(H_{2\max}, H_{2\min}, \lambda_{wr}\right)}, \tag{1.73}$$

де λ_0, λ_1 – початкове та кінцеве значення параметрів довжини робочої частини підсилення.

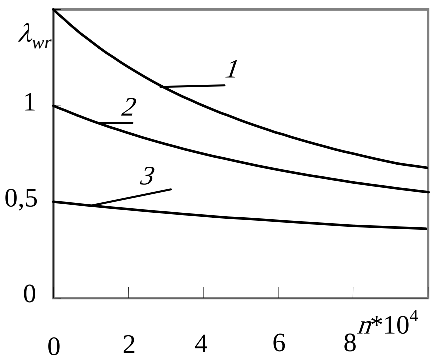


Рис. 1.29

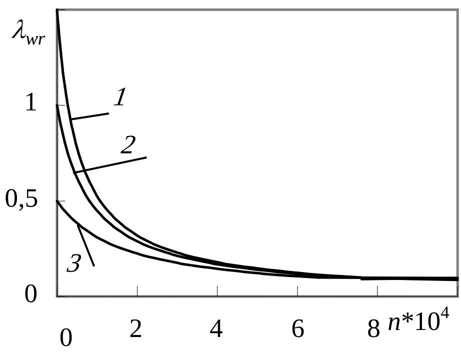


Рис. 1.30

На рис. 1.29, 1.30 подані результати розрахунків за формулою (1.73) робочої довжини підсилення залежно від кількості циклів навантаження для трьох різних їх початкових довжин: для ліній *1* початкова робоча довжина підсилення $\lambda_{wr} = 1{,}5$; для ліній *2* – 1,0; для *3* – 0,5. Мінімальне та максимальне значення навантаження за цикл: на рис. 1.29 прийнято на рівні $H_{2\min} = 0$,

$H_{2\max} = 0{,}1$; на рис. 1.30 – $H_{2\min} = 0{,}1$, $H_{2\max} = 0{,}2$. Початкова довжина підсилення відповідає на рисунку значенню λ_{wr} при n=0. Зі зменшенням початкової робочої довжини підсилення швидкість відшарування його також знижується.

На рис. 1.31 подано швидкості відшарування підсилення залежно від її робочої довжини для різних рівнів навантаження за цикл: для лінії *1* – $H_{2\min} = 0$, $H_{2\max} = 0{,}1$; для лінії *2* – $H_{2\min} = 0{,}1$, $H_{2\max} = 0{,}2$. Швидкість відшарування суттєво залежить від максимального навантаження за цикл $H_{2\max}$, на рис. 1.32 подано її значення за фіксованого $H_{2\min} = 0$. Залежність від мінімального навантаження за цикл порівняно неістотна і тут не наведена.

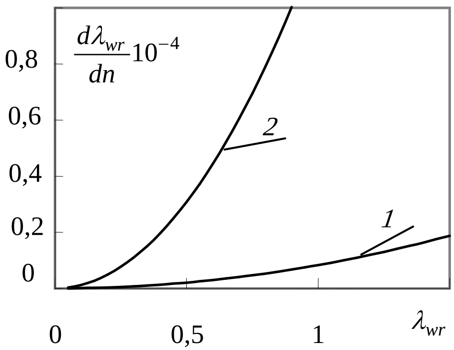


Рис. 1.31

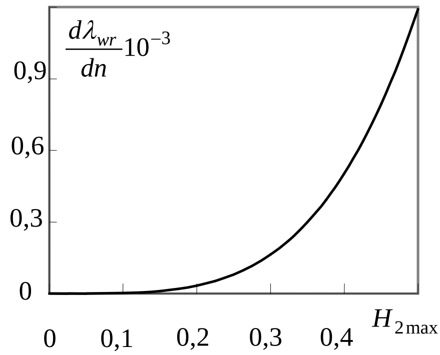


Рис. 1.32

Зі зменшенням початкової робочої довжини підсилення швидкість його відшарування також знижується. Для заданого фіксованого навантаження за цикл та наперед відомої кількості циклів завжди можна підібрати довжину підкріплювального елемента, щоб його відшарування не перевищувало заданого наперед значення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
2. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 412 с.
3. *Кудишин Ю.И.* Задача о подкреплении полуплоскости ребром с учетом пластических свойств материала // Строит. механика и расчет сооружений. – 1982. – № 2. – С. 25–28.
4. *Кундрат М.М.* Руйнування підкріплення при циклічному навантаженні в умовах плоскої задачі // Механіка і фізика руйнування будівельних матері-

алів та конструкцій. – Львів: Каменяр, 2000. – Вип. 4. – С. 454–462.

5. *Кундрат М.М.* Пружно-пластична рівновага ортотропної півплощини з накладкою // Машинознавство. – 2002. – № 1. – С. 31–35.
6. *Кундрат М.М., Кундрат А.М., Заблотська Ю.В.* Відшарування гнучкого нерозтягливого підсилення вільного краю півбезмежної пластини // Вісник Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2019. – № 1. – С. 94–97.
7. *Кундрат М., Сулим Г.* Термопружна рівновага півбезмежної пластини з нерозтягливою гнучкою накладкою в модельному формулюванні // Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С.73–83.
8. *Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр–7, 2017. – 168 с.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
10. *Острик В.І.* Контактна механіка. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2015. – 560 с.
11. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
12. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
13. *Прусов И.А.* Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во БГУ, 1972. – 200 с.
14. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: ДВЦ НТШ, 2007. – 716 с.
15. *Сулим Г.Т., Кундрат М.М.* Розрахунок міцності періодичної системи накладок для півплощини з урахуванням зон передруйнування // Тези доп. Сьомого україн.-польськ. наук. симп. "Актуальні задачі механіки неоднорідних структур" (Львів, 5–6 вересня 2007 р.). – Львів: ЛДУ, 2007. – С. 24–25.
16. *Kundrat N.M.* Periodic plane problem of bands of plasticity around collinear inclusions // Materials Science. – 1984. – **20**, No. 1. – P. 43–45.
17. *Kundrat M.M.* Working length of a high-modulus linear inclusion under the action of concentrated cyclic forces within the framework of plane problem // Materials Science. – 2016. – **52**, No. 1. – P. 72–82.
18. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // Ingenieur – Archiv. – 1932. – **3**, No. 2. – S. 123–129.
19. *Sulym H.T., Kundrat M.M.* Limiting equilibrium and fracture in an orthotropic body containing a thin rigid inclusion // Materials Science. – 2006. – **42**, No. 2. – P. 220–232.

РОЗДІЛ 2

ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ПЛОСКІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ЗА ОДНОСТОРОННЬОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРУЖНИХ ТІЛ

Н.А. Гук, Н.Л. Козакова

У цьому розділі розглянуто плоску контактну задачу теорії пружності для двошарової системи, яка знаходиться в умовах нормально розподіленого навантаження, за наявності односторонніх зв'язків та тертя на лінії контакту шарів. Задачу сформульовано з урахуванням геометричної та конструктивної нелінійності у вигляді крайової задачі з додатковими умовами у вигляді нерівностей, що описують явища проковзування, відриву (відшарування) та зчеплення шарів на лінії контакту. Задачу ідентифікації додаткового силового впливу для запобігання явища відшарування шарів для двошарової системи сформульовано як обернену задачу. За відомими характеристиками напружено-деформованого стану визначено місцерозташування та параметри додаткового зовнішнього навантаження в зоні контакту. Наведено числові методи та алгоритми розв'язання задач.

2.1. Моделювання контакту тіл за наявності односторонніх зв'язків та тертя з використанням варіаційних принципів

Задачам визначення контактної взаємодії між деформованими тілами або частинами одного тіла зі заздалегідь невідомою зоною контакту, що змінюється під час навантаження, присвячено чимало праць [4–11].

Під час моделювання односторонніх зв'язків умови, що накладаються на переміщення і зусилля в зоні контакту, подають у вигляді нерівностей. Задачі такого роду характеризуються значними змінами властивостей системи зі зміною стану контакту під час навантаження і, по суті, є конструктивно нелінійними. Конфігурація зон контакту або відшарування (а з урахуванням тертя також і ділянок проковзування та зчеплення) заздалегідь невідома і має бути визначена під час розв'язування задачі.

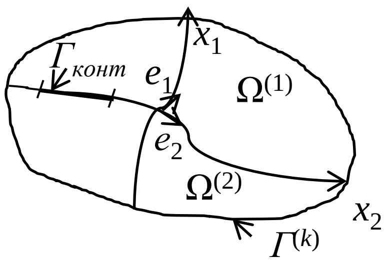


Рис. 2.1. Схема контактної взаємодії пружних криволінійних шарів

Розглянемо систему (рис. 2.1), що займає плоску область $\Omega = \bigcup_{k=1}^{2} \Omega^{(k)}$, $\Omega^{(k)} = \{x = (x_1, x_2),\ x \in R^2\ \}$ з межами $\Gamma^{(k)}\ (k = 1, 2)$, де x_1 і x_2 – координати точки у системі ортогональних криволінійних координат.

Як геометричні приймаємо нелінійні співвідношення, які зв'язують деформації з переміщеннями та побудовані в припущенні малості деформацій та кутів повороту проти одиниці. Тоді формули для компонентів тензора деформацій $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2$ у довільній криволінійній ортогональній системі координат набувають вигляду [8]

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = e_{11}^{(k)} + \tfrac{1}{2}\left(\theta^{(k)}\right)^2,\ \varepsilon_{22}^{(k)} = e_{22}^{(k)} + \tfrac{1}{2}\left(\theta^{(k)}\right)^2,\ \varepsilon_{12}^{(k)} = e_{12}^{(k)}, \tag{2.1}$$

$$2\theta^{(k)} = \frac{1}{H_1^{(k)} H_2^{(k)}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2^{(k)} u_2^{(k)}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1^{(k)} u_1^{(k)})\right);$$

$$e_{11}^{(k)} = \frac{1}{H_1^{(k)}}\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1^{(k)} H_2^{(k)}}\frac{\partial H_1^{(k)}}{\partial x_2} u_2^{(k)};$$

$$e_{22}^{(k)} = \frac{1}{H_2^{(k)}}\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1^{(k)} H_2^{(k)}}\frac{\partial H_2^{(k)}}{\partial x_1} u_1^{(k)};$$

$$e_{12}^{(k)} = \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2^{(k)}}{H_2^{(k)}}\right) + \frac{H_1^{(k)}}{H_2^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1^{(k)}}{H_1^{(k)}}\right),$$

де $u^{(k)} = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}\}$ – вектор переміщень *k*-го шару ($k = 1, 2$); $H_1^{(k)}$, $H_2^{(k)}$ – параметри Ляме.

Як фізичні приймаємо співвідношення закону Гука для *k*-го шару:

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}}\left(\varepsilon_{11}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1 - 2\nu^{(k)}}\vartheta^{(k)}\right),$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{1 + \nu^{(k)}}\left(\varepsilon_{22}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1 - 2\nu^{(k)}}\vartheta^{(k)}\right),$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + \nu^{(k)})}\varepsilon_{12}^{(k)},\ \ \vartheta^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)}, \tag{2.2}$$

де $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненти тензора напружень; $E^{(k)}$ і $\nu^{(k)}$ – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона *k*-го шару відповідно.

У разі використання ортогональних криволінійних координат рівняння рівноваги деформованої системи замінюється такими скалярними рівняннями:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2^{(k)}(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{12}^{(k)}\theta^{(k)})) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(H_1^{(k)}(\sigma_{21}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)}\theta^{(k)})\Big) +$$

$$+\frac{\partial H_1^{(k)}}{\partial x_2}(\sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{11}^{(k)}\theta^{(k)}) - \frac{\partial H_2^{(k)}}{\partial x_1}(\sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)}\theta^{(k)}) + H_1^{(k)}H_2^{(k)}F_1^{*(k)} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(H_2^{(k)}(\sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{11}^{(k)}\theta^{(k)})) + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1^{(k)}(\sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)}\theta^{(k)})) +$$

$$+\frac{\partial H_2^{(k)}}{\partial x_1}(\sigma_{21}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)}\theta^{(k)}) - \frac{\partial H_1^{(k)}}{\partial x_2}(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{12}^{(k)}\theta^{(k)}) + H_1^{(k)}H_2^{(k)}F_2^{*(k)} = 0, \quad (2.3)$$

де $F_1^{*(k)}$, $F_2^{*(k)}$ – складові проекції питомої об'ємної сили *k*-го шару на відповідні координатні осі.

Нехай на межі області Ω, яку позначимо Γ, існують ділянки $\Gamma^{(1)}$ та $\Gamma^{(2)}$, на яких задані зовнішні сили (або переміщення), та лінія контакту шарів $\Gamma_{конт}$.

Сформулюємо крайові умови на ділянках межі $\Gamma^{(k)}$ області:

– статичні:

$$\sigma_{11}^{(k)}\cos(n, e_1) + \sigma_{21}^{(k)}\cos(n, e_2) = f_1^{*(k)},$$

$$\sigma_{12}^{(k)}\cos(n, e_1) + \sigma_{22}^{(k)}\cos(n, e_2) = f_2^{*(k)}, \quad (2.4)$$

– кінематичні:

$$u_1^{(k)} = u_1^{*(k)}, \; u_2^{(k)} = u_2^{*(k)}, \quad (2.5)$$

де $f_1^{*(k)}$, $f_2^{*(k)}$ та $u_1^{*(k)}(x)$, $u_2^{*(k)}(x)$ – значення проекцій зовнішньої сили та переміщень, які задано на межі $\Gamma^{(k)}$, відповідно; n – зовнішня нормаль до поверхні; e_1, e_2 – одиничні орти.

На лінії контакту шарів $\Gamma_{конт}$, де можуть виникати односторонні зв'язки, передбачимо існування ділянок $\Gamma_З, \Gamma_П, \Gamma_В$, що відповідають зонам зчеплення, проковзування і відриву шарів:

$$\Gamma_З \cup \Gamma_П \cup \Gamma_В = \Gamma_{конт}, \; \Gamma_З \cap \Gamma_П \cap \Gamma_В = \varnothing.$$

У зоні зчеплення виконуються умови

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)},\ \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)},\ \ \sigma_{11}^{(k)} \le 0,\ \ \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| < K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|,\ \ k = 1,2,$$

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)},\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)},\ \ \forall x_2 \in \Gamma_З, \tag{2.6}$$

у зоні проковзування

$$\left|\sigma_{12}^{(k)}\right| = K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|,\ \ \sigma_{12}^{(k)} / \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| = -\Delta u_2 / \left|\Delta u_2\right|,\ \ k = 1,2,$$

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)},\ \ \forall x_2 \in \Gamma_П\ ; \tag{2.7}$$

у зоні відриву

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0,\ \sigma_{12}^{(k)} = 0,\ k = 1,2,\ \ \forall x_2 \in \Gamma_В, \tag{2.8}$$

де $\Delta u_2 = (u_2{}^{(1)}(x_2) - u_2{}^{(2)}(x_2))$ – різниця дотичних переміщень шарів у точках $\Gamma_{конт}$; K – коефіцієнт тертя на лінії контакту шарів.

Функціонал повної енергії системи, яку розглядаємо, має вигляд [1]

$$J_1(u,\varepsilon,\sigma) = \sum_{k=1}^{2}\Bigg[\iint\limits_{\Omega^{(k)}} \frac{1}{2}\Big((\sigma_{11}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)} + \sigma_{12}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)}\varepsilon_{21}^{(k)}) -$$

$$-(F_1^{*(k)}u_1^{(k)} + F_2^{*(k)}u_2^{(k)})\Big)d\Omega^{(k)} - \int\limits_{\Gamma^{(k)}}\left(f_1^{*(k)}u_1^{(k)} + f_2^{*(k)}u_2^{(k)}\right)d\Gamma\Bigg]. \tag{2.9}$$

Зі співвідношень (2.2) та рівності мішаних компонент тензора деформацій отримаємо

$$J_2(u,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{2}\Bigg[\iint\limits_{\Omega^{(k)}} \frac{1}{2}\Bigg(\Bigg\{\frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}}\left(\varepsilon_{11}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}}(\varepsilon_{11}^{(k)}+\varepsilon_{22}^{(k)})\right)\varepsilon_{11}^{(k)} +$$

$$+\frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}}\left(\varepsilon_{22}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}}(\varepsilon_{11}^{(k)}+\varepsilon_{22}^{(k)})\right)\varepsilon_{22}^{(k)} + \frac{E^{(k)}}{(1+\nu^{(k)})}(\varepsilon_{12}^{(k)})^2\Bigg\} -$$

$$-(F_1^{*(k)}u_1^{(k)} + F_2^{*(k)}u_2^{(k)})\Bigg)d\Omega^{(k)} - \int\limits_{\Gamma^{(k)}}\left(f_1^{*(k)}u_1^{(k)} + f_2^{*(k)}u_2^{(k)}\right)d\Gamma\Bigg] \tag{2.10}$$

Сформулюємо варіаційну задачу. Необхідно знайти такі функції $B^{(k)}(x) = \left\{\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(x),\ \tilde{u}_i^{(k)}(x),\ x = (x_1, x_2)\right\}$, що

$$J_2(\tilde{u}_i^{(k)}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}) = \min_{u_i^{(k)} \in \bar{U},\, \varepsilon_{ij}^{(k)} \in \bar{E}} J_2(u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}), \tag{2.11}$$

де множини $\bar{U}$ та $\bar{E}$ введено у такий спосіб:

$$\bar{U} = \Big\{ u_i^{(k)}, u_i^{(k)} \in H_2^{(1)}(\Omega^{(k)}), i,k = 1,2,\ \ \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)},\ \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)},$$

$$\sigma_{11}^{(k)} \le 0,\ \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| < K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|,$$

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)},\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \text{ для } \forall x_2 \in \Gamma_З;$$

$$\left|\sigma_{12}^{(k)}\right| = K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|,\ \sigma_{12}^{(k)} / \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| = -\Delta u_2 / \left|\Delta u_2\right|,\ \ \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} \text{ для } \forall x_2 \in \Gamma_П;$$

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0,\ \sigma_{12}^{(k)} = 0,\ k = 1,2, \text{ для } \forall x_2 \in \Gamma_В \Big\}; \tag{2.12}$$

$$\bar{E} = \Big\{ \varepsilon_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)} \in W_2^{(1)}(\Omega^{(k)}),\ i,j,k = 1,2,$$

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{1}{H_1^{(k)}}\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1^{(k)}H_2^{(k)}}\frac{\partial H_1^{(k)}}{\partial x_2}u_2^{(k)} + \tfrac{1}{2}\left(\theta^{(k)}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{22}^{(k)} = \frac{1}{H_2^{(k)}}\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1^{(k)}H_2^{(k)}}\frac{\partial H_2^{(k)}}{\partial x_1}u_1^{(k)} + \tfrac{1}{2}\left(\theta^{(k)}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{12}^{(k)} = \frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2^{(k)}}{H_2^{(k)}}\right) + \frac{H_1^{(k)}}{H_2^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1^{(k)}}{H_1^{(k)}}\right)\Big\}. \tag{2.13}$$

Для побудови повного функціонала шляхом приєднання додаткових умов (2.13) скористаємось методом множників Лагранжа [1]:

$$J_3(u,\varepsilon,\sigma,\lambda,\mu) = \sum_{k=1}^{2}\Bigg[\iint_{\Omega^{(k)}} \frac{1}{2}\Bigg(\Big((\sigma_{11}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)} + \sigma_{12}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)}\varepsilon_{21}^{(k)}) -$$

$$-(F_1^{*(k)}u_1^{(k)} + F_2^{*(k)}u_2^{(k)})\Big) +$$

$$+\lambda_1^{(k)}\left(\varepsilon_{11}^{(k)} - \left(\frac{1}{H_1^{(k)}}\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1^{(k)}H_2^{(k)}}\frac{\partial H_1^{(k)}}{\partial x_2}u_2^{(k)} \right) - \tfrac{1}{2}\theta^2 \right) +$$

$$+\lambda_2^{(k)}\left(\varepsilon_{22}^{(k)} - \left(\frac{1}{H_2^{(k)}}\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1^{(k)}H_2^{(k)}}\frac{\partial H_2^{(k)}}{\partial x_1}u_1^{(k)} \right) - \tfrac{1}{2}\theta^2 \right) +$$

$$+\lambda_3^{(k)}\left(\varepsilon_{12}^{(k)} - \left(\frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2^{(k)}}{H_2^{(k)}}\right) + \frac{H_1^{(k)}}{H_2^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1^{(k)}}{H_1^{(k)}}\right) \right) \right) \Bigg) d\Omega^{(k)} -$$

$$- \int_{\Gamma^{(k)}} (\mu_1^{(k)} \left(u_1^{(k)} - u_1^{*(k)} \right) + \mu_2^{(k)} \left(u_2^{(k)} - u_2^{*(k)} \right)) d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma^{(k)}} \left(f_1^{*(k)} u_1^{(k)} + f_2^{*(k)} u_2^{(k)} \right) d\Gamma \Bigg], \qquad (2.14)$$

де $\lambda_i^{(k)}$, $\mu_j^{(k)}$ – множники Лагранжа, $k = 1,2$, $i = \overline{1,3}$, $j = 1,2$.

З урахуванням співвідношень закону Гука (2.2) маємо:

$$J_4(u,\varepsilon,\lambda,\mu) = \sum_{k=1}^{2} \Bigg[\iint_{\Omega^{(k)}} \frac{1}{2} \Bigg(\Bigg\{ \frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}} \left(\varepsilon_{11}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}} (\varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)}) \right) \varepsilon_{11}^{(k)} +$$

$$+ \frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}} \left(\varepsilon_{22}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}} (\varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)}) \right) \varepsilon_{22}^{(k)} + \frac{E^{(k)}}{(1+\nu^{(k)})} (\varepsilon_{12}^{(k)})^2 \Bigg\} -$$

$$-(F_1^{*(k)} u_1^{(k)} + F_2^{*(k)} u_2^{(k)}) \Bigg) +$$

$$+ \lambda_1^{(k)} \left(\varepsilon_{11}^{(k)} - \left(\frac{1}{H_1^{(k)}} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1^{(k)} H_2^{(k)}} \frac{\partial H_1^{(k)}}{\partial x_2} u_2^{(k)} \right) - \tfrac{1}{2} \theta^2 \right) +$$

$$+ \lambda_2^{(k)} \left(\varepsilon_{22}^{(k)} - \left(\frac{1}{H_2^{(k)}} \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1^{(k)} H_2^{(k)}} \frac{\partial H_2^{(k)}}{\partial x_1} u_1^{(k)} \right) - \tfrac{1}{2} \theta^2 \right) +$$

$$+ \lambda_3^{(k)} \left(\varepsilon_{12}^{(k)} - \left(\frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_2^{(k)}}{H_2^{(k)}} \right) + \frac{H_1^{(k)}}{H_2^{(k)}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_1^{(k)}}{H_1^{(k)}} \right) \right) \right) d\Omega^{(k)} -$$

$$- \int_{\Gamma^{(k)}} (\mu_1^{(k)} \left(u_1^{(k)} - u_1^{*(k)} \right) + \mu_2^{(k)} \left(u_2^{(k)} - u_2^{*(k)} \right)) d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma^{(k)}} \left(f_1^{*(k)} u_1^{(k)} + f_2^{*(k)} u_2^{(k)} \right) d\Gamma \Bigg]. \qquad (2.15)$$

Тоді $\tilde{T}_1 = \left\{ \tilde{u}_i^{(k)}, \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)} \right\}$, $\tilde{T}_2 = \left\{ \tilde{\lambda}_l^{(k)}, \tilde{\mu}_i^{(k)} \right\}$, $\tilde{T} = \left\{ \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \right\}^T$, $i, j, k = 1,2$, $l = \overline{1,3}$, можна визначити з умови

$$\tilde{T} = \arg \min_{\overline{T}_1} \max_{\overline{T}_2} J_4(\tilde{T}), \qquad (2.16)$$

де множини $\overline{T}_1 = \overline{U} \times \overline{E}$; $\overline{T}_2 = \overline{\Lambda} \times \overline{\mu}$;, $\overline{\Lambda} = \left\{ \lambda^{(k)}, \lambda^{(k)} \in L_2(\Omega) \right\}$;

$\overline{\mu} = \left\{ \mu^{(k)}, \mu^{(k)} \in L_2(\Omega) \right\}$; $\lambda^{(k)} = \left\{ \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \lambda_3^{(k)} \right\}$; $\mu^{(k)} = \left\{ \mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)} \right\}$, $k = 1,2$.

З умов стаціонарності повного функціонала $\dfrac{\partial J_4}{\partial \varepsilon_{ij}^{(k)}} = 0$, $i, j, k = 1,2$, маємо:

$$\lambda_1^{(k)} = -\frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}} \left(\varepsilon_{11}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}} \vartheta^{(k)} \right),$$

$$\lambda_2^{(k)} = -\frac{E^{(k)}}{1+\nu^{(k)}} \left(\varepsilon_{22}^{(k)} + \frac{\nu^{(k)}}{1-2\nu^{(k)}} \vartheta^{(k)} \right),$$

$$\lambda_3^{(k)} = -\frac{E^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})} \varepsilon_{12}^{(k)}, \quad \vartheta^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)} . \tag{2.17}$$

Згідно зі співвідношеннями закону Гука (2.2) та рівностями (2.17) отримаємо:

$$\lambda_1^{(k)} = -\sigma_{11}^{(k)}(\varepsilon^{(k)}),\ \lambda_2^{(k)} = -\sigma_{22}^{(k)}(\varepsilon^{(k)}),\ \lambda_3^{(k)} = -\sigma_{12}^{(k)}(\varepsilon^{(k)}), \tag{2.18}$$

Із умов стаціонарності повного функціонала $\partial J_4 / \partial u_i^{(k)} = 0$, $i, k = 1,2$, та враховуючи рівності (2.18) отримаємо рівняння рівноваги в ортогональних криволінійних координатах (2.3), а використовуючи формулу Гріна – статичні крайові умови (2.4) на ділянках $\Gamma^{(k)}$.

Із умов стаціонарності повного функціонала $\partial J_4 / \partial \lambda_i^{(k)} = 0$, $i = 1,2$, одержимо формули для компонентів деформацій в ортогональній системі координат (2.1).

Із умов стаціонарності повного функціонала $\partial J_4 / \partial \mu_i^{(k)} = 0$, $i = 1,2$, дістанемо кінематичні крайові умови (2.5) на ділянках $\Gamma^{(k)}$.

Після вилучення множників Лагранжа (з урахуванням співвідношень (2.18)) отримаємо одну із форм функціонала Рейснера [1]:

$$J_5 = \sum_{k=1}^{2} \Bigg[\iint_{\Omega^{(k)}} \Bigg(-\frac{1}{2}(\sigma_{11}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)} + 2\sigma_{12}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)}) -$$

$$-(F_1^{*(k)} u_1^{(k)} + F_2^{*(k)} u_2^{(k)}) +$$

$$+\sigma_{11}^{(k)} \left(\left(\frac{1}{H_1^{(k)}} \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{H_1^{(k)} H_2^{(k)}} \frac{\partial H_1^{(k)}}{\partial x_2} u_2^{(k)} \right) + \tfrac{1}{2}\theta^2 \right) +$$

$$+\sigma_{22}^{(k)}\left(\left(\frac{1}{H_2^{(k)}}\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2}+\frac{1}{H_1^{(k)}H_2^{(k)}}\frac{\partial H_2^{(k)}}{\partial x_1}u_1^{(k)}\right)+\tfrac{1}{2}\theta^2\right)+$$

$$\left.+\sigma_{12}^{(k)}\left(\frac{H_2^{(k)}}{H_1^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2^{(k)}}{H_2^{(k)}}\right)+\frac{H_1^{(k)}}{H_2^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1^{(k)}}{H_1^{(k)}}\right)\right)\right)d\Omega^{(k)}-$$

$$-\int_{\Gamma^{(k)}}(\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}\left(u_1^{(k)}-u_1^{*(k)}\right)+\tilde{\sigma}_{12}^{(k)}\left(u_2^{(k)}-u_2^{*(k)}\right))\,d\Gamma-$$

$$-\int_{\Gamma^{(k)}}\left(f_1^{*(k)}u_1^{(k)}+f_2^{*(k)}u_2^{(k)}\right)d\Gamma. \qquad (2.19)$$

де $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$, $i,j=1,2$ – компоненти тензора напружень на межі області.

Функціонал, що відповідає вихідній крайовій задачі з додатковими умовами у вигляді нерівностей (2.6) – (2.8), на відміну від класичного, не є коерцитивним, тому пошук сідлової точки за двоїстими змінними не обов'язково є збіжним. Для регуляризації задачі використовуватимемо модифікований функціонал Лагранжа, який отримаємо із функціонала (2.19) у припущенні, що переміщення $\tilde{u}^{*(k)}=\left\{\tilde{u}_1^{*(k)},\tilde{u}_2^{*(k)}\right\}$, $k=\overline{1,2}$ на лінії контакту шарів задані.

Для визначення невідомих ділянок $\Gamma_З,\Gamma_П,\Gamma_В$ на лінії контакту шарів введемо характеристичні функції γ_m, $m=1,2$:

$$\gamma_1\left(x_2\right)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \left|\sigma_{12}^{(k)}\right|\geq K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|, \quad x_2\in\Gamma_П,\\ 0 & \text{при} \quad \left|\sigma_{12}^{(k)}\right|< K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|, \quad x_2\in\Gamma_З,\end{cases}$$

$$\gamma_2\left(x_2\right)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \sigma_{11}^{(k)}\geq 0, \quad x_2\in\Gamma_В,\\ 0 & \text{при} \quad \sigma_{11}^{(k)}< 0, \quad x_2\notin\Gamma_В.\end{cases} \qquad (2.20)$$

Крайовій задачі з додатковими умовами у вигляді нерівностей відповідає варіаційне формулювання: необхідно знайти такий вектор $W=\left\{u_i^{(k)},\,\varepsilon_{ij}^{(k)},\,\tilde{u}_i^{*(k)},\,\gamma_m\right\}$, $k=1,2,$ що

$$W=\arg\min_{W\in\overline{W}} J_6(W)\,, \qquad (2.21)$$

де

$$J_6 = \sum_{k=1}^{2} \left[\iint_{\Omega^{(k)}} \left(-\frac{1}{2}(\sigma_{11}^{(k)}\varepsilon_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)} + 2\sigma_{12}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)}) - \right. \right.$$

$$- (F_1^{*(k)}u_1^{(k)} + F_2^{*(k)}u_2^{(k)}) -$$

$$- \int_{\Gamma^{(k)}} (\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}\left(u_1^{(k)} - u_1^{*(k)}\right) + \tilde{\sigma}_{12}^{(k)}\left(u_2^{(k)} - u_2^{*(k)}\right))\,d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma^{(k)}} \left(f_1^{*(k)}u_1^{(k)} + f_2^{*(k)}u_2^{(k)} \right) d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma_{конт}} (\gamma_1 K\tilde{\sigma}_{11}\left(u_2^{(1)} - u_2^{(2)}\right) + (1-\gamma_1)\tilde{\sigma}_{12}(u_2^{(1)} - u_2^{(2)}))d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma_{конт}} (\gamma_2\,\tilde{\sigma}_{11}^{(k)}(u_1^{(k)} - \tilde{u}_1^{*(k)}) + (1-\gamma_2)\tilde{\sigma}_{11}(u_1^{(1)} - u_1^{(2)}))d\Gamma -$$

$$\left. - \int_{\Gamma_B} \tilde{\sigma}_{12}^{(k)}(u_2^{(k)} - \tilde{u}_2^{*(k)})\,d\Gamma \right]. \tag{2.22}$$

Тут $\overline{W} = \overline{U} \times \overline{E} \times \overline{\tilde{U}}^* \times \overline{\gamma}_1 \times \overline{\gamma}_2$.

Області визначення невідомих задачі $\overline{U}, \overline{E}, \overline{\tilde{U}}^*, \overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2$ знайдемо так:

$$\overline{\gamma}_1 = \Big\{\gamma_1(x_2),\ \gamma_1(x_2) = (\gamma_{11}(x_2), \gamma_{12}(x_2), ..., \gamma_{1Q_1}(x_2)),$$

$$\gamma_{1i}(x_2) \cdot \gamma_{1j}(x_2) = 0,\ i \neq j, i, j = \overline{1, Q_1},$$

$$\gamma_{1i}\left(x_2\right) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| \geq K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|, \quad x_2 \in \Gamma_\Pi, \\ 0 & \text{при} \quad \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| < K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|, \quad x_2 \in \Gamma_З, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\overline{\gamma}_2 = \Big\{\gamma_2\left(x_2\right),\ \gamma_2(x_2) = (\gamma_{21}(x_2), \gamma_{22}(x_2), ..., \gamma_{2Q_2}(x_2)),$$

$$\gamma_{2i}(x_2) \cdot \gamma_{2j}(x_2) = 0,\ i \neq j,\ i, j = \overline{1, Q_2},$$

$$\gamma_{2i}\left(x_2\right) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \sigma_{11}^{(k)} \geq 0, \quad x_2 \in \Gamma_O, \\ 0 & \text{при} \quad \sigma_{11}^{(k)} < 0, \quad x_2 \notin \Gamma_O, \end{cases} \tag{2.24}$$

де Q_1, Q_2 – числа, що позначають кількість варіантів вигляду функцій

$\gamma_1\left(x_2\right), \gamma_2\left(x_2\right)$; $\bar{\tilde{U}}^* = \left\{\tilde{u}_1^{*(k)}(x_2),\ \tilde{u}_2^{*(k)}(x_2) \in H_2^{(1/2)}(\Gamma_{конт}),\ x_2 \in \Gamma_{конт}\right\}$;

$\bar{U}$, $\bar{E}$ – множини з (2.12), (2.13).

Розглянемо також таку задачу: необхідно відзнайти такий вектор W, що

$$W = \arg\min_{W \in \bar{W}'} J_6'(W), \tag{2.25}$$

де функціонал J_6' отримуємо із J_6 заміною функцій γ_1, γ_2 на неперервні функції $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$; $\bar{W}' = \bar{U} \times \bar{E} \times \bar{\tilde{U}}^* \times \bar{\tilde{\gamma}}_1 \times \bar{\tilde{\gamma}}_2$, а множини $\bar{\tilde{\gamma}}_1, \bar{\tilde{\gamma}}_2$ визначимо як

$$\begin{aligned} &\bar{\tilde{\gamma}}_1 = \Big\{\tilde{\gamma}_1(x_2),\ \tilde{\gamma}_1(x_2) = (\tilde{\gamma}_{11}(x_2), \tilde{\gamma}_{12}(x_2), ..., \tilde{\gamma}_{1Q_1}(x_2)), \\ &0 \le \tilde{\gamma}_1(x_2) \le 1,\ \forall x_2 \in \Gamma_{конт},\ i = \overline{1, Q_1}\Big\}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\tilde{\gamma}}_2 = \Big\{\tilde{\gamma}_2(x_2),\ \tilde{\gamma}_2(x_2) = (\tilde{\gamma}_{21}(x_2), \tilde{\gamma}_{22}(x_2), ..., \tilde{\gamma}_{2Q_2}(x_2)), \\ &0 \le \tilde{\gamma}_2(x_2) \le 1,\ \forall x_2 \in \Gamma_{конт},\ i = \overline{1, Q_2}\Big\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Пару (W_1^*, W_2^*) називатимемо сідловою точкою функціонала J_6', де $W_1 = \left\{u^{(k)}, \varepsilon^{(k)}, \gamma_1, \gamma_2\right\}$, $W_2 = \left\{\tilde{u}^{*(k)}\right\}$, $k = 1, 2$, якщо виконується нерівність

$$J_6'(W_1^*, W_2) \le J_6'(W_1^*, W_2^*) \le J_6'(W_1, W_2^*) \tag{2.28}$$

для всіх вектор-функцій $W_1 \in \bar{U} \times \bar{E} \times \bar{\tilde{\gamma}}_1 \times \bar{\tilde{\gamma}}_2$, $W_2 \in \bar{\tilde{U}}^*$.

На підставі результатів, які отримано в праці [3], враховуючи слабку неперервність та коерцитивність функціонала J_6', для задачі (2.25) можна стверджувати таке: якщо пара (W_1^*, W_2^*) є сідловою точкою функціонала J_6', тоді вектор-функція (W_1^*, W_2^*) є розв'язком задачі (2.21). При цьому оптимальний розв'язок можна подати так:

$$\gamma_1^*\left(x_2\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad (\sigma_{12}^{(k)} - K\sigma_{11}^{(k)})(u_2^{(1)} - u_2^{(2)}) \ge 0,\ x_2 \in \Gamma_П, \\ 0, & \text{якщо} \quad (\sigma_{12}^{(k)} - K\sigma_{11}^{(k)})(u_2^{(1)} - u_2^{(2)}) < 0,\ x_2 \in \Gamma_З, \end{cases}$$

$$\gamma_2^*\left(x_2\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad -\sigma_{11}^{(k)}(\tilde{u}_1^{*(1)} - u_1^{(2)}) \ge 0, \quad x_2 \in \Gamma_B, \\ 0, & \text{якщо} \quad -\sigma_{11}^{(k)}(\tilde{u}_1^{*(1)} - u_1^{(2)}) < 0, \quad x_2 \notin \Gamma_B. \end{cases} \tag{2.29}$$

Оскільки в зоні відриву $\tilde{u}_1^{*(1)} - u_1^{(2)} > 0$, $\sigma_{11}^{(k)} = 0$, а $\sigma_{12}^{(k)}$ завжди асиметричне, із умов (2.29) отримаємо умови

$$\gamma_1\left(x_2\right)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| \geq K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|, \quad x_2 \in \Gamma_П, \\ 0 & \text{при} \quad \left|\sigma_{12}^{(k)}\right| < K\left|\sigma_{11}^{(k)}\right|, \quad x_2 \in \Gamma_З,\end{cases}$$

$$\gamma_2\left(x_2\right)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad \sigma_{11}^{(k)} \geq 0, \quad x_2 \in \Gamma_B, \\ 0 & \text{при} \quad \sigma_{11}^{(k)} < 0, \quad x_2 \notin \Gamma_B,\end{cases}$$

які збігаються з умовами (2.20). Таким чином, сідлова точка функціонала (2.22) визначає значення введених характеристичних функцій.

2.2. Числовий метод розв’язання контактної задачі та ітераційний алгоритм

Особливість процесів контактної взаємодії за наявності односторонніх зв’язків, які обумовлюють появу зон зчеплення, проковзування та відриву на лінії контакту шарів, вимагає враховувати геометричну та конструктивну нелінійність системи і потребує розробки числових методів та алгоритмів розв’язання задач. Для побудови розв’язку задачі (2.21) переходимо до дискретної моделі системи, використовуючи скінченно-елементну апроксимацію [2].

Для дискретизації функціонала задачі застосовуватимемо метод скінченних елементів.

Введемо на областях $\Omega^{(k)}$ сітку з вузлами в точках з координатами $X_s=\left\{x_{1s}, x_{2s}\right\}$, $s=\overline{1,N}$.

Тоді невідомі функції $u_i^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, \tilde{u}_i^{*(k)}, \gamma_m, i, j, k, m=1,2$ запишемо у вигляді векторів, компонентами яких є значення функцій задачі в вузлах сітки:

$$U=\{U_i\}^T,\ U_i=\left\{U_{ik}\right\}^T,\ U_{ik}=\left\{U_{iks}\right\}^T,$$

$$\tilde{U}^*=\{\tilde{U}_i^*\}^T,\ \tilde{U}_i^*=\left\{\tilde{U}_{ik}^*\right\}^T,\ \tilde{U}_{ik}^*=\left\{\tilde{U}_{iks}^*\right\}^T,$$

$$\varepsilon_{ij}=\left\{E_{ijs}\right\}^T,\ \sigma=\left\{\sigma_{ijs}\right\}^T,\ \gamma_{ms}=0 \vee 1, \quad i, j, k, m=1,2,\ s=\overline{1,N}. \qquad (2.30)$$

Вузли, що лежать на лінії контакту шарів $\Gamma_{конт}$, нумеруємо так: $P=\left\{P_1, P_2, ..., P_r\right\}$, де число r обираємо шляхом обчислювального експерименту. Із елементів вектора P можна сформувати вектори

$$P^З=\left\{P_1^З, P_2^З, ..., P_{r_1}^З\right\},\ P^П=\left\{P_1^П, P_2^П, ..., P_{r_2}^П\right\},\ P^B=\left\{P_1^B, P_2^B, ..., P_{r_3}^B\right\},$$

що визначають вузли сітки, які відповідають ділянкам зчеплення, проковзування і відриву, шляхом обчислення значень γ_m, $m = 1,2$ згідно з умовами (2.20), де $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

Переміщення будь-якої внутрішньої точки елемента (e) задаємо вектором

$$U^{(e)}(x_1, x_2) = \left[N_1 I, ..., N_\nu I\right]\left\{U_1^{(e)}, ..., U_\nu^{(e)}\right\}^T , \tag{2.31}$$

де ν – кількість вузлів елемента; N_i , $i = \overline{1,\nu}$ − функції форми, які необхідно обирати так, щоб за підстановкою в (2.31) координат вузлів отримати відповідні вузлові переміщення; I – одинична матриця; $\left\{U_i^{(e)}\right\}$, $i = \overline{1,\nu}$ – вектор вузлових переміщень.

Невідомі функції на елементі зображено у криволінійній системі координат ξ, η. Кожна така локальна координатна система породжує свій ансамбль скінченних елементів. Щоб об’єднати скінченні елементи всіх ансамблів, використовуємо глобальну декартову систему координат *x*, *y*.

Між декартовими та криволінійними координатами повинна справджуватися взаємно однозначна відповідність:

$$\left\{x, y\right\}^T = g\left\{x_1, x_2\right\}^T .$$

Для встановлення зв’язку між декартовими та криволінійними координатами застосуємо ті ж самі функції форми, що введені для переміщень:

$$x = \sum_{i=1}^{\nu} N_i x_{1i} ,\; y = \sum_{i=1}^{\nu} N_i x_{2i} , \tag{2.32}$$

де точки з координатами x_{1i}, x_{2i} збігаються з відповідними точками межі елемента.

Для отримання схеми апроксимації всередині скінченного елемента у вигляді прямокутника використовуватимемо функції форми, які можна подати через допоміжні змінні:

$$\xi_0 = \xi\xi_i ,\; \eta_0 = \eta\eta_i . \tag{2.33}$$

Для елемента другого порядку ($\nu = 8$)
кутові вузли:

$$N_i = \frac{1}{4}\left(1+\xi_0\right)\left(1+\eta_0\right)\left(\xi_0+\eta_0-1\right), \tag{2.34}$$

вузли на сторонах:

$$\xi_i = 0 ,\; N_i = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta_0\right);\; \eta_i = 0 ,\; N_i = \frac{1}{2}\left(1+\xi_0\right)\left(1-\eta^2\right).$$

Після введення вузлових переміщень на елементі (*e*) та схеми апроксимації (15.34) всередині скінченного елемента через локальні

координати, з урахуванням геометричних співвідношень (2.1) отримаємо співвідношення, що зв'язують вектор деформацій та переміщень для скінченного елемента (*e*) в матричному вигляді:

$$E^{(e)} = \left[B\right] U^{(e)}, \tag{2.35}$$

де $B = \left[B_0\right] + \left[B_L\right]$ – матриця, що пов'язує деформації та переміщення; $\left[B_0\right]$, $\left[B_L(U^{(e)})\right]$– матриці, що відповідають лінійній та нелінійній частинам залежності деформацій від переміщень. Елементи підматриць у (2.35) містять частинні похідні першого порядку функцій форми за змінними x_1, x_2.

Оскільки функції форми виражені через локальні координати, необхідно виразити похідні функцій форми за глобальним змінним через похідні за локальними:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix}, \tag{2.36}$$

де J – якобіан перетворення координат.

Якщо виконати обернене перетворення співвідношень (2.40), отримаємо шукані залежності:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \tag{2.37}$$

Для апроксимацій функцій σ_{ij} на елементі (*e*), згідно з рівностями (2.2), можна використати співвідношення

$$\sigma^{(e)} = \left[D\right] E^{(e)}, \tag{2.38}$$

де $\left[D\right]$ – матриця пружних констант, яку визначаємо так:

$$\left[D\right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

Для векторів вузлових узагальнених сил введемо позначення

$$R = \left\{R_i\right\}^T, \ R_i = \left\{R_{ik}\right\}^T, \ R_{ik} = \left\{R_{iks}\right\}^T, \ i,k = 1,2, \ s = \overline{1,N}. \tag{2.40}$$

Після підстановки скінченно-елементної апроксимації в функціонал J_6, інтегрування та варіювання отримаємо систему нелінійних рівнянь порядку $4N$

$$M(U) - R = 0, \tag{2.41}$$

що еквівалентна умові $\partial\tilde{J}_6^* / \partial U_{iks} = 0$, $i = 1, 2,\ k = 1, 2,\ s = \overline{1, N}$; де $\tilde{J}_6^*$ – значення функціонала J_6 після виконання скінченно-елементної апроксимації та інтегрування; $M(U) = [M_0]U + M_L(U)$, $[M_0] = [B_0]^T [D][B_0]$ – матриця жорсткості, що відповідає малим деформаціям; $[D]$ – матриця пружності; $M_L(U) = [B_0]^T [D][B_L] + [B_L]^T [D][B_L] + [B_L]^T [D][B_0]$ – матриця, яка містить нелінійні члени; R – вектор, що залежить від $\tilde{U}^*$.

Навантаження системи моделюємо шляхом послідовного прикладання навантаження зі заданим кроком за допомогою методу продовження за параметром. Між двома послідовними навантаженнями система деформується нелінійно.

Числово реалізуємо контактні умови (2.6)–(2.8), аналізуємо зміну стану на лінії контакту шляхом визначення функцій γ_1, γ_2 згідно з умовами (2.24). Переходимо від одного стану до іншого шляхом включення або виключення відповідних умов на лінії контакту.

Момент появи проковзування фіксуємо за виконання умови $\left|\tilde{\sigma}_{12}\right| \geq K \left|\tilde{\sigma}_{11}\right|$ хоча б в одній точці на лінії контакту, а момент появи відриву – за виконання умови $\tilde{\sigma}_{11} \geq 0$.

Для розв’язання задачі (2.21) застосовуємо ітераційний метод.

На кожному (n)-му кроці методу ($n = \overline{0, N}$) за значеннями $\gamma_1^{(n)}$, $\gamma_2^{(n)}$ обчислюємо значення $U^{(n)}, E^{(n)}, \sigma^{(n)}$ з розв’язання варіаційної задачі (2.21).

Далі розраховуємо значення $\operatorname{sign}\tilde{\sigma}_{11}$, $\operatorname{sign}(\left|\tilde{\sigma}_{12}\right| - K\left|\tilde{\sigma}_{11}\right|)$ на лінії контакту та знаходимо номери вузлів сітки $P^{В}$, $P^{П}$, $P^{З}$ згідно з правилом (2.20), тобто визначаємо значення $\gamma_1^{(n+1)}, \gamma_2^{(n+1)}$ для наступного кроку. Початкові значення $\gamma_1^{(0)}$, $\gamma_2^{(0)}$ обирали рівними 0.

Із застосуванням ітераційного методу на кожному (n)-му кроці розв’язуємо задачу, що є аналогом варіаційної задачі Сіньоріні з відомими тертям та відривом [5]. Тобто відповідна крайова задача (2.21) має той самий вигляд, що і вихідна, за винятком умов (2.20), які замінюємо умовами

$\left|\tilde{\sigma}_{12}\right| - K\left|\tilde{\sigma}_{11}\right| = 0$ замість $\left|\tilde{\sigma}_{12}\right| \geq K\left|\tilde{\sigma}_{11}\right|$ та $\tilde{\sigma}_{11} = 0, \tilde{\sigma}_{12} = 0$ – замість $\tilde{\sigma}_{11} \geq 0$.

Для розв'язання системи нелінійних рівнянь (2.41) застосовуємо ітераційний метод продовження за параметром навантаження $t^{(\mathrm{n})} = t^{(\mathrm{n}-1)} + \Delta t$, складові проекції поверхневої та питомої об'ємної сили зображуємо так: $f_i^{(n)} = t^{(n)}\,\overline{f}_i$, $F_i^{(n)} = t^{(n)}\,\overline{F}_i$, $i = 1, 2,\ 0 \leq t \leq 1$. Тоді система (2.41) на (n)-му кроці матиме вигляд

$$A(U^{(n-1)})\Delta U^{(n)} = \Delta R^{(n)}(U^{(n-1)}, U^{*(n-1)}), \tag{2.42}$$

де $U^{(n)} = U^{(n-1)} + \Delta U^{(n)}$; $A(U^{(n-1)}) = \left\{\dfrac{\partial M}{\partial U}\right\}_{U^{(n-1)}}$; $\Delta R^{(n)}$ – приріст правої частини системи зі зміною номера кроку (n).

Для виконання умови мінімуму $\partial\tilde{J}_6^* / \partial\tilde{U}_{iks}^* = 0$, $i, k = 1, 2,\ s = \overline{1, N}$, де $\tilde{J}_6^*$ – значення функціонала J_6 після скінченно-елементної апроксимації та інтегрування, на кожному (n)-му кроці ітераційного процесу використовуємо метод Ньютона – Рафсона:

$$\tilde{U}^{*(n)} = \tilde{U}^{*(n-1)} - (C^{(n-1)})^{-1}\tilde{\sigma}^{(n-1)}\Big|_{\mathit{Г}_B}. \tag{2.43}$$

Тут позначено: $\tilde{\sigma}^{(n-1)}\Big|_{\mathit{Г}_B} = \left\{\tilde{\sigma}_s^{(n-1)}\right\}^T\Big|_{\mathit{Г}_B}$, $\tilde{\sigma}_s^{(n-1)} = \left\{\tilde{\sigma}_{11s}^{(n-1)}, \tilde{\sigma}_{12s}^{(n-1)}\right\}^T\Big|_{\mathit{Г}_B}$,

$$X_s \in \mathit{Г}_B,\ C^{(\mathrm{n}-1)} = \left\{\frac{\partial\tilde{\sigma}_s(U^{(\mathrm{n}-1)}, \tilde{U}^*)}{\partial\tilde{U}_\varsigma^*}\right\}\Bigg|_{\mathit{Г}_B},\ s, \varsigma = \overline{1, N}.$$

Алгоритм 1 розв'язання задачі:

0. Задати $n = 1, j = 1$, значення $\overline{f}_i$, $\overline{F}_i$, Δt, t^*, $\tilde{U}_{iks}^{*(1,1)} = 0$, $\gamma_{ms}^{(1,1)} = 0$, $s = \overline{1, N}$, $i, k, m = 1, 2$, ε – мале число.
1. Побудувати сітку з вузлами X_s, $s = \overline{1, N}$.
2. Сформувати вектор невідомих U з урахуванням умов $U_{11s}^{(n,j)} = U_{12s}^{(n,j)}$, $U_{21s}^{(n,j)} = U_{22s}^{(n,j)}$ для вузлів з координатами X_s ($X_s \in \mathit{Г}_3$) згідно з крайовими умовами (2.6).
3. Сформувати систему рівнянь (2.42).
4. Визначити вектори $U^{(n,j)}$, $\sigma^{(n,j)}$.

5. Визначити вектор $\gamma_{ms}^{(n,j)}$ згідно з умовами (2.20).
6. Якщо $\exists\, \gamma_{ms}^{(n,j)} \neq 0$, то перейти до пункту 7. Інакше перейти до п. 11.
7. $j = j+1$, визначити номери вузлів $P^{B(n,j)}$, $P^{П(n,j)}$, $P^{З(n,j)}$ залежно від значень компонент вектора $\gamma_{ms}^{(n,j)}$.
8. Визначити $\tilde{U}_{iks}^{*(n,j)}$ за формулою (2.43).
9. Створити вузли $P_i^{B(n,j)}, i=1,2,$ з відповідними переміщеннями $U_{11s}^{(n,j)} \neq U_{12s}^{(n,j)}$, і вузли $P_i^{П(n,j)}, i=1,2,$ з відповідними переміщеннями $U_{21s}^{(n,j)} \neq U_{22s}^{(n,j)}$, сформувати вектор невідомих U.
10. Якщо $\left\| U^{(n,j)} - U^{(n,j-1)} \right\| \leq \varepsilon$, то перейти до п. 11. Інакше перейти до п.3.
11. $n = n+1,\ t^{(n)} = t^{(n-1)} + \Delta t.$
12. Якщо $t^{(n)} \leq t^*$, то перейти до п.3. Інакше кінець алгоритму.

2.3. Дослідження поведінки двошарової системи за наявності односторонніх зв’язків та тертя під дією нормального навантаження

Розглянемо плоску контактну задачу для двох пружних шарів з прямолінійними межами за наявності односторонніх зв’язків та тертя. Верхній та нижній шари виготовлені з різних матеріалів, мають товщини $h^{(1)}$ та $h^{(2)}$ і в декартовій системі координат займають області

$$\Omega^{(1)} = \{(x_1, x_2),\ x_1 \in [0, h^{(1)}],\ x_2 \in (-\infty, +\infty)\};$$
$$\Omega^{(2)} = \{(x_1, x_2),\ x_1 \in [-h^{(2)}, 0],\ x_2 \in (-\infty, +\infty)\}.$$

У верхньому шарі враховано силу тяжіння, у нижньому шарі масові сили відсутні.

На верхній шар на ділянці завдовжки $2a$ діє поверхневе нормальне навантаження:

$$\tilde{q}\left(x_2\right) = \begin{cases} -q, & \text{якщо} \quad -a \leq x_2 \leq a, \\ 0, & \text{якщо} \quad x_2 < -a,\ x_2 > a, \end{cases} \qquad (2.44)$$

а нижня межа основи жорстко закріплена.

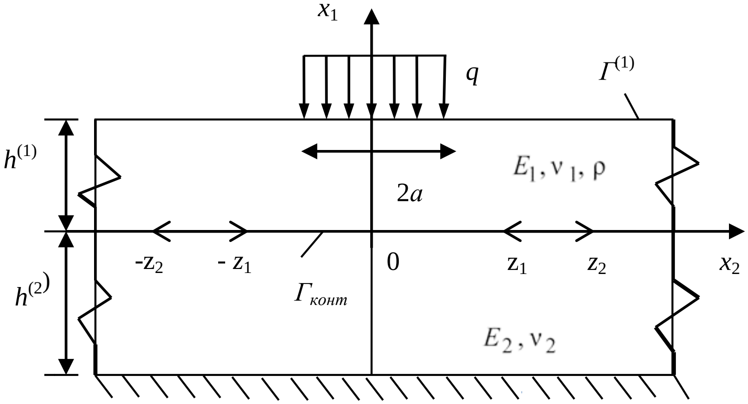


Рис.2.2. Схема навантаження шару, що лежить на пружній основі

В прямокутній системі координат параметри Ляме і рівняння рівноваги (2.3) набувають вигляду

$$H_1^{(k)} = H_2^{(k)} = 1, \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}((\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{12}^{(k)}\theta^{(k)})) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left((\sigma_{21}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)}\theta^{(k)})\right) - \rho g = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}((\sigma_{12}^{(k)} + \sigma_{11}^{(k)}\theta^{(k)})) + \frac{\partial}{\partial x_2}((\sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{21}^{(k)}\theta^{(k)})) = 0, \tag{2.46}$$

а компоненти тензора деформацій визначаємо за формулами (2.1), в яких

$$2\theta^{(k)} = \left(\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_2}\right); e_{11}^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1}; \; e_{22}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_2}; \; e_{12}^{(k)} = \frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_2}.$$

На верхній межі $\Gamma^{(1)}$ ($x_1 = h^{(1)}$) першого шару виконуються умови

$$\sigma_{11}^{(1)}(u) = \tilde{q}(x_2), \; -\infty < x_2 < +\infty. \tag{2.47}$$

На нижній межі основи для всіх $x_1 = -h^{(2)}, \; -\infty < x_2 < +\infty$

$$u_1^{(2)} = 0, \; u_2^{(2)} = 0. \tag{2.48}$$

На лінії контакту шарів $\Gamma_{конт}$, де можуть виникати односторонні зв'язки, виконуються умови (2.6)–(2.8).

В цьому разі повний функціонал (2.22) матиме вигляд

$$J_6(W) = \sum_{k=1}^{2}\left\{ \iint\limits_{\Omega^{(k)}} (\frac{1}{2}C_k^{ijlm}\varepsilon_{ij}^{(k)}\varepsilon_{lm}^{(k)} - \rho g u_1^{(1)}) dx_1 dx_2 - \int\limits_{\Gamma^{(1)}} \tilde{q}(x_2) u_1^{(1)} d\Gamma - \right.$$

$$- \int\limits_{\Gamma_{конт}} (\gamma_1 K \tilde{\sigma}_{11} \left(u_2^{(1)} - u_2^{(2)} \right) + (1-\gamma_1) \tilde{\sigma}_{12} (u_2^{(1)} - u_2^{(2)})) d\Gamma -$$

$$- \int\limits_{\Gamma_{конт}} (\gamma_2 \tilde{\sigma}_{11}^{(k)} (u_1^{(k)} - \tilde{u}_1^{*(k)}) + (1-\gamma_2) \tilde{\sigma}_{11} (u_1^{(1)} - u_1^{(2)})) d\Gamma -$$

$$\left. - \int\limits_{\Gamma_B} \tilde{\sigma}_{12}^{(k)} (u_2^{(k)} - \tilde{u}_2^{*(k)})\, d\Gamma \right\}, \qquad (2.49)$$

де C_k^{ijlm} – тензори, що описують властивості матеріалу, $i, j, l, m, k = 1, 2$.

Для побудови скінченно-елементної моделі в прямокутній системі координат використовували регулярну сітку із елементів у вигляді прямокутників. Розмір скінченного елемента обирався в обчислювальному експерименті послідовним згущенням скінченно-елементної сітки до досягнення заданої точності.

За допомогою алгоритму 1 досліджено контактну поведінку двошарової системи. Для числового аналізу введено безрозмірні параметри – $\chi = E_1 / E_2$, $\eta = h^{(1)} / h^{(2)}$.

Для першого варіанта розрахунку було обрано: константи матеріалу верхнього пружного шару – густину ρ =27.6 (кН/м^3), модуль Юнга E_1=7.6·10^3 (МПа) і коефіцієнт Пуассона ν_1=0.4, пружної основи – E_2 =3.8 ·10^3 (МПа), ν_2 =0.35; для другого варіанта розрахунку: константи матеріалу верхнього пружного шару – ρ =27.2 (кН/м^3), E_1=7.6·10 (МПа), ν_1=0.28; пружної основи – E_2 =7.6·10^3 (МПа), ν_2 =0.4; коефіцієнт тертя $K = 0; 0,3; 0,7$; $a / h^{(2)} = 0,16$; $h^{(1)} = 0,1$ (м);0,15 (м), $h^{(2)} = 0,5$ (м).

Для першого варіанта розрахунку $\chi = 2$ та $\bar{q} = q \cdot 10^6 / E_1 h^{(1)}$; для другого – $\chi = 0.01$ та $\bar{q} = q \cdot 10^6 / E_2\, h^{(1)}$.

Задачу розглядали для навантаження, за якого фіксували відрив шарів на лінії контакту. Він відбувався на двох симетричних ділянках $(-z_2, -z_1)$ і (z_1, z_2) завздовжки $\Delta z = |z_2 - z_1|$.

Конструктивний стан системи, а внаслідок і напружено-деформований стан, змінюються залежно від навантаження q.

На рис.2.3 наведена залежність відносної довжини зони відриву $\overline{\Delta z} = \Delta z / h^{(1)}$ від навантаження $\bar{q}$. З аналізу залежності випливає, що для навантаження $0 \le \bar{q} \le \bar{q}_{кр}$ значення $\Delta u_1 = 0$, тобто конструкція деформується

за умов повного зчеплення шарів. При $\overline{q} = \overline{q}_{кр}$ відбувається відрив верхнього шару, відносний розмір зони відриву збільшується нелінійно зі зростанням навантаження $\overline{q}$. Також було виявлено істотну залежність як критичного навантаження $\overline{q}_{кр}$, так і величини зони відриву від товщини верхнього шару. Аналіз рис. 2.3 свідчить, що значення $\overline{q}_{кр}$ суттєво залежать від параметрів K та χ.

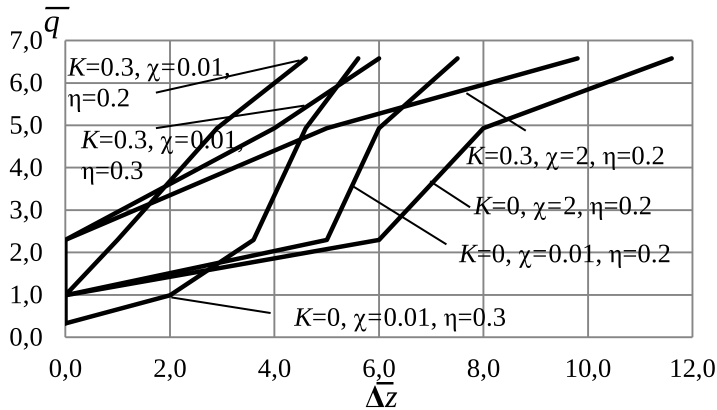


Рис. 2.3. Залежність відносного розміру зони відриву від навантаження

Наявність тертя та збільшення товщини верхнього шару суттєво підвищують значення критичного навантаження $\overline{q}_{кр}$ незалежно від співвідношення модулів Юнга χ.

Проаналізуємо вплив рівня навантаження на появу відриву та проковзування за значень параметрів $K = 0$ та $\eta = 0.2$.

На рис. 2.4 і 2.5 подано результати обчислення функцій $\overline{\Delta u_i} = (\tilde{u}*_i^{(1)}(\overline{x}_2) - \tilde{u}*_i^{(2)}(\overline{x}_2)) / h^{(1)},\ i = 1,2,$ де $\overline{x}_2 = x_2 / h^{(1)}$.

Як бачимо, для відносно м’якого верхнього шару відносна ліва координата правої зоні відшарування $\overline{z_1}$ ($\overline{z_1} = z_1 / h^{(1)}$) знаходиться ближче до зони навантаження, а для відносно жорсткого – значно далі. Така властивість зберігається зі зміною навантаження. Значення $\overline{\Delta z}$ суттєво збільшується зі зростанням навантаження $\overline{q}$.

Величина проковзування зростає за умов збільшення навантаження до деякого максимального значення та при $\overline{x_2} \to \infty$ прямує до нуля.

Розташування точок максимуму функцій $\overline{\Delta u_i}$ залишається незмінним незалежно від навантаження за фіксованих значень параметра χ.

Зі зростанням навантаження суттєво збільшуються максимальні значення функцій $\overline{\Delta u_i}$ за відносно м'якого верхнього шару ($\chi < 1$), і зменшуються, якщо $\chi > 1$.

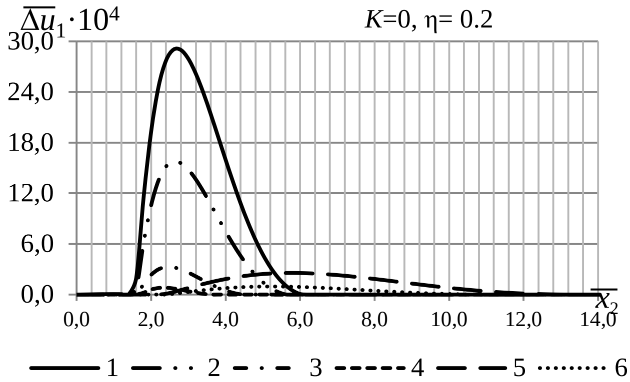


Рис. 2.4. Функції $\overline{\Delta u_1}$ на лінії контакту:

1 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 6.58$; 2 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 3.95$; 3 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 1.32$;
4 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 0.66$; 5 – $\chi = 2,\ \overline{q} = 6.58$; 6 – $\chi = 2,\ \overline{q} = 3.95$

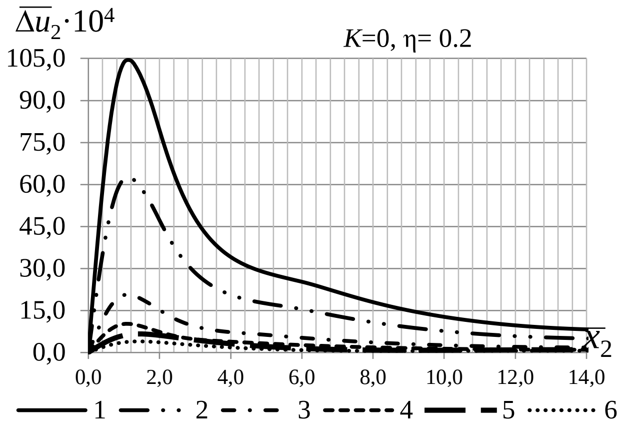


Рис. 2.5. Функції $\overline{\Delta u_2}$ на лінії контакту:

1 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 6.58$; 2 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 3.95$; 3 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 1.32$;
4 – $\chi = 0.01,\ \overline{q} = 0.66$; 5 – $\chi = 2,\ \overline{q} = 6.58$; 6 – $\chi = 2,\ \overline{q} = 3.95$

Функції $\overline{\Delta u_1}$ і $\overline{\Delta u_2}$ на рис. 2.6 і 2.7 подані для різних значень коефіцієнта тертя K для м'якого ($\chi<1$) та твердого ($\chi>1$) верхнього шару при $\bar{q}=6.58,\ \eta=0.2$. Як бачимо, зростання коефіцієнта тертя K по-різному впливає на значення відносних нормальних і тангенціальних переміщень: для відносно жорсткого верхнього шару вони зменшуються в рази, а для відносно м'якого – можливо, і в десятки разів.

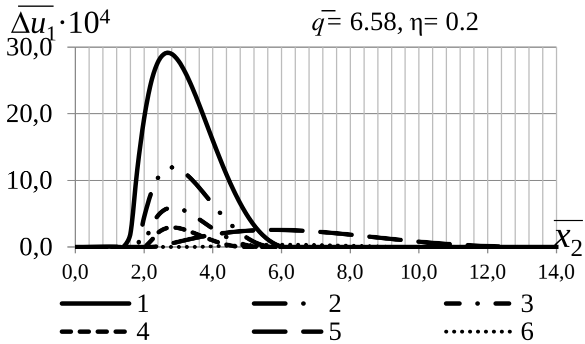


Рис. 2.6. Функції $\overline{\Delta u_1}$ **на лінії контакту:**

1 – $K=0,\ \chi=0.01$; 2 – $K=0.3,\ \chi=0.01$; 3 – $K=0.5,\ \chi=0.01$;
4 – $K=0.7,\ \chi=0.01$; 5 – $K=0,\ \chi=2$; 6 – $K=0.7,\ \chi=2$

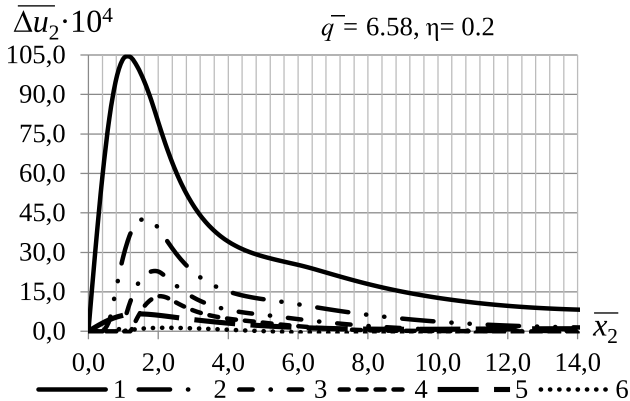


Рис. 2.7. Функції $\overline{\Delta u_2}$ **на лінії контакту:**

1 – $K=0,\ \chi=0.01$; 2 – $K=0.3,\ \chi=0.01$; 3 $K=0.5,\ \chi=0.01$;
4 – $K=0.7,\ \chi=0.01$; 5 – $K=0,\ \chi=2$; 6 – $K=0.7,\ \chi=2$

На рис. 2.8 подано залежність відносних координат зон відриву $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ ($\overline{z_1} = z_1 / h^{(1)}$, $\overline{z_2} = z_2 / h^{(1)}$) від значень коефіцієнту тертя K.

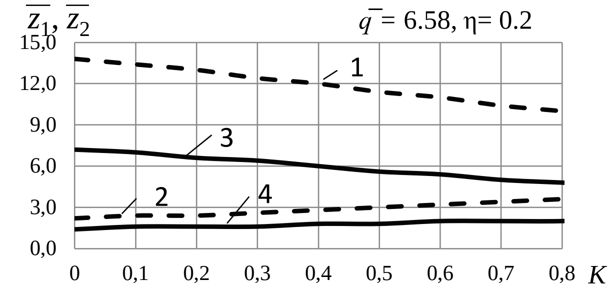


Рис. 2.8. Залежність зон контакту від параметра K :

1, 2 – при $\chi = 2$; 3, 4 – при $\chi = 0.01$

На рис. 2.9–2.11 наведено значення безрозмірних напружень на нижній межі верхнього шару $\overline{\sigma_{ij}}$ ($\overline{\sigma_{ij}} = \sigma_{ij}^{(1)} \cdot h^{(1)} / q$, $i, j = 1, 2$) залежно від жорсткості верхнього шару та значення коефіцієнта тертя при $q = 5$ (кН/м).

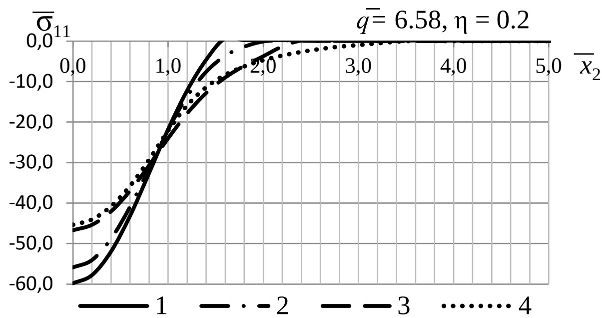


Рис. 2.9. Напруження $\overline{\sigma_{11}}$ на нижній межі верхнього шару

1 – при $K = 0, \chi = 0.01$; 2 – при $K = 0.7, \chi = 0.01$;

3 – при $K = 0, \chi = 2$; 4 – при $K = 0.7, \chi = 2$.

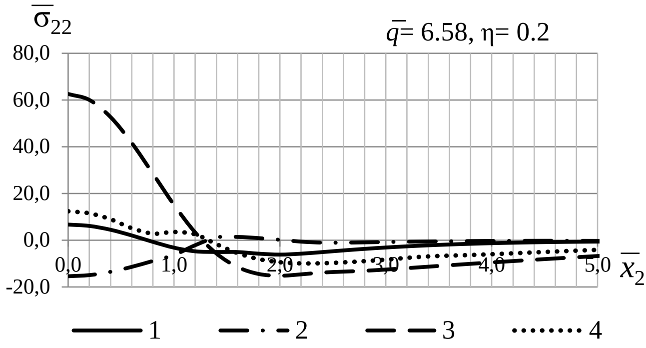


Рис. 2.10. Напруження $\overline{\sigma_{22}}$ на нижній межі верхнього шару

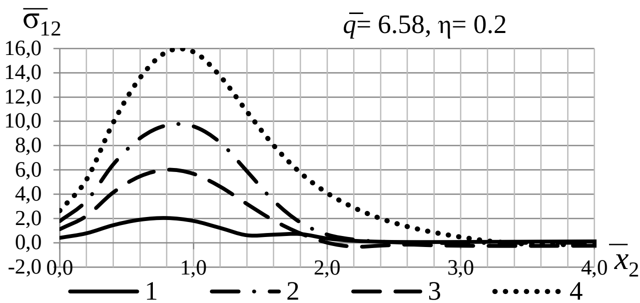


Рис. 2.11. Напруження $\overline{\sigma_{12}}$ на нижній межі верхнього шару

Аналіз наведених залежностей свідчить, що значення напружень суттєво залежать від виду моделі – врахування тертя і відриву, і можуть відрізнятися в кілька разів як для твердого, так і для м'якого верхнього шару.

2.4. Задача ідентифікації додаткового зовнішнього навантаження для запобігання відшарування шарів

Задачу про визначення додаткового впливу на двошарову систему для запобігання відриву (відшарування) шарів (ідентифікація параметрів та місцерозташування додаткового зовнішнього навантаження) за відомими характеристиками напружено-деформованого стану в зоні контакту, які отримано із розв'язання прямої задачі, сформулюємо як обернену задачу.

Дослідимо можливість застосування методу обернених задач для ідентифікації розміру і розташування області прикладання додаткового зовнішнього навантаження на верхній шар двошарової системи, що знаходиться під дією нормально розподіленого навантаження і власної ваги.

2.4.1. Математична модель оберненої задачі

Розглянемо задачу про визначення значення і місцерозташування додаткового зовнішнього навантаження p, яке забезпечує повний контакт двох нескінченних шарів (рис. 2.12). Верхній та нижній шари мають товщини $h^{(1)}$ та $h^{(2)}$ відповідно.

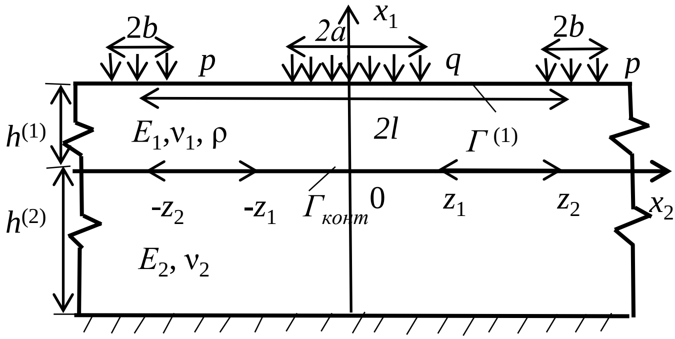


Рис. 2.12. Схема навантаження двошарової конструкції

Для моделювання дії зовнішнього навантаження як проектного, так і додаткового на поверхні верхнього шару, позначимо ділянки межі $x_2 = h^{(1)}$ як

$$\Gamma_p = \{x_2, -(l+b) \le x_2 \le -(l-b), \, l-b \le x_2 \le l+b\},$$

$$\Gamma_q = \{x_2, -a \le x_2 \le a\}.$$

де l – відстань від центра шару до центра зони прикладання додаткового навантаження p; $2b$ – розмір зони прикладання додаткового навантаження; p – значення додаткового нормального навантаження.

На пружний верхній шар, що має густину ρ та лежить на пружній основі, діє поверхневе нормальне навантаження

$$\sigma_{11}^{(1)} = -q, \;\; x_2 \in \Gamma_q, \; \sigma_{11}^{(1)} = -p, \;\; x_2 \in \Gamma_p,$$

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \;\; x_2 \notin \Gamma_q, \;\; x_2 \notin \Gamma_p. \tag{2.50}$$

На межі контакту верхнього шару та основи $\Gamma_{конт}$ задано крайові умови (2.6)–(2.8), на нижній межі основи – умови (2.48).

Далі передбачаємо, що під дією навантаження q, значення якого змінюються у діапазоні $0 \le \overline{q} \le \overline{q}_{кр}$, шари контактують шляхом повного зчеплення або проковзування. Зони відриву виникають при $\overline{q} > \overline{q}_{кр}$.

Для ідентифікації параметрів додаткового зовнішнього навантаження p, що забезпечує відсутність зон відриву $z_1 \le x_2 \le z_2$, $-z_2 \le x_2 \le -z_1$, $x_1 = 0$, де $\tilde{\sigma}_{11} = 0$, сформулюємо обернену задачу.

Вектор невідомих параметрів $B = \{l,\ b,\ p\}^T$ визначаємо так:

$$B = \underset{B \in \overline{B}}{\arg\min}\ \ J_7(B), \tag{2.51}$$

$$J_7 = \int_{-L}^{L} \left[\left(\tilde{u}_1^{(1)}(B) - \tilde{u}_1^{(2)}(B) \right) - \varepsilon \right]^2 dx_2, \tag{2.52}$$

де $\overline{B}$ – область визначення вектора B; ε << 1 – мала величина; $\tilde{u}_1^{(k)}$ – значення функцій $u_1^{(k)}(0, x_2)$ (k=1,2 – номери шарів) за фіксованих значень компонент $l,\ b,\ p$ вектора B на лінії контакту $\Gamma_{конт}$.

2.4.2. Метод і алгоритм розв'язання задачі ідентифікації

Для розв'язання прямої задачі визначення напружено-деформованого стану розглянутої системи за фіксованих значень компонент вектора B використали методику, що викладена у підрозділі 2.2. Розв'язували пряму задачу, використовуючи алгоритм 1, де нульовий крок змінюється так:

0. Задати $n = 1$, $j = 1$, $\tilde{U}_{iks}^{*(1,1)} = 0$, $\gamma_{ms}^{(1,1)} = 0$, $m = 1,2$, $s = \overline{1,N}$, n^* – кількість кроків, q^*, t^*, Δt, $\hat{p}$, $q^{(1)} = \Delta q = q^* / n^*$, $p^{(1)} = \Delta p = \hat{p} / n^*$, ε – мале число.

Обернену задачу розв'язували зі застосуванням методу локальних варіацій. Позначимо вузли, які розташовано на ділянці Γ_p, як $C = \left\{ X_{j1}, X_{j2}, ..., X_{j\nu} \right\}$, та введемо вектор $\Psi = \left\{ \tilde{C}, p \right\}$, де $\tilde{C} = \left\{ X_{\nu 1}, X_{\nu 2}, ..., X_{\nu\tau} \right\}$ – вектор, компонентами якого є координати точок прикладання додаткового навантаження.

Функціонал (2.52) після дискретизації набуває вигляду

$$\tilde{J}_7 = ((\tilde{U}_{11}(\Psi) - \tilde{U}_{12}(\Psi)) - \varepsilon)^T\ ((\tilde{U}_{11}(\Psi) - \tilde{U}_{12}(\Psi)) - \varepsilon), \tag{2.53}$$

а задачу (2.51) сформулюємо так:

$$\Psi = \arg\min_{\Psi \in \overline{\Psi}} \tilde{J}_7(\Psi). \tag{2.54}$$

Нехай W_3 – дискретний точковий простір; $\overline{\Psi}$ – множина допустимих розв'язків, $\overline{\Psi} \subset W_3$. У просторі W_3 введемо метрику

$$\rho^2(\Psi_1, \Psi_2) = \sum_{i=1}^{r} (\psi_{1i} - \psi_{2i})^2, \tag{2.55}$$

де ψ_{1i}, ψ_{2i} – координати точок Ψ_1, Ψ_2 у просторі W_3.

Нехай Ψ' – деякий допустимий розв'язок оберненої задачі (2.54). У просторі W_3 для точки Ψ' визначимо окіл $\tilde{W}_3$ з радіусом $r_{\Psi'}$ як набір можливих розв'язків Ψ'_ξ, $\xi = \overline{1,12}$, який отримали шляхом додавання (зменшення) елементів вектора $\tilde{C}$ ліворуч-праворуч від вузлів $X_{\nu 1}$, $X_{\nu\tau}$ і зміною відповідних значень p.

Вектор спадання функції $\tilde{J}_7$ в околі $\tilde{W}_3$ довільної точки Ψ' визначимо як вектор з компонентами

$$\Delta_\xi = \tilde{J}_7(\Psi_\xi') - \tilde{J}_7(\Psi'),$$

де Ψ_ξ', $\xi = \overline{1,12}$ – можливі розв'язки оберненої задачі, які належать околу $\tilde{W}_3$.

Функціонали $\tilde{J}_7(\Psi_\xi'), \tilde{J}_7(\Psi')$ обчислюємо шляхом розв'язування прямих задач за допомогою алгоритму 1. Очевидно, що точка Ψ' є локальним мінімумом функції $\tilde{J}_7(\Psi)$ за умови $\Delta_\xi \geq 0$ для всіх $\xi = \overline{1,12}$ в околі цієї точки. Якщо деякі $\Delta_\xi < 0$ і $\Delta_{\xi*} = \min \Delta_\xi$, тоді точка Ψ_ξ' є точкою найшвидшого спадання функції $\tilde{J}_7(\Psi)$.

Розроблено алгоритм 2, що реалізує метод локальних варіацій.

Алгоритм 2

1. Обрати початкову точку Ψ_0 у просторі пошуку, сформувати точки Ψ_ξ', $\xi = \overline{1,12}$, шляхом збільшення та зменшення значень параметрів l і b та збільшення значень параметра p з обраним кроком.

2. Визначити компоненти вектора спадання для точки Ψ_0 у напрямках Ψ_ξ' шляхом обчислення $\tilde{J}_7(\Psi)$ за допомогою алгоритму 1. Якщо всі $\Delta_\xi \geq 0$, тоді $\tilde{J}_7(\Psi_0) = \min \tilde{J}_7(\Psi)$.

3. Якщо $\exists \Delta_\xi < 0$ для $\xi = \overline{1,12}$, тоді обрати точку $\Psi_{\xi*}$, що відповідає $\min \Delta_\xi$, яка стає центром нового околу $\Psi_{\xi*} = \Psi_0$.

4. Перехід на п.2. Процес триває до тих пір, доки $\exists \Delta_\xi < 0$, $\xi = \overline{1,12}$.

2.4.3. Числовий аналіз задачі ідентифікації

За допомогою алгоритму 2 проаналізовано поведінку двошарової системи (рис. 2.12).

Для першого варіанта розрахунку обрано: константи матеріалу верхнього пружного шару – густина ρ =27.6 (кН/м^3), модуль Юнга E_1=7.6·10^3 (МПа) і коефіцієнт Пуассона ν_1=0.4, пружної основи – E_2 =3.8 ·10^3 (МПа), $\nu_2 = 0.35$; для другого варіанта: константи матеріалу верхнього пружного шару – ρ=27.2 (кН/м^3), E_1=7.6·10 (МПа), ν_1=0.28; пружної основи – $E_2 = 7.6 \cdot 10^3$ (МПа), ν_2 =0.4; a – зона дії рівномірно розподіленого поверхневого навантаження q, $a / h^{(2)} = 0,16$; $h^{(1)} = 0,05(\text{м}); 0,1(\text{м}); 0,15\ (\text{м})$, $h^{(2)} = 0,5\ (\text{м})$.

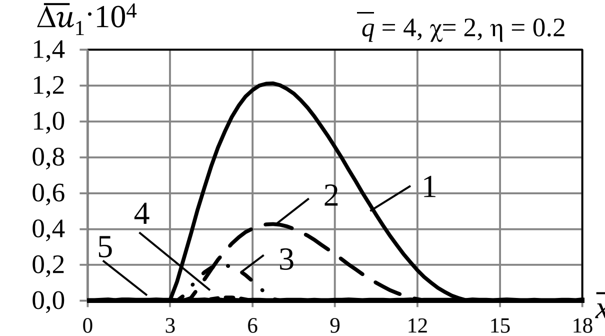
Для числового аналізу введено безрозмірні параметри – $\chi = E_1 / E_2,\ \eta = h^{(1)} / h^{(2)},\ \overline{x}_2 = x_2 / a$, а також $b^* = b / a,\ l^* = l / a,\ p^* = p / q$ – значення вектора Ψ, за якого досягається мінімум функції $\tilde{J}_7(\Psi)$.

Для першого варіанту розрахунку: $\chi = 2$ та $\overline{q} = q \cdot 10^6 / E_1 h^{(1)}$; для другого – $\chi = 0.01$ та $\overline{q} = q \cdot 10^6 / E_2 h^{(1)}$. Під час розв'язання задачі обрали початкові наближення: $p_0 / q = 0.05$, $b_0 / a = 4$, $l_0 / a = 5; 10$.

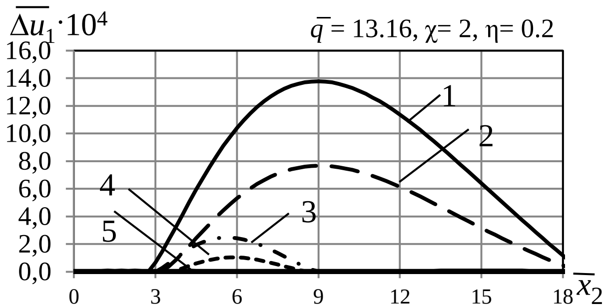
На рис. 2.13 і 2.14 подано результати виконання ітераційного процесу методу локальних варіацій за $\chi = 2$ та 0.01 відповідно. Рис. 2.13 побудовано за різних значень $\overline{q}$ та фіксованого $\eta = 0.2$, рис. 2.14 – за різних значень $\overline{q}$ та η.

За відносно твердих верхніх шарів та при $\eta = 0.2$, $K = 0$ кількість ітерацій *I* методу вектора локальних варіацій для різних значень поверхневого навантаження $\overline{q} = 4;\ 13.16;\ 26.32$ складала 5, 7 та 14 відповідно. Для відносно м'яких верхніх шарів максимальні значення функції $\Delta u_1(\overline{q})$ значно

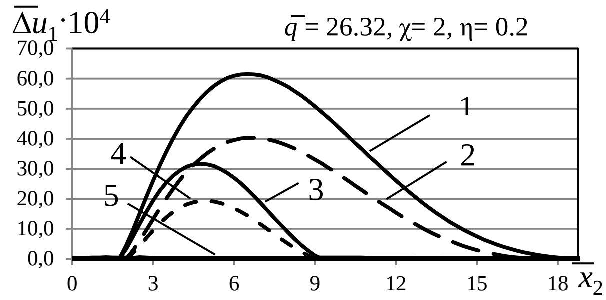
більші, ніж для відносно твердих, і спадають зі зростанням значень параметрів K та η. Тому при $K = 0$ кількість ітерацій складала 8; 13 та 28 за тих самих значень $\overline{q}$ та η. Зі зростанням коефіцієнта тертя та зменшенням товщини верхнього шару зменшувалась кількість ітерацій.



а



б

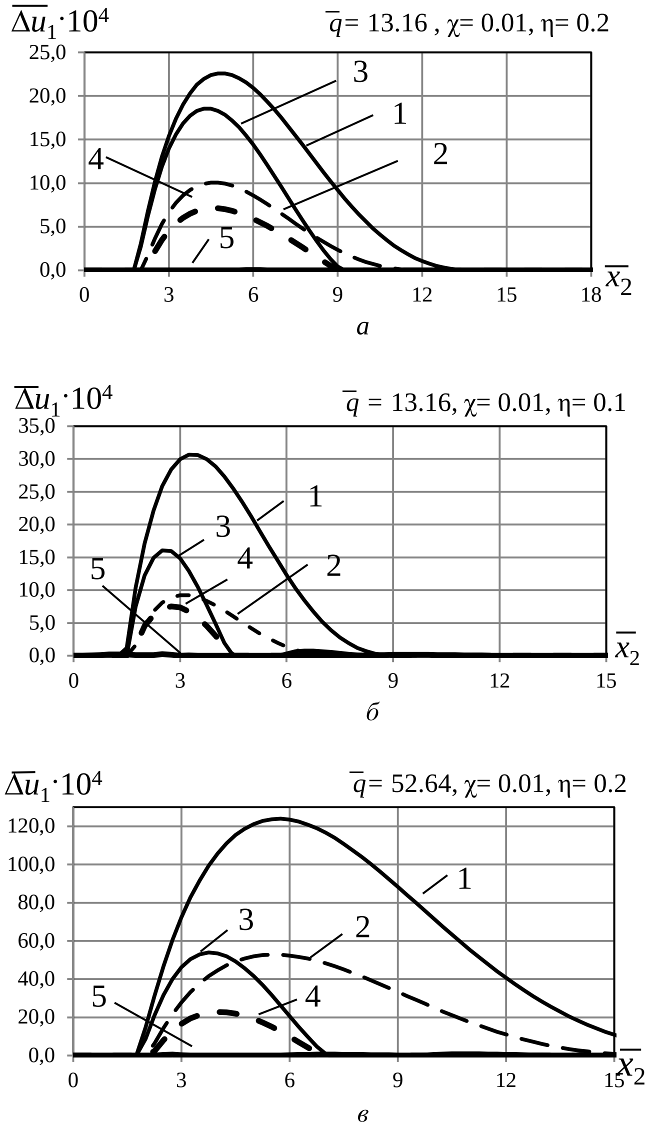


в

Рис. 2.13. Відносні переміщення $\overline{\Delta u}_1$ на межі поділу:

1 – K= 0, p= 0; 2 – K= 0.3, p= 0;

3 – *K*= 0, p_0, l_0, b_0; 4 – *K*= 0.3, p_0, l_0, b_0; 5 – p^*, l^*, b^*



в

Рис. 2.14. Відносні переміщення $\overline{\Delta u}_1$ на межі поділу:

1 – *K*= 0, *p*= 0; 2 – *K*= 0.3, *p*= 0; 3 – *K*= 0, p_0, l_0, b_0;

4 – *K*= 0.3, p_0, l_0, b_0; 5 – p^*, l^*, b^*

Залежність параметрів ідентифікації від параметрів системи наведені у таблиці.

Таблиця

$\overline{q}$	K	χ	η	p^*	l^*	b^*	I	$\min \tilde{J}_7(\Psi)$
4.0	0.0	2.00	0.20	1.60	7.25	1.75	5	9.13*E*-11
4.0	0.3	2.00	0.20	1.20	7.75	0.50	4	1.56*E*-12
13.2	0.0	2.00	0.20	6.600	8.25	2.00	7	5.33*E*-09
13.2	0.3	2.00	0.20	5.28	9.00	1.50	5	1.02*E*-10
13.2	0.0	0.01	0.10	5.5	3.25	1.00	13	1.95*E*-08
13.2	0.3	0.01	0.10	4.85	3.75	0.25	10	1.21*E*-09
13.2	0.0	0.01	0.20	1.50	3.25	0.75	11	4.23*E*-09
13.2	0.3	0.01	0.20	1.20	3.50	0.25	8	1.14*E*-10
26.3	0.0	2.00	0.10	2.64	5.25	1.75	14	9.55*E*-08
26.3	0.3	2.00	0.10	2.51	5.75	1.50	11	2.54*E*-09
52.6	0.0	0.01	0.20	5.26	3.5	1.00	25	3.02*E*-08
52.6	0.3	0.01	0.20	4.78	3.00	0.75	19	5.41*E*-10

З наведених даних (див. таблицю) видно, що значення параметрів p^*, l^*, b^* суттєво залежать від рівня навантаження, геометричних і фізичних властивостей системи. Зазначимо, що з урахуванням тертя зовнішне навантаження, що запобігає відриву шарів, зменшується. За наявності тертя відносні переміщення точок шару і основи на межі поділу зменшуються в рази, що призводить до таких результатів: із зростанням коефіцієнта тертя значення параметру b^* зменшується, а параметра l^* збільшується. За тонкого верхнього шару значення параметрів l^* і b^* зменшуються як для відносно жорсткого, так і для відносно м’якого верхнього шару. При цьому мінімум функції $\tilde{J}_7(\Psi)$ досягається при значеннях параметра p, які не перебільшують 10 % від навантаження $\overline{q}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.

2. *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. *Киселева Е.М., Шор Н.З.* Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
4. *Козачок О.П., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
5. *Кудашкина Д.А., Намм Р.В.* Метод Удзавы для решения контактной задачи теории упругости с трением // Ученые заметки ТОГУ. – 2014. – **5**, № 3. – С. 1–9.
6. *Лукашевич А.А., Розин Л.А.* О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа // Инж.-строит. журн. – 2013. – № 1. – С. 75–81.
7. *Слободян Б.С., Ляшенко Б.А., Маланчук Н.І., Марчук В.Є., Мартиняк Р.М.* Моделювання контактної взаємодії періодично текстурованих тіл з урахуванням фрикційного проковзування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 2. – С. 88–96.
8. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 374 с.
9. *Прокопишин І.І., Мартиняк Р.М.* Числове дослідження контактної взаємодії двох тіл з виїмкою методом декомпозиції області // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – № 16. – С. 232–239.
10. *Станкевич И.В.* Численное решение смешанных задач теории упругости с односторонними связями // Математика и математическое моделирование. – 2017. – № 5. – С. 40–53.
11. *Kozachok O.P., Slobodyan B.S., Martynyak R.M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Materials Science. – 2016. – **51**, No. 6. – P. 804–813.

РОЗДІЛ 3

ФРИКЦІЙНИЙ КОНТАКТ БЕРЕГІВ ТРІЩИНИ У ПРУЖНОМУ ТІЛІ

В.І. Острик

Частковий контакт берегів щілин або тріщин у пружній однорідній площині вивчали різні автори. В.І. Моссаковський і П.А. Загубиженко в працях [20, 21] розглянули задачу про стиснення пружної площини з прямолінійною щілиною скінченної ширини за умови входження у контакт берегів щілини у середній її частині як без [20], так і з урахуванням сил тертя [21]. Задачі гладкого контакту берегів прямолінійної тріщини розв'язали аналітично О. Ексоган [51], О.Л. Бу і С.Е. Фріз [52], М.Д. Гриліцький і Г.С. Кіт [9]. Числові розв'язки задач про гладкий контакт берегів прямолінійної тріщини в однорідній пластині в умовах розтягу, стиску та згину отримали в працях [11, 12, 24, 25, 49, 50, 67]. Контактні задачі для криволінійних тріщин розглянуто в працях [6, 19, 53] без урахування тертя і в [1, 8, 61] – з урахуванням тертя та зчеплення.

Розв'язки задач про рівновагу пружних тіл із тріщинами, які містяться на межі поділу середовищ із різних матеріалів, характеризуються сингулярною осциляцією напружень і обмеженою за амплітудою осциляцією переміщень в околах вершин тріщини [72]. Осцилюючі розв'язки не можна вважати фізично допустимими, оскільки вони вказують на взаємне проникнення середовищ поблизу вершин тріщини.

У працях М. Комніноу, огляд яких наведено в [10], для знаходження коректних розв'язків запропоновано вводити області контакту берегів тріщини поблизу її вершин. При цьому числово досліджено моделі гладкого та фрикційного контакту. Аналітичні розв'язки для міжфазної тріщини в однорідному полі напружень отримали у [37, 60]. У працях [5, 62, 63, 65] одержано розв'язки в замкненій формі для тріщини з однією зоною контакту між різнорідними ізотропними, ортотропними та п'єзоелектричними матеріалами. У [46] знайдено аналітичний розв'язок для системи міжфазних тріщин у полі зосереджених сил та моментів і числово проаналізовано випадок однієї тріщини з урахуванням тільки однієї зони контакту. Взаємодію міжфазних тріщин із зонами контакту в ізотропному та анізотропному біматеріалах у полі розтягу та зсуву розглянуто у працях [44, 45], відповідні періодичні задачі – у [14–16]. У публікаціях [31, 32, 39, 40] за моделями гладкого та фрикційного контакту отримано точні та асимптотично точні розв'язки задач для напівнескінченної та скінченної міжфазних тріщин за дії нормальних зосереджених сил, прикладених до берегів тріщин. У статтях [2, 26] вивчено фрикційний контакт берегів міжфазної тріщини у полі зсувних та розтягувальних напружень, коли область контакту біля однієї з вершин тріщини може займати значну частину тріщини. У всіх згаданих дослідженнях розглядали задачі плоскої деформації для двох жорстко з'єднаних різнорідних півплощин із прямолінійною тріщиною на межі. Розв'язок осесиметричної контактної задачі для кругової тріщини на межі поділу двох різнорідних півпросторів одержано у [59, 66] числово та у [17, 33, 34] – аналітично. Контакт берегів міжфазної криволінійної тріщини розглянуто в працях [7, 18, 54, 64, 69–71].

3.1. Контакт берегів прямолінійної тріщини у пружній площині за складного навантаження і різних умов контакту

Нижче вивчено [68] контакт берегів прямолінійної тріщини за дії комбінованого навантаження: напружень на нескінченності та зосереджених сил. Задачу розглянуто за різних умов контакту: як без урахування сил тертя в області контакту, так і з їх урахуванням під час повного відносного проковзування берегів тріщини або часткового проковзування на краях області контакту з виникненням зони зчеплення всередині цієї області.

Пружна площина з прямолінійною тріщиною, яка міститься на відрізку $-a \le x \le a$ осі Ox, знаходиться під дією розтягувальних нормальних σ_y^∞ і зсувних τ_{xy}^∞ напружень, заданих на нескінченності, і двох зосереджених сил P, прикладених у точках $x = x_0$, $y = \pm y_0$ назустріч одна одній. Вважаємо, що тріщина частково розкрита на інтервалах $c < x < a$, $-a < x < b$ ($-a < b < c < a$), а на відрізку $b \le x \le c$ її береги контактують. Розглянемо три моделі контакту берегів тріщини: гладкий контакт з нехтуванням силами тертя, ковзний контакт із взаємним проковзуванням із тертям берегів тріщини на всій області контакту і контакт зі зчепленням і проковзуванням, коли під впливом тертя область контакту розділяється на зону зчеплення $b' \le x \le c'$ всередині області контакту і зони проковзування $c' < x \le c$, $b \le x < b'$ на її краях. В останньому випадку вважаємо, що навантаження відбувається послідовно: спочатку прикладається нормальне, потім – дотичне.

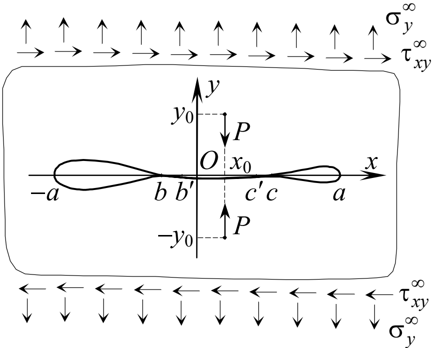


Рис. 3.1

Крайові умови, окрім однієї умови в області контакту, мають вигляд

$$u_y\big|_{y=+0} = u_y\big|_{y=-0}, \quad \sigma_y\big|_{y=+0} = \sigma_y\big|_{y=-0}, \quad \tau_{xy}\big|_{y=+0} = \tau_{xy}\big|_{y=-0} \quad (b < x < c),$$

$$\sigma_y\big|_{y=\pm 0} = 0, \quad \tau_{xy}\big|_{y=\pm 0} = 0 \quad (-a < x < b, \; c < x < a). \tag{3.1}$$

За гладкого контакту до них приєднується умова

$$\tau_{xy}\big|_{y=+0} = 0 \quad (b < x < c), \tag{3.2}$$

яка для ковзного контакту замінюється на таку:

$$\tau_{xy}\big|_{y=+0} = -\mu_0 \, \sigma_y\big|_{y=+0} \quad (b < x < c), \tag{3.3}$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя, а у разі контакту зі зчепленням і проковзуванням – на дві умови

$$u_x\big|_{y=+0} = u_x\big|_{y=-0} \quad (b' \le x \le c'),$$

$$\tau_{xy}\big|_{y=+0} = -\mu_0\,\sigma_y\big|_{y=+0} \quad (b < x < b',\ \ c' < x < c\,). \tag{3.4}$$

Під час ковзного контакту знак при μ_0 у крайовій умові (3.3) вибрали за припущення, що проковзування верхнього берега тріщини відносно нижнього її берега відбувається у напрямку осі Ox згідно з заданими на нескінченності дотичними напруженнями τ_{xy}^{∞}. Тобто в області контакту повинна виконуватися нерівність

$$u_x\big|_{y=+0} - u_x\big|_{y=-0} > 0 \quad (b < x < c\,). \tag{3.3$'$}$$

За контакту зі зчепленням і проковзуванням аналогічна нерівність повинна виконуватися в зонах проковзування:

$$u_x\big|_{y=+0} - u_x\big|_{y=-0} > 0 \quad (b < x < b',\ \ c' < x < c\,). \tag{3.4$'$}$$

Межі b, c області контакту та b', c' зони зчеплення ($-a < b < b' < c' <$ $< c < a$) заздалегідь невідомі, які треба визначити під час розв'язання задачі.

Компоненти напружено-деформованого стану у площині з розрізом подамо у вигляді $u_x = u_x^{(1)} + u_x^{(2)}$, ... , $\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}$. Перші компоненти, з індексом 1, відповідають дії зосереджених сил у пружній площині без тріщини, другі, з індексом 2, – збуреному стану, викликаному тріщиною. Зокрема,

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = -\frac{P}{\pi(\kappa+1)}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\kappa+1}{x-z_0} - \frac{z_0-\bar{z}_0}{(x-z_0)^2}\right), \quad z_0 = x_0 + iy_0\,, \ \ \kappa = 3-4\nu\,, \tag{3.5}$$

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Для визначення збуреного стану скористаємося розв'язком першої основної задачі для пружної площини з тріщиною [22] за умови

$$\left(\sigma_y^{(2)} - i\tau_{xy}^{(2)}\right)\Big|_{y=\pm 0} = p(x) \quad (-a < x < a\,). \tag{3.6}$$

Маємо:

$$\left(\sigma_y^{(2)} - i\tau_{xy}^{(2)}\right)\Big|_{y=0} = \left(\sigma_y^{\infty} - i\tau_{xy}^{\infty}\right)\frac{|x|}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{\operatorname{sign} x}{\pi\sqrt{x^2-a^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,p(t)}{t-x}\,dt \quad (|x| > a\,),$$

$$2G\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^{(2)} + iu_y^{(2)}\right)\Big|_{y=\pm 0} = -\frac{\kappa+1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_y^{\infty} - 2i\tau_{xy}^{\infty}\right) \pm \left(\tau_{xy}^{\infty} + i\sigma_y^{\infty}\right)\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right] +$$

$$+\frac{\kappa-1}{2}\,p(x) \pm \frac{\kappa+1}{2\pi i\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\,p(t)}{t-x}\,dt \quad (-a < x < a\,), \tag{3.7}$$

де G – модуль зсуву. Зауважимо, що функція $p(t)$, через яку виражено розв'язок (3.7), поки не визначена в області контакту $b \le x \le c$.

Гладкий контакт. Уведемо невідому функцію контактних напружень

$$\sigma(x) = -\frac{1}{2G}\sigma_y\Big|_{y=+0} \quad (b < x < c), \quad \sigma(x) = 0 \quad (-a < x < b, \; c < x < a). \qquad (3.8)$$

Поклавши $p(x) = \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=+0} = -2G\sigma(x) - \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0}$ і задовольнивши другим виразом (3.7) продиференційовану першу із крайових умов (3.1), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_b^c \frac{\sqrt{a^2 - t^2}\,\sigma(t)}{t - x}\,dt = f(x) \quad (b < x < c), \quad 2Gf(x) = \sigma_y^\infty x - \theta(x, z_0) \qquad (3.9)$$

$$\theta(x, z_0) = \frac{P}{\pi}\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{x - z_0} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{\kappa + 1}\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{z_1}{x - z_0}\right), \quad z_1 = \sqrt{z_0^2 - a^2}\,.$$

Обмежений його розв'язок визначає контактні напруження

$$\sigma_y\Big|_{y=+0} = \frac{1}{X_1(x)}\left[\sigma_y^\infty - \frac{P}{\pi}\operatorname{Im}\left(\frac{X_1(z_0)}{x - z_0} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{\kappa + 1}\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{X_1(z_0)}{x - z_0}\right)\right] \quad (b < x < c),$$

$$X_1(z) = (z^2 - a^2)\big/X(z), \quad X(z) = \sqrt{(z^2 - a^2)(z - b)(z - c)}\,. \qquad (3.10)$$

Із умови обмеженості розв'язку рівняння (3.9) і умови однозначності переміщень отримуємо систему трансцендентних рівнянь для визначення меж b і c області контакту:

$$\sigma_y^\infty \frac{b + c}{2} + \frac{P}{\pi}\operatorname{Im}\left[X_1(z_0) - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{\kappa + 1}X_1'(z_0)\right] = 0\,,$$

$$\sigma_y^\infty\left[\frac{b + c}{2}\mathbf{\Pi}_1(\nu_0, k) + (c - b)\nu_0\frac{\partial}{\partial \nu_0}\mathbf{\Pi}_1(\nu_0, k)\right] +$$

$$+\frac{P}{\pi}\operatorname{Im}\left[\left(1 - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{\kappa + 1}\frac{\partial}{\partial z_0}\right)X_1(z_0)\mathbf{\Pi}_1(\nu_1, k)\right] = 0\,, \qquad (3.11)$$

де $\nu_0 = -(a - c)/(a - b)$, $\nu_1 = \nu_0(b - z_0)/(c - z_0)$, $k = \sqrt{[(a + b)(a - c)]/[(a - b)(a + c)]}$, $\mathbf{\Pi}_1(\nu_0, k)$ – повний еліптичний інтеграл третього роду [4]. За симетричного навантаження ($x_0 = 0$) $b = -c$, умова обмеженості для рівняння (3.9) виконується автоматично, а параметр c знаходимо із другого рівняння (3.11).

На лінії продовження тріщини нормальні напруження мають такий самий вираз, як і у формулі (3.10), а дотичні $\tau_{xy}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^\infty |x|\Big/\sqrt{x^2 - a^2}$ ($|x| > a$). Звідси знаходимо коефіцієнти інтенсивності напружень:

$$K_{\mathrm{I}}(\pm a) = \lim_{x \to \pm a \pm 0}\sqrt{2\pi(\pm x - a)}\,\sigma_y\Big|_{y=0} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}(a \mp b)(a \mp c)}\left\{\sigma_y^\infty - \frac{P}{\pi}\operatorname{Im}\left[\frac{X_1(z_0)}{\pm a - z_0} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{\kappa + 1}\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{X_1(z_0)}{\pm a - z_0}\right)\right]\right\},$$

$$K_{\mathrm{II}}(\pm a) = \lim_{x\to\pm a\pm 0} \sqrt{2\pi(\pm x - a)}\,\tau_{xy}\Big|_{y=0} = \sqrt{\pi a}\,\tau_{xy}^{\infty}\,. \qquad (3.12)$$

За симетричного навантаження ($x_0 = 0$) береги тріщини частково контактують, якщо $P_0 < P < P_1$ (при $P = P_0$ область контакту вироджується в точку $x = 0$, а при $P = P_1$ – займає всю тріщину). Граничними переходами при $c \to 0$, $c \to a$ ($b = -c$) у другому рівнянні (3.11) отримаємо ($y_1 = \sqrt{y_0^2 + a^2}$):

$$P_0 = \pi\sigma_y^{\infty} a \left(\frac{2}{\kappa+1}\frac{a}{y_1} + \ln\frac{y_1 + a}{y_0} \right)^{-1}, \quad P_1 = \pi\sigma_y^{\infty} \frac{y_1^2}{y_0}\left(1 - \frac{2}{\kappa+1}\frac{a^2 - y_0^2}{y_1^2} \right)^{-1}. \qquad (3.13)$$

Ковзний контакт. Як випливає зі співвідношень (3.7), нормальні напруження $\sigma_y\big|_{y=0}$ в області контакту та на продовженні тріщини, коефіцієнт K_{I} та межі b і c області контакту є такими самими, як і для гладкого контакту.

Із першої рівності (3.7) з урахуванням співвідношення (3.10) та першої умови (3.11) знаходимо розподіл дотичних напружень на лінії продовження тріщини

$$\tau_{xy}\Big|_{y=0} = -\mu_0\,\sigma_y\Big|_{y=0} + \frac{\operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\left[\left(\tau_{xy}^{\infty} + \mu_0\sigma_y^{\infty} \right) x - \mu_0\theta(x, z_0) \right] \quad (|x| > a\,) \qquad (3.14)$$

та визначаємо коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень

$$K_{\mathrm{II}}(\pm a) = -\mu_0 K_{\mathrm{I}}(\pm a) + \sqrt{\pi a}\left[\tau_{xy}^{\infty} + \mu_0\sigma_y^{\infty} \mp (\mu_0/a)\theta(\pm a, z_0) \right]. \qquad (3.15)$$

Для $x_0 = 0$ із нерівності (3.4′) з використанням другого співвідношення (3.7) отримаємо умову ковзного контакту:

$$\tau_{xy}^{\infty} \ge \mu_0 \left(P/P_0 - 1 \right) \sigma_y^{\infty}\,. \qquad (3.16)$$

За порушення цієї умови всередині області контакту виникає зона зчеплення.

Контакт зі зчепленням і проковзуванням. Уведемо невідому функцію лінійної комбінації дотичних і нормальних напружень у зоні зчеплення:

$$\tau(x) = -\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy} + \mu_0\sigma_y \right)\Big|_{y=+0} \quad (b' < x < c'). \qquad (3.17)$$

При цьому нормальні напруження $\sigma_y\big|_{y=+0}$ ($b' < x < c'$) відомі та визначаються першою рівністю (3.10). Крім того, $\tau(x) = 0$, якщо $-a < x < b'$, $c' < x < a$.

Поклавши у (3.7) $p(x) = -2G\left[\sigma(x) - i\tau(x) \right] - \sigma_y^{(1)}\big|_{y=0}$ і задовольнивши продиференційовану першу із крайових умов (3.4), одержимо сингулярне інтегральне рівняння

$$\frac{1}{\pi}\int_{b'}^{c'} \frac{\sqrt{a^2 - t^2}\,\tau(t)}{t - x}\,dt = f_1(x) \quad (b' < x < c'), \quad f_1(x) = \frac{\tau_{xy}^{\infty}}{2G}x + \mu_0 f(x)\,, \qquad (3.18)$$

де $f(x)$ – права частина рівняння (3.9).

Аналогічно, як і під час гладкого контакту, знаходимо обмежений розв'язок інтегрального рівняння (3.18) і визначаємо межі b', c' зони зчеплення. У результаті дотичні напруження

$$\tau_{xy}\Big|_{y=+0} = -\mu_0\,\sigma_y\Big|_{y=+0} + \frac{1}{\mathrm{X}_2(x)}\left[\tau_{xy}^{\infty} + \mu_0\sigma_y^{\infty} - \frac{\mu_0 P}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{X}_2(z_0)}{x-z_0} - \frac{z_0-\bar{z}_0}{\kappa+1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\mathrm{X}_2(z_0)}{x-z_0}\right)\right] \quad (b' < x < c',\ |x| > a\,), \qquad \mathrm{X}_2(z) = \sqrt{\frac{z^2-a^2}{(z-b')(z-c')}}\,. \qquad (3.19)$$

Рівняння (3.11) переходять у рівняння для визначення b', c' формальною заміною σ_y^{∞} на $\sigma_y^{\infty} + \tau_{xy}^{\infty}/\mu_0$.

Із (3.19) знаходимо коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень:

$$K_{\mathrm{II}}(\pm a) = -\mu_0 K_{\mathrm{I}}(\pm a) + \sqrt{\frac{\pi}{a}\left(a\mp c'\right)(a\mp b')}\,\times$$

$$\times\left[\tau_{xy}^{\infty} + \mu_0\sigma_y^{\infty} - \frac{\mu_0 P}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{X}_2(z_0)}{\pm a - z_0} - \frac{z_0-\bar{z}_0}{\kappa+1}\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\mathrm{X}_2(z_0)}{\pm a - z_0}\right)\right]. \qquad (3.20)$$

Умову (3.4′) перевіряли, обчислюючи стрибок тангенціальних переміщень у зонах проковзування із використанням другої рівності (3.7).

Обчислювали для коефіцієнта Пуассона $\nu = 0{,}3$ за симетричного нормального навантаження, коли лінія дії сил P проходить через середину тріщини ($x_0 = 0$), а відстань між точками прикладання сил $2y_0 = 1$. При цьому найменше відносне значення сил $P_0/(\sigma_y^{\infty} a) = 1{,}509$ відповідає точковому контакту (у точці $x = 0$, $y = 0$), а найбільше значення $P_1/(\sigma_y^{\infty} a) = 13{,}744$ – повному контакту берегів тріщини ($b = -a$, $c = a$). Область контакту симетрична відносно середини тріщини ($b = -c$). Відносні координати $\bar{c} = c/a$ правого краю області контакту та нормалізовані коефіцієнти інтенсивності нормальних напружень $\bar{K}_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}(\pm a)\big/(\sqrt{a}\sigma_y^{\infty})$ для різних відносних значень сил $\bar{P} = P/(\sigma_y^{\infty} a)$ подано у табл. 3.1. За відсутності зосереджених сил ($P = 0$) $\bar{K}_{\mathrm{I}} = \sqrt{\pi} = 1{,}772$, а за точкового контакту ($\bar{c} = 0$) $\bar{K}_{\mathrm{I}} = 0{,}902$, тобто майже вдвічі зменшується внаслідок прикладання зосереджених сил $P = P_0$. Із подальшим збільшенням сил P величина $\bar{K}_{\mathrm{I}}$ зменшується. Коли $P = P_1$, тріщина повністю закривається і $\bar{K}_{\mathrm{I}} = 0$.

Таблиця 3.1

$\bar{P}$	1,6	2	3	4	5	6	8	10	12	13
$\bar{c}$	0,083	0,204	0,361	0,464	0,546	0,616	0,735	0,836	0,927	0,970
$\bar{K}_{\mathrm{I}}$	0,874	0,783	0,624	0,505	0,408	0,326	0,194	0,096	0,029	0,008

На рис. 3.2 зображено розподіли відносних нормальних контактних напружень $\bar{\sigma} = \sigma_y\big|_{y=0} \Big/ \sigma_y^{\infty}$ для відносних значень сил $\bar{P} = 2;\, 5;\, 10;\, 13{,}744$ (криві *1*–*4*). Розподіли відносних дотичних контактних напружень $\bar{\tau} = \tau_{xy}\big|_{y=0} \Big/ (\mu_0 \sigma_y^{\infty})$ за контакту зі зчепленням і проковзуванням подано на рис. 3.3 для $\bar{P} = 5$. Криві *1*–*5* відповідають значенням $\tau_{xy}^{\infty} = \alpha\mu_0 \left(P/P_0 - 1\right)\sigma_y^{\infty}$, $\alpha = 0{,}2;\, 0{,}4;\, 0{,}6;\, 0{,}8;\, 1$. При цьому відносні розміри зони зчеплення $c'/a = 0{,}407;\, 0{,}308;\, 0{,}224;\, 0{,}141$ відповідно, тобто зі збільшенням зсувного навантаження τ_{xy}^{∞} зона зчеплення звужується. Якщо $\tau_{xy}^{\infty} = 0$ ($\alpha = 0$), вона займає всю область контакту ($c'/a = c/a = 0{,}546$). Якщо $\alpha = 1$, зникає ($c'/a = 0$). У точці $x = c'$ переходу зі зони зчеплення у зону проковзування графіки дотичних напружень мають характерні злами. При цьому дотичні напруження змінюються з необмеженим градієнтом на краю зони зчеплення.

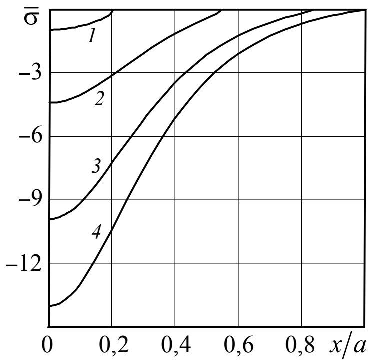


Рис. 3.2

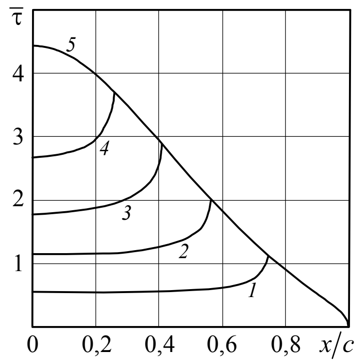


Рис. 3.3

У табл. 3.2 подано нормалізовані коефіцієнти інтенсивності дотичних напружень $\bar{K}_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}}(\pm a) \big/ (\sqrt{a}\,\tau_{xy}^{\infty})$ для $\bar{P} = 5$ і різних значень параметра α, який задає дотичні напруження на нескінченності: $\tau_{xy}^{\infty} = \alpha\mu_0 \left(P/P_0 - 1\right)\sigma_y^{\infty}$. Значення $\alpha < 1$ відповідають контакту зі зчепленням і проковзуванням, $\alpha \ge 1$ – ковзному. Якщо напруження τ_{xy}^{∞} необмежено зростають порівняно з σ_y^{∞} ($\alpha \to \infty$), то $\bar{K}_{\mathrm{II}} \to \sqrt{\pi} = 1{,}772$, як і під час гладкого контакту (згідно з другою із формул (3.12)).

Таблиця 3.2

α	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	2	5	10	20
$\bar{K}_{\mathrm{II}}$	0,924	0,978	1,024	1,070	1,116	1,226	1,444	1,642	1,707	1,740

3.2. Міжфазна тріщина у кусково-однорідній площині

3.2.1. Напівнескінченна тріщина

Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини, що міститься на межі поділу двох різнорідних пружних півплощин, а до її берегів прикладені зосереджені сили, розглянута в праці [39] без урахування сил тертя в області контакту та в [2, 32, 35] в умовах фрикційного контакту берегів. У цій задачі, згідно з моделлю Комніноу [10, 55], контакт берегів тріщини виникає біля її вершини. Разом з тим отримані у [2, 32, 39] розв'язки є осцилюючими на нескінченності, що вказує на необхідність введення напівнескінченної області контакту на певному віддаленні від точок прикладання зосереджених сил, щоб усунути взаємне перекриття берегів тріщини.

Розглянемо [29] дві пружні півплощини $0 \le r < \infty$, $0 \le \vartheta \le \pi$ і $0 \le r < \infty$, $-\pi \le \vartheta \le 0$ з модулями зсуву G_1, G_2 та коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно, які жорстко з'єднані між собою вздовж променя $\vartheta = 0$. На берегах напівнескінченної тріщини $\vartheta = \pm\pi$ у кусково-однорідній площині на однаковій відстані $r = a$ від початку координат прикладені зосереджені нормальні та дотичні сили інтенсивностей P і Q (рис. 3.4). Припускаємо, що вказане навантаження призводить до виникнення двох областей контакту берегів тріщини: скінченної $0 < r \le r_0$, $\vartheta = \pm\pi$ поблизу вершини тріщини та напівнескінченної $r_1 \le r < \infty$, $\vartheta = \pm\pi$, де нормальний тиск і дотичні зусилля пов'язані законом тертя Амонтона (Кулона). Довжина r_0 скінченної та відстань r_1 напівнескінченної областей до вершини тріщини заздалегідь невідомі.

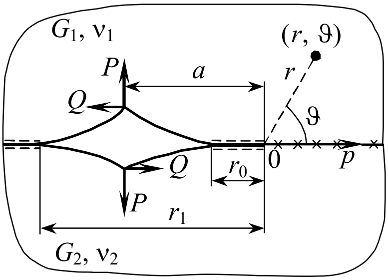


Рис. 3.4

Крайові умови задачі мають вигляд

$$u_r^{(1)}\Big|_{\vartheta=0} = u_r^{(2)}\Big|_{\vartheta=0}, \quad u_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=0} = u_\vartheta^{(2)}\Big|_{\vartheta=0}, \quad \sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=0} = \sigma_\vartheta^{(2)}\Big|_{\vartheta=0},$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=0} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{\vartheta=0}, \quad \sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} = \sigma_\vartheta^{(2)}\Big|_{\vartheta=-\pi}, \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{\vartheta=-\pi} \quad (0 \le r < \infty),$$

$$u_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} = u_\vartheta^{(2)}\Big|_{\vartheta=-\pi}, \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} = \mathrm{sign}(a-r)\mu_0\, \sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} \quad (0 < r \le r_0,\ r_1 \le r < \infty),$$

$$\sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} = -P\delta(r-a), \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} = Q\delta(r-a) \quad (r_0 < r < r_1), \tag{3.21}$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя, $\delta(r-a)$ – дельта-функція Дірака. При цьому знак біля μ_0 у восьмій рівності із (3.21) вибрано за припущення, що

$$\Delta u_r < 0 \quad (0 < r \le r_0), \quad \Delta u_r > 0 \quad (r_1 \le r < \infty), \quad \Delta u_r = u_r^{(2)}\Big|_{\vartheta=-\pi} - u_r^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi}. \tag{3.22}$$

Уведемо невідому функцію тиску в областях контакту

$$q(r)=\sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} \quad (0<r\le r_0,\ r_1\le r<\infty),\quad q(r)=0 \quad (r_0<r<r_1), \tag{3.23}$$

і розглянемо першу крайову задачу для кусково-однорідної площини з напівнескінченним розрізом, коли на його берегах задано однакові напруження

$$\sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi}=-P\delta(r-a)-q(r)\,,\quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi}=Q\delta(r-a)+\operatorname{sgn}(r-a)\mu_0 q(r) \quad (0\le r<\infty).$$

Задовольнивши розв'язком цієї задачі умову $u_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi}=u_\vartheta^{(2)}\Big|_{\vartheta=-\pi}$ в областях контакту і виконавши заміну $r=r_0e^{-\xi}$ ($a=r_0e^{-t_0}$, $r_1=r_0e^{-t_1}$), для функції $\varphi(\eta)=$ $=q(r_0e^{-\eta})\,e^{-\eta}$ отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta+\int_{-\infty}^{t_1} k(\eta-\xi)\varphi(\eta)d\eta=f(\xi) \quad (-\infty<\xi<t_1,\ 0<\xi<\infty), \tag{3.24}$$

$$k(\xi-\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\pi\tau\operatorname{ch}\pi(\tau+i\gamma)}{\tau\operatorname{ch}\pi(\tau+\theta)\operatorname{ch}\pi(\tau-\theta)}e^{-i\tau(\xi-\eta)}d\tau\,,\quad \gamma=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{(\alpha-1)\mu_0}{\alpha+1}\,,$$

$$f(\xi)=-\frac{\cos\pi\gamma}{\pi r_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[P\operatorname{ch}\pi\tau-iQ\operatorname{th}\pi\theta\operatorname{sh}\pi\tau]\operatorname{sh}\pi\tau}{\tau(\operatorname{ch}2\pi\tau+\operatorname{ch}2\pi\theta)}e^{-i\tau(\xi-t_0)}d\tau\,,$$

$$\alpha=\frac{G_1+\chi_1G_2}{G_2+\chi_2G_1}>1\,,\quad \chi_1=3-4\nu_1\,,\quad \chi_2=3-4\nu_2\,,\quad \theta=\frac{1}{2\pi}\ln\alpha\,.$$

Одна область контакту ($0<r\le r_0$, $Q\ge 0$). Розв'язки, отримані раніше [32, 39] за дії нормальних сил та відсутності дотичних ($Q=0$) без урахування напівнескінченної області контакту ($t_1=-\infty$), мають осциляції нормальних переміщень берегів тріщини у зоні, віддаленій від точки прикладання сил на відстань, яка на декілька (не менше шести) порядків менша, ніж розмір a. Це означає, що за введення напівнескінченної області контакту її відстань від точки прикладання сил буде співмірною з відстанню до зони осциляцій, а похибки отриманих у працях [32, 39] розв'язків в області $0\le r\le a$ є незначними (не більш, ніж 10^{-6}).

Під час прикладання дотичних сил $Q>0$ (разом із нормальними) розміри r_0 і r_1 збільшуються порівняно з випадком $Q=0$ [2], а похибка від нехтування контакту берегів тріщини в області $r_1\le r<\infty$ стає ще меншою. Таким чином, якщо $Q\ge 0$, так само, як і раніше [2, 32, 39], вилучаємо із розгляду напівнескінченну область контакту, поклавши $r_1=\infty$, $t_1=-\infty$, і замість (3.24) маємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta=f(\xi) \quad (0<\xi<\infty). \tag{3.25}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (3.25), отриманий методом Вінера–Гопфа [23], має вигляд

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^{+}(\tau)}{K^{+}(\tau)}e^{-i\tau\xi}d\tau\,,\quad K^{+}(\tau)=\frac{\Gamma(1/2-i\tau-i\theta)\,\Gamma(1/2-i\tau+i\theta)}{\Gamma(1-i\tau)\,\Gamma(1/2-i\tau+\gamma)}\,,$$

$$f^{+}(\tau)=-\frac{2\cos\pi\gamma}{r_0\sqrt{(2\pi)^3}}\,\mathrm{Re}\left((P-iQ)e^{(1/2+i\theta)t_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(t_0)}{k+1/2+i(\theta+\tau)}\right),$$

$$b_k(t_0)=\frac{\Gamma(k+1/2+i\theta)\Gamma(k+1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(k+1+2i\theta)k!}e^{kt_0}\quad(k=0,1,\ldots).\tag{3.26}$$

Із умови обмеженості напружень у точках $r=r_0$, $\vartheta=\pm\pi$ маємо рівняння

$$\mathrm{Re}\left[(P+iQ)\frac{\Gamma(1-\gamma-i\theta)}{\Gamma(1-i\theta)}e^{-i\theta(t_0-2\ln 2)}\,{}_2F_1(1/2-i\theta,\,1-\gamma-i\theta;\,1-2i\theta;\,e^{t_0})\right]=0\tag{3.27}$$

для визначення відносного розміру $r_0/a=e^{t_0}$ області контакту. За гладкого контакту гіпергеометричну функцію із (3.27) виразимо через елементарні функції [38] і розмір області контакту знаходимо у вигляді

$$r_0=ae^{t_0}=a\,\mathrm{ch}^{-2}\left(\frac{1}{2\theta}\mathrm{arctg}\frac{P}{Q}\right)\quad(\mu_0=0).\tag{3.28}$$

Перетворивши інтеграл із (3.26) у ряд за теорією лишків, визначимо контактні напруження ($0<r\le r_0$):

$$\sigma_{\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi}=-\frac{\mathrm{ch}^2\pi\theta}{\pi^2 r_0}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(1)}\,\mathrm{Re}\left(P_0(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n(t_0)}{n-k-1/2+i\theta}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k}+$$

$$+\frac{1+\mu_0^2}{\pi^2 r_0}\mathrm{sh}^2\pi\theta\cos^2\pi\gamma\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(2)}\,\mathrm{Re}\left(P_0(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n(t_0)}{n-k-\gamma+i\theta}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-1/2+\gamma},\tag{3.29}$$

$$P_0(t_0)=(P-iQ)e^{(1/2+i\theta)t_0}\,,\quad a_k^{(1)}=\frac{\left|\Gamma(k+3/2+i\theta)\right|^2}{\Gamma(k+3/2-\gamma)k!}\,,\quad a_k^{(2)}=\frac{\left|\Gamma(k+1+\gamma+i\theta)\right|^2}{\Gamma(k+1/2+\gamma)k!}\,.$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень знаходимо у вигляді

$$K_{\mathrm{II}}=-\sqrt{2\pi a r_0}\lim_{r\to 0}\left(r/r_0\right)^{1/2-\gamma}\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=0}=$$

$$=-(1+\mu_0^2)\sqrt{\frac{a}{2\pi^3 r_0}}\,\mathrm{sh}\,2\pi\theta\cos\pi\gamma\cdot a_0^{(2)}\,\mathrm{Re}\left(P_0(t_0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n(t_0)}{n-\gamma+i\theta}\right),$$

$$K_{\mathrm{II}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}(P^2+Q^2)}\,\mathrm{ch}\,\pi\theta\quad(\mu_0=0).\tag{3.30}$$

Дві області контакту ($0<r\le r_0$, $r_1\le r<\infty$, $Q<0$). У цьому випадку, коли напрямок дотичних сил протилежний тому, як це показано на рис. 3.4, розмір r_0 області контакту біля вершини тріщини є надто малим (ще меншим,

ніж при $Q=0$), а відстань r_1 від вершини тріщини до напівнескінченної області контакту стає співмірною з відстанню a до точок прикладання сил. Спочатку знаходимо розв'язок задачі поза малим околом вершини тріщини, нехтуючи мікрозону контакту, а потім, з урахуванням визначених напружень у напівнескінченній області контакту, отримуємо розв'язок в околі вершини тріщини за контакту її берегів у цьому околі.

Для визначення координати $r_1 = ae^{-t_0'}$ краю напівнескінченної області контакту маємо рівняння

$$\operatorname{Re}\left[(P-iQ)\frac{\Gamma(1-\gamma-i\theta)}{\Gamma(1-i\theta)}e^{-i\theta(t_0'-2\ln 2)}\,{}_2F_1(1/2-i\theta,1-\gamma-i\theta;1-2i\theta;e^{t_0'})\right]=0\,. \quad (3.31)$$

Контактні напруження в області $r_1<r<\infty$ знаходимо у вигляді

$$\sigma_\vartheta^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi} = -\frac{r_1\operatorname{ch}^2\pi\theta}{\pi^2 r^2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(1)}\operatorname{Re}\left(P_1(t_0')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n(t_0')}{n-k-1/2+i\theta}\right)\left(\frac{r_1}{r}\right)^k +$$

$$+\frac{1+\mu_0^2}{\pi^2 r^2}r_1\operatorname{sh}^2\pi\theta\cos^2\pi\gamma\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(2)}\operatorname{Re}\left(P_1(t_0')\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n(t_0')}{n-k-\gamma+i\theta}\right)\left(\frac{r_1}{r}\right)^{k-1/2+\gamma},$$

$$P_1(t_0')=(P+iQ)e^{(1/2+i\theta)t_0'}\,. \quad (3.32)$$

Розмір мікрозони контакту з точністю до малої величини порядку $e^{-\pi/\theta}$ є

$$r_0 = 16e^{-\pi/\theta}r_1 \quad (\mu_0=0). \quad (3.33)$$

Розрахунки виконано для значення $\operatorname{th}\pi\theta=0{,}25$ (якщо, наприклад, $\nu_1 = 0{,}25$, $\nu_2=0{,}3$, то $G_2/G_1=6$). У табл. 3.3 і 3.4 для однієї області контакту берегів тріщини біля її вершини за різних значень коефіцієнта тертя μ_0 і відношення сил Q/P наведено відносні розмір r_0/a області контакту і коефіцієнт інтенсивності напружень $\bar{K}_{II}=K_{II}\Big/\sqrt{P^2+Q^2}$ відповідно. За відсутності тертя ($\mu_0=0$) значення $\bar{K}_{II}=0{,}8241$ не залежить від Q/P. За тертя ($\mu_0>0$) коефіцієнт $\bar{K}_{II}$ найбільший за дії тільки нормальних сил P; зі збільшенням дотичних сил Q він монотонно зменшується і при $Q/P\to\infty$, коли край області контакту наближається до точок прикладання сил ($r_0/a\to 1$), переходить у значення, характерне для гладкого контакту.

Відносний розмір r_0/a області контакту **Таблиця 3.3**

μ_0 \ Q/P	0	1	2	5	10	20	50	100
0	$1{,}63\cdot10^{-8}$	$2{,}55\cdot10^{-4}$	0,0133	0,298	0,702	0,911	0,985	0,996
0,25	$1{,}68\cdot10^{-8}$	$2{,}64\cdot10^{-4}$	0,0137	0,306	0,714	0,918	0,987	0,997
0,5	$1{,}74\cdot10^{-8}$	$2{,}73\cdot10^{-4}$	0,0142	0,315	0,726	0,925	0,989	0,998

Відносний коефіцієнт інтенсивності напружень $\bar{K}_{\mathrm{II}}$ **Таблиця 3.4**

μ_0 \ Q/P	0	1	2	5	10	20	50	100
0,25	0,8478	0,8478	0,8476	0,8448	0,8389	0,8329	0,8279	0,8261
0,5	0,8732	0,8732	0,8730	0,8670	0,8545	0,8420	0,8319	0,8281

На рис. 3.5 подано розподіли відносних напружень $\bar{\sigma} = (P^2 + Q^2)^{-1/2} \times \times \sigma_{\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=\pi,0}$, $\bar{\tau} = \frac{1}{5}(P^2 + Q^2)^{-1/2}\, \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{\vartheta=0}$ на межі поділу півплощин для однієї області контакту. При цьому декартову координату x межі відліковували від вершини тріщини ($x = 0$) і зв'язали її з полярними координатами так, що $x = r$, якщо $x > 0$, $\vartheta = 0$, і $x = -r$, якщо $x < 0$, $\vartheta = \pi$, а точка прикладання сил на кожному березі тріщини має координату $x = -a$. Суцільні лінії стосуються фрикційної моделі контакту з коефіцієнтом тертя $\mu_0 = 0{,}5$, штрихові – моделі гладкого контакту ($\mu_0 = 0$). Криві *1–3* відповідають нормальним напруженням $\bar{\sigma}$ і побудовані для відношення сил $Q/P = 5, 10, 20$. Криві *4* – дотичним напруженням $\bar{\tau}$. Штрихова крива *4* одна і та ж для вказаних значень Q/P, суцільна крива *4* побудована для $Q/P = 20$. Суцільні криві для $\bar{\tau}$ при $Q/P = 5, 10$ не показані і займають проміжне положення між штриховою та суцільною кривими *4*.

Для двох областей контакту розподіли відносних напружень $\bar{\sigma}$, $\bar{\tau}$ подано на рис. 3.6. Нумерація кривих така ж, як і на рис. 3.5, із заміною значень $Q/P = 5, 10, 20$ на $-5, -10, -20$ відповідно. Відносна координата краю напівнескінченної області контакту згідно з даними табл. 3.3 становить $x/a = -a/r_0 = -3{,}18; -1{,}38; -1{,}08$ для $\mu_0 = 0{,}5$ і $-3{,}36; -1{,}43; -1{,}10$ для $\mu_0 = 0$.

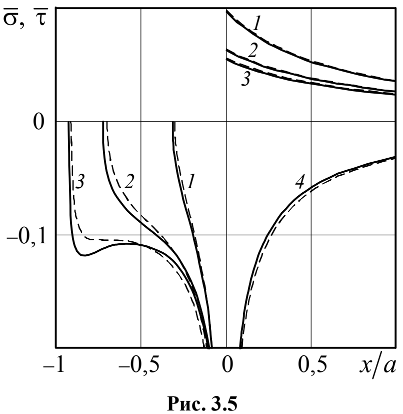


Рис. 3.5

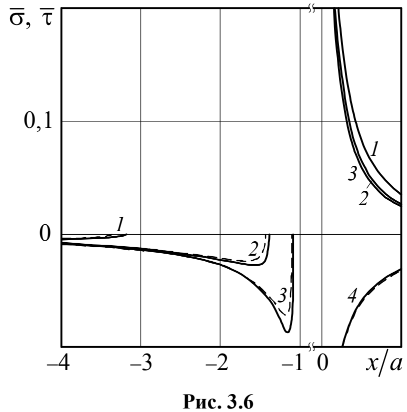


Рис. 3.6

Хоча нормальні напруження на лінії з'єднання півплощин скінченні, але надзвичайно великі (значення $\bar{\sigma}$ при $x/a = +0$ має порядок величини $e^{\pi/(2\theta)} = 2,5 \cdot 10^8$). Напруження в мікрозоні контакту на рисунку не показані тому, що її відносний розмір r_0/a за формулою (3.33) у $e^{\pi/\theta}/16 = 0,39 \cdot 10^{16}$ разів менший, ніж відносний розмір r_1/a. Незважаючи на такий нереально малий розмір r_0, вводити мікрозону контакту необхідно для визначення коефіцієнта інтенсивності напружень, відносні значення $\bar{K}_{\text{II}}$ якого такі ж самі, як і для одної області контакту (для протилежних значень Q) і містяться у табл. 3.4.

3.2.2. Скінченна тріщина

Розглянемо напружено-деформований стан кусково-однорідної площини зі скінченною тріщиною на прямолінійній межі поділу. У праці [10] зауважили, що за розтягу та зсуву біля однієї вершини тріщини утворюється мікрозона контакту, а біля другої – відносно велика зона контактного тиску. Числове розв’язування цієї задачі у межах моделей гладкого і фрикційного контакту запропоновано в працях [58] і [57] відповідно. Нижче наведено розв’язування в замкненому вигляді контактної задачі для міжфазної тріщини за розтягу та зсуву згідно з фрикційною моделлю контакту [26]. Аналітичні розв'язки іншими методами отримано раніше в [2, 5, 37].

Розглянемо дві пружні півплощини $y \geq 0$, $y \leq 0$ з модулями зсуву G_1, G_2 і коефіцієнтами Пуасона ν_1, ν_2 відповідно, жорстко з'єднані між собою вздовж променів $x \leq -a$, $x \geq a$ осі Ox. Береги тріщини $-a < x < a$, $y = \pm 0$ вільні від зовнішніх сил. На нескінченності прикладені розтягувальні p_∞ і зсувні q_∞ напруження (рис. 3.7). Згідно з моделлю Комніноу вважаємо, що біля вершин тріщини виникають області контакту $-a < x \leq -c$, $b \leq x < a$, $y = 0$ її берегів, де нормальні та дотичні напруження зв’язані законом тертя Амонтона. Розміри цих областей заздалегідь невідомі й визначаються розв’язком задачі.

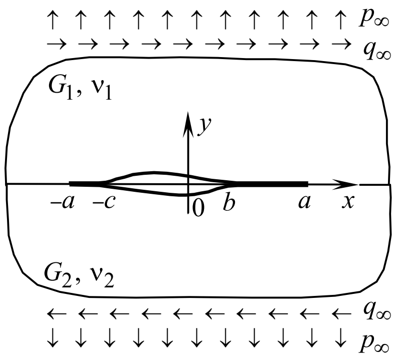


Рис. 3.7

Змішані крайові умови на лінії поділу півплощин мають вигляд

$$u_x^{(1)}\Big|_{y=0} = u_x^{(2)}\Big|_{y=0}, \quad u_y^{(1)}\Big|_{y=0} = u_y^{(2)}\Big|_{y=0}, \quad \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0},$$

$$\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_{y=0} \ (|x| \geq a), \quad u_y^{(1)}\Big|_{y=0} = u_y^{(2)}\Big|_{y=0} \ (-a < x \leq -c,\ b \leq x < a),$$

$$\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_{y=0} = \operatorname{sign} x \cdot \mu_0\, \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \operatorname{sign} x \cdot \mu_0\, \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0} \;\; (-a < x \le -c\,,\; b \le x < a\,),$$

$$\sigma_y^{(j)}\Big|_{y=0} = 0\,, \quad \tau_{xy}^{(j)}\Big|_{y=0} = 0\,, \quad j = 1,\, 2 \quad (-c < x < b\,), \tag{3.34}$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя.

Уведемо невідомі функції контактних напружень

$$\sigma_1(\alpha) = -\frac{1}{2G_1}\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} \;\; (\alpha_1 \le \alpha < \infty\,,\; b \le x < a\,),$$

$$\sigma_2(\alpha) = -\frac{1}{2G_1}\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} \;\; (-\infty < \alpha \le -\alpha_2\,,\; -a < x \le -c\,). \tag{3.35}$$

Тут α – одна з біполярних координат α , β (див. підрозділ 9.1 із [36]). Значення $\alpha = \alpha_1$ відповідає точці $x = b$, а $\alpha = -\alpha_2$ – точці $x = -c$, тобто $b = a\,\mathrm{th}(\alpha_1/2)$, $c = a\,\mathrm{th}(\alpha_2/2)$ ($\alpha_{1,2} > 0$).

Аналогічно до задачі із підрозділу 9.1 [36] для функцій $\varphi_1(\eta) = \sigma_1(\alpha_1 + {}$ $+\eta)/[\mathrm{ch}(\alpha_1 + \eta) + 1]$, $\varphi_2(\eta) = \sigma_2(-\alpha_2 - \eta)/[\mathrm{ch}(\alpha_2 + \eta) + 1]$ отримаємо систему інтегральних рівнянь (9.10) із [36], у ядрах якої параметр γ із (9.8) слід замінити на $-\gamma$, а права частина має вигляд

$$f(\alpha) = \frac{i}{2G_1\sqrt{\mathrm{ch}^2\pi\theta + \mu_0^2\mathrm{sh}^2\pi\theta}}\,\mathrm{Re}\left[(p_\infty - iq_\infty)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{e^{-i\theta\alpha}}{\mathrm{ch}(\alpha/2)}\right)\right], \tag{3.36}$$

де величина θ виражена через пружні сталі півплощин рівностями (3.24).

Систему інтегральних рівнянь зводимо до нескінченної системи алгебричних рівнянь (9.17), (9.18) із [36], у якій

$$L_{jk} = \frac{\Gamma(k+3/2-i\theta)\Gamma(k+1-\gamma-i\theta)}{\Gamma(k+1-2i\theta)k!}e^{-k\alpha_j}\left\{(-1)^k\frac{p_\infty - (-1)^j iq_\infty}{2G_1}\frac{k+1/2-i\theta}{\cos\pi\gamma} + \right.$$

$$\left. + (1+i\mu_0)z_k^{(3-j)}e^{-(k+1/2-i\theta)\alpha_{3-j}}\right\}. \tag{3.37}$$

Числовий аналіз цієї системи рівнянь свідчить, що відносна довжина $\overline{l}_2 = {}$ $= (a-c)/(2a)$ області контакту біля лівої вершини тріщини є дуже малою. Зокрема $\overline{l}_2$, коли $\mathrm{th}\,\pi\theta = 0{,}5$ при $p_\infty/q_\infty = 0;\ 0{,}5;\ 1$, має відповідно порядки 10^{-8}, 10^{-7} , 10^{-6} . Тому отримані співвідношення з високою точністю (порядку $\overline{l}_2$) можна асимптотично спростити. Нехтуючи множник $e^{-\alpha_2}$ у формулі (3.37), одержуємомо $L_{2k} = 0$ ($k = 1,\, 2,\, \ldots$) та знаходимо:

$$L_{1k} = \frac{\Gamma(k+3/2-i\theta)\Gamma(k+1-\gamma-i\theta)}{\Gamma(k+1-2i\theta)k!}e^{-k\alpha_1}(-1)^k\frac{p_\infty + iq_\infty}{2G_1}\frac{k+1/2-i\theta}{\cos\pi\gamma} \quad (k = 0,\, 1,\, \ldots\,),$$

$$L_{20} = \frac{\Gamma(3/2-i\theta)\Gamma(1-\gamma-i\theta)}{\Gamma(1-2i\theta)}\left[\frac{p_\infty - iq_\infty}{2G_1}\frac{1/2-i\theta}{\cos\pi\gamma} + (1+i\mu_0)z_0^{(1)}e^{-(1/2-i\theta)\alpha_1}\right]. \tag{3.38}$$

Рівняння (9.18) із [36] при $j=1$ тепер дають явні вирази значень $z_n^{(1)}$ через невідому α_1; при $j=2$, $e^{-\alpha_2}=0$ знаходимо $z_n^{(2)}=0$ ($n=0, 1, ...$).

Параметр α_1 довжини області контакту біля правої вершини тріщини (відносна довжина цієї області $\overline{l_1}=(a-b)/(2a)=\left(1-\text{th}(\alpha_1/2)\right)/2$) знаходимо із трансцендентного рівняння (9.17) із [36] при $j=1$, яке запишемо через гіпергеометричну функцію:

$$\text{Re}\left[Ae^{i\theta\alpha_1}\,{}_2F_1\left(\frac{3}{2}-i\theta, 1-\gamma-i\theta; 1-2i\theta; -e^{-\alpha_1}\right)\right]=0, \qquad (3.39)$$

$$A=e^{2i\theta\ln 2}(p_\infty+iq_\infty)\left(\frac{1}{2}-i\theta\right)\frac{\Gamma(1-\gamma-i\theta)}{\Gamma(1-i\theta)}.$$

Відносний розмір області контакту біля лівої вершини тріщини виразимо із (9.17) із [36] при $j=2$ у явному вигляді

$$\overline{l_2}=\frac{a-c}{2a}=e^{-\alpha_2}, \quad \alpha_2=\frac{1}{\theta}\left(\frac{3\pi}{2}-\arg L_{20}-\text{arctg}2\theta\right), \qquad (3.40)$$

Розрахунки виконали, як і в працях [57, 58], для значення $\text{th}\,\pi\theta=0{,}5$. На рис. 3.8 подано залежність відносної довжини $\overline{l_1}=(a-b)/(2a)$ області контакту біля правої вершини тріщини від відношення розтягувального і зсувного навантажень $\overline{p}=p_\infty/q_\infty$ за гладкого ($\mu_0=0$, крива *1*) і фрикційного ($\mu_0=1$, крива *2*) контакту. Для порівняння для гладкого контакту побудовали штрихову криву за результатами праці [58]. Вплив коефіцієнта тертя μ_0 на відносний розмір $\overline{l_1}$ правої області контакту за тільки зсувного навантаження ($p_\infty=0$) ілюструє рис. 3.9 (суцільна крива). Відповідні дані праці [57] зображено штрихами. Виявили деяку розбіжність між отриманим розв'язком задачі та числовими розв'язками сингулярних інтегральних рівнянь, одержаними в працях [57, 58]. Ця розбіжність точного і наближеного розв'язків стає ще більшою під час обчислення відносної довжини $\overline{l_2}$ малої області контакту біля лівої вершини тріщини. Зокрема, за точним розв'язком, коли $\text{th}\,\pi\theta=0{,}5$, $p_\infty=0$, значення $\overline{l_2}$ змінюється від $1{,}00\cdot10^{-8}$ при $\mu_0=0$ до $1{,}26\cdot10^{-8}$ при $\mu_0=1$. Проте в праці

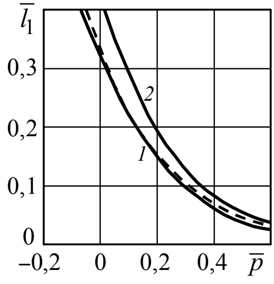


Рис. 3.8

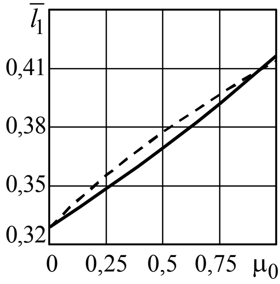


Рис. 3.9

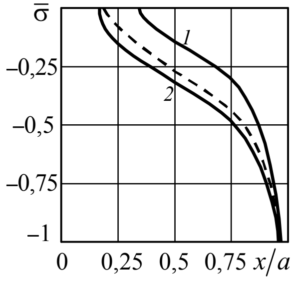


Рис. 3.10

[57] вважають, що $2\overline{l}_2$ набуває значень між 10^{-7} і 10^{-6}. Тобто числовий розв'язок не дає вірогідного значення довжини малої області контакту.

Значення нормалізованих коефіцієнтів інтенсивності зсувних напружень $\widehat{K}_{\mathrm{II}}(\pm a) = K_{\mathrm{II}}(\pm a)\left(1+\mu_0^2\,\mathrm{th}^2\pi\theta\right)\Big/\left(a^{1/2-\gamma}q_\infty\right)$, де $K_{\mathrm{II}}(\pm a) = \lim\limits_{x\to\pm a\pm 0}[2(\pm x - a)]^{1/2-\gamma}\times$ $\times\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0}$, за різних значень коефіцієнта тертя μ_0, коли $p_\infty = 0$, наведено у табл. 3.5. Розподіл контактних напружень $\overline{\sigma} = \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0}\Big/q_\infty$ у більшій області контакту ($b \le x < a$) за тільки зсувного навантаження ($p_\infty = 0$) зображено на рис. 3.10. Крива *1* відповідає гладкому ($\mu_0 = 0$), крива *2* (штрихова лінія – із [57]) – фрикційному ($\mu_0 = 1$) контакту берегів тріщини.

Таблиця 3.5

μ_0	0	0,3	0,5	0,7	1
$\widehat{K}_{\mathrm{II}}(a)$	0,585	0,688	0,795	0,942	1,258
$\widehat{K}_{\mathrm{II}}(-a)$	–1,208	–2,941	–5,347	–9,631	–22,459

3.2.3. Взаємодія двох напівнескінченних тріщин

Розглянемо [42] пружні півплощини $y \ge 0$ й $y \le 0$ зі сталими G_1, ν_1 і G_2, ν_2, жорстко з'єднані вздовж ділянки $-a \le x \le a$ їхньої межі $y = 0$. Поза цією ділянкою півплощини роз'єднують дві напівнескінченні тріщини $a < x < \infty$ і $-\infty < x < -a$ ($y = 0$). На нескінченності діють розтягувальні P_∞ і зсувні Q_∞ сили, а в точках $x = d_1$ і $x = d_2$ до берегів правої та лівої тріщин прикладено сили (Q_1, P_1) і (Q_2, P_2). Згідно з контактною моделлю Комніноу [10, 56] вважаємо, що поблизу вершин тріщини виникають області $a < x \le b$, $-c \le x < -a$ ($y = 0$) контактного тиску із проковзуванням берегів тріщин (рис. 3.11). Як відомо [10], за дії тільки нормального навантаження ($P_\infty \ge 0$, $P_1 \ge 0$, $P_2 \ge 0$, $Q_\infty = Q_1 = Q_2 = 0$) обидві області контакту надто малі (на декілька порядків менші, ніж розмір ділянки зчеплення півплощин). За дії однаково спрямованого дотичного навантаження ($Q_\infty \ge 0$, $Q_1 \ge 0$, $Q_2 \ge 0$) у

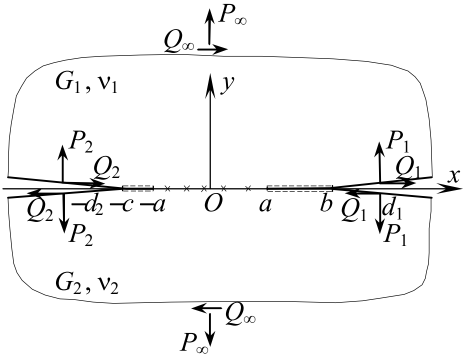


Рис. 3.11

разі жорсткішої нижньої півплощини розмір правої області контакту стає спів-мірним із довжиною ділянки зчеплення, а ліва область контакту залишається надто малою. Якщо ж складові Q_∞, Q_1, Q_2 дотичного навантаження мають різні знаки (наприклад, $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, $Q_\infty = 0$), то обидві області контакту можуть мати значну протяжність.

Змішані крайові умови на межі півплощин запишемо у вигляді

$$u_y^{(1)}\Big|_{y=0} = u_y^{(2)}\Big|_{y=0}, \quad \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0}, \quad \tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_{y=0} \quad (-c \le x \le b),$$

$$u_x^{(1)}\Big|_{y=0} = u_x^{(2)}\Big|_{y=0} \quad (-a \le x \le a), \quad \tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = -\operatorname{sign} x \cdot \mu_0 \, \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} \quad (-c \le x < -a,\ a < x \le b),$$

$$\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0} = -P_1\delta(x-d_1) - P_2\delta(x+d_2),$$

$$\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_{y=0} = -Q_1\delta(x-d_1) - Q_2\delta(x+d_2) \quad (-\infty < x < -c,\ b < x < \infty), \qquad (3.41)$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя, $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака. Знак при μ_0 вибрано так, що, якщо нижня пружна півплощина жорсткіша, ніж верхня, то взаємне проковзування меж верхньої та нижньоєї півплощини відбувається від області контакту, тобто $\operatorname{sign} x \cdot (u_x^{(1)} - u_x^{(2)})\big|_{y=0} > 0$ $(-c \le x < -a,\ a < x \le b)$.

Розглядувана задача має математичну аналогію із задачею про контакт зі зчепленням і проковзуванням двох пружних тіл із [36]. Її також зводимо до системи інтегральних рівнянь (9.10) із [36], у якій γ замінимо на $-\gamma$ і візьмемо

$$f(\alpha) = \frac{\cos \pi\gamma}{4\pi i G_1 a} \operatorname{Re}\left(\frac{P_\infty + iQ_\infty}{\operatorname{sh}(\alpha/2)} e^{i\theta\alpha} + \frac{P_1 + iQ_1}{\operatorname{sh}((\alpha - \alpha_1^*)/2)} e^{i\theta(\alpha - \alpha_1^*)} + \frac{P_2 + iQ_2}{\operatorname{sh}((\alpha + \alpha_2^*)/2)} e^{i\theta(\alpha + \alpha_2^*)} \right),$$

$$\alpha_{1,2}^* = \ln[(d_{1,2} + a)/(d_{1,2} - a)]. \qquad (3.42)$$

У нескінченній системі алгебричних рівнянь (9.18) із [36] величини L_{jk} задані третьою рівністю (9.15), у якій

$$N_{jk} = \frac{1}{4\pi a G_1}\left[\left(P_\infty - (-1)^j iQ_\infty\right) + \left(P_1 - (-1)^j iQ_1\right) e^{(-1)^{j+1}\theta_k \alpha_1^*} + \left(P_2 - (-1)^j iQ_2\right) e^{(-1)^j \theta_k \alpha_2^*} \right].$$

Напруження в областях контактного тиску та на лінії продовження тріщин визначають рівності (9.23) із [36], із яких випливає, що контактні напруження необмежені поблизу вершин тріщин:

$$\frac{1}{2G_1}\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} \sim \frac{1}{\pi}(1+\mu_0^2)\operatorname{sh}^2 \pi\theta \cos^2 \pi\gamma \cdot (2a)^{1/2+\gamma} \times \begin{cases} \gamma_{11} e^{-\gamma\alpha_1} (x-a)^{-1/2-\gamma}, & x \to a+0, \\ \gamma_{21} e^{-\gamma\alpha_2} (-a-x)^{-1/2-\gamma}, & x \to -a-0, \end{cases}$$

на краях зони зчеплення дотичні напруження також необмежені:

$$\frac{1}{2G_1}\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} \sim \frac{1}{2\pi}(1+\mu_0^2)\operatorname{sh} 2\pi\theta \cos \pi\gamma \cdot (2a)^{1/2+\gamma} \begin{cases} -\gamma_{11} e^{-\gamma\alpha_1} (a-x)^{-1/2-\gamma}, & x \to a-0, \\ \gamma_{21} e^{-\gamma\alpha_2} (a+x)^{-1/2-\gamma}, & x \to -a+0, \end{cases}$$

а нормальні обмежені:

$$\frac{1}{2G_1}\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} \sim -\frac{1}{\pi}\operatorname{ch}^2\pi\theta\times\begin{cases}\beta_{11}e^{\alpha_1/2},\ x\to a-0,\\ \beta_{21}e^{\alpha_2/2},\ x\to -a+0.\end{cases} \tag{3.43}$$

Звідси знаходимо коефіцієнти інтенсивності зсувних напружень:

$$K_{\mathrm{II}}((-1)^{j+1}a)=\lim_{x\to a-0}[2(a+(-1)^j x)]^{1/2+\gamma}\,\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}G_1(1+\mu_0^2)\operatorname{sh}2\pi\theta\cos\pi\gamma\cdot e^{-\gamma\alpha_j}(4a)^{1/2+\gamma}\gamma_{j1}\ \ (j=1,\,2). \tag{3.44}$$

Розглянемо випадок, коли до берегів тріщин на відстані від вершин, яка перевищує у півтора рази розмір зони зчеплення півплощин, прикладено симетрично зсувні сили ($d_1/a=d_2/a=4$, $Q_1>0$, $Q_2=-Q_1$, $P_1=P_2=0{,}005Q_1$, $P_\infty=0$, $Q_\infty=0$). У табл. 3.6 наведено значення відносного розміру областей контакту $b/a-1$ берегів тріщин (верхні значення) і безрозмірного коефіцієнта інтенсивності напружень $\widehat{K}_{\mathrm{II}}=Q_1 a^{-1/2-\gamma}K_{\mathrm{II}}(a)$ (нижні значення) для різних значень коефіцієнта тертя μ_0 та відношення модулів зсуву G_2/G_1 . Видно, що за неврахування тертя дістаємо занижені значення розміру областей контакту берегів тріщин і коефіцієнта інтенсивності напружень до 5 і 7 % відповідно.

Таблиця 3.6

μ_0 \ G_2/G_1	1,5	2	4	10	∞
0	0,600 0,1649	1,214 0,1659	2,042 0,1693	2,406 0,1738	2,590 0,1788
0,25	0,607 0,1664	1,238 0,1680	2,100 0,1728	2,475 0,1785	2,658 0,1847
0,5	0,614 0,1679	1,263 0,1701	2,159 0,1764	2,541 0,1835	2,722 0,1910

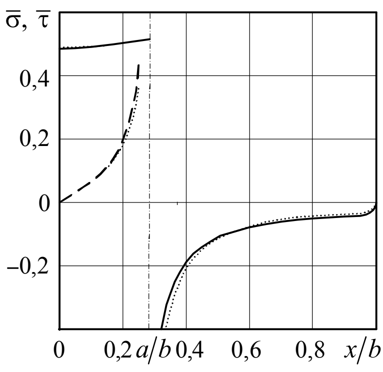


Рис. 3.12

На рис. 3.12 подано розподіли напружень на межі поділу півплощин, якщо $G_2/G_1=\infty$, $\mu_0=0{,}5$: нормальних напружень $\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0}=(Q_1/a)\bar\sigma$ (суцільні лінії) у зоні зчеплення півплощин ($0\le$ $\le x\le a$) й області контакту ($a<x\le b$) та дотичних $\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0}=0{,}1(Q_1/a)\bar\tau$ ($0\le x\le a$, штрихи). Для порівняння точками зображено відповідні залежності за гладкого контакту берегів тріщин ($\mu_0=0$).

3.3. Міжфазна кругова тріщина у кусково-однорідному просторі

У циліндричній системі координат (r, ϕ, ζ) розглянемо [33–35] два півпростори $\zeta \geq 0$, $\zeta \leq 0$ з модулями зсуву G_1, G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно, між якими в круговій області $r < a$, $0 \leq \phi < 2\pi$ їх межі $\zeta = 0$ знаходиться плоска тріщина. Поза тріщиною $r \geq a$, $0 \leq \phi < 2\pi$ півпростори жорстко з'єднані між собою вздовж своєї межі (рис. 3.13). На нескінченності прикладене розтягувальне навантаження p_∞. Згідно з моделлю Комніноу вважаємо, що біля контуру $r = a$, $\zeta = 0$ тріщини виникає кільцева область контактного тиску $a - \varepsilon \leq r < a$, $0 \leq \phi < 2\pi$, $\zeta = 0$ поверхонь тріщини $r < a$, $\zeta = \pm 0$. Припускаємо, що в області контакту відбувається взаємне проковзування поверхонь тріщини так, що нормальний тиск та дотичні зусилля підпорядковані закону тертя Амонтона. Ширина ε кільцевої області контакту заздалегідь невідома, яку треба визначити під час розв'язування задачі.

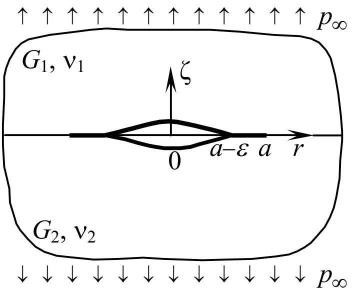


Рис. 3.13

У півпросторах виникає напружено-деформований стан, симетричний відносно осі $O\zeta$. Змішані крайові умови на межі поділу півпросторів такі:

$$u_\zeta^{(1)}\Big|_{\zeta=0} = u_\zeta^{(2)}\Big|_{\zeta=0}, \quad u_r^{(1)}\Big|_{\zeta=0} = u_r^{(2)}\Big|_{\zeta=0}, \quad \sigma_\zeta^{(1)}\Big|_{\zeta=0} = \sigma_\zeta^{(2)}\Big|_{\zeta=0}, \quad \tau_{r\zeta}^{(1)}\Big|_{\zeta=0} = \tau_{r\zeta}^{(2)}\Big|_{\zeta=0} \ (r \geq a),$$

$$u_\zeta^{(1)}\Big|_{\zeta=0} = u_\zeta^{(2)}\Big|_{\zeta=0} \ (a - \varepsilon \leq r < a), \quad \tau_{r\zeta}^{(j)}\Big|_{\zeta=0} = -\mu_0\, \sigma_\zeta^{(j)}\Big|_{\zeta=0} \ (a - \varepsilon \leq r < a),$$

$$\sigma_\zeta^{(j)}\Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \tau_{r\zeta}^{(j)}\Big|_{\zeta=0} = 0 \ (r < a - \varepsilon), \quad j = 1, 2, \tag{3.45}$$

де верхній індекс (1) відповідає півпростору $\zeta \geq 0$, а (2) – півпростору $\zeta \leq 0$, μ_0 – коефіцієнт тертя. Знак при μ_0 у шостій рівності (3.45) вибраний за припущення, що для тангенціальних переміщень в області контакту з проковзуванням виконується умова $u_r^{(1)}\Big|_{\zeta=0} - u_r^{(2)}\Big|_{\zeta=0} > 0$ $(a - \varepsilon \leq r < a)$, яку перевіряли під час розв'язання задачі.

Увівши невідому функцію контактних напружень

$$\sigma(\alpha) = -\frac{1}{2G_1}\sigma_\zeta^{(1)}\Big|_{\zeta=0} \quad (\alpha_0 \leq \alpha < \infty,\ a - \varepsilon \leq r < a,\ a - \varepsilon = a\,\mathrm{th}(\alpha_0/2)) \tag{3.46}$$

і застосувавши інтегральне перетворення Мелера–Фока за α – однією із тороїдних координат α, β [43], для функції $\varphi(\tau) = \sigma(\alpha_0 + \tau)/[\mathrm{ch}(\alpha_0 + \tau) - 1]$ отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k_0(t,\,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f_0(t) \quad (0<t<\infty), \tag{3.47}$$

$$k_0(t,\,\tau) = \operatorname{sh}\frac{\alpha_0+\tau}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2\pi\lambda}{\operatorname{ch}\pi(\lambda+\theta)\operatorname{ch}\pi(\lambda-\theta)} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0+\tau))P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0+t))d\lambda -$$

$$-\mu_0\operatorname{th}\pi\theta\cdot\int_0^\infty \frac{\lambda\operatorname{th}\pi\lambda\operatorname{sh}^2\pi\lambda}{\operatorname{ch}\pi(\lambda+\theta)\operatorname{ch}\pi(\lambda-\theta)} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0+t))d\lambda \int_0^{\alpha_0+\tau}\operatorname{sh}\frac{\eta}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\eta)d\eta,$$

$$f_0(t) = -\frac{p_\infty}{G_1}\int_0^\infty \frac{\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda}{\operatorname{ch}\pi(\lambda+\theta)\operatorname{ch}\pi(\lambda-\theta)} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0+t))d\lambda,$$

де $P_s(\operatorname{ch}\eta)$ – функція Лежандра, а параметр θ визначено у (3.24).

Оскільки відносний розмір ε/a області контакту надто малий, асимптотично спростимо інтегральне рівняння (3.47) при $\alpha_0\to\infty$ ($\varepsilon/a\to 0$). При цьому використаємо асимптотичні формули [3]

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\xi) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi/2}\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(1/2+i\lambda)}e^{i\lambda\xi}\right),$$

$$\int_0^\xi \operatorname{sh}\frac{\eta}{2}P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}\eta)d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{Re}\left(\frac{\Gamma(i\lambda)}{i\lambda\Gamma(1/2+i\lambda)}e^{i\lambda\xi}\right) + \frac{1}{\lambda\operatorname{sh}\pi\lambda} + o(1), \quad \xi\to\infty. \tag{3.48}$$

У результаті інтегральне рівняння (3.47) набуває вигляду (3.25), у якому ядро є $\frac{d}{d\xi}k(\xi-\eta)$, де $k(\xi-\eta)$ узято із (3.24), а права частнина

$$f(\xi) = -\frac{2p_\infty}{\sqrt{\pi}G_1\sqrt{\operatorname{ch}^2\pi\theta+\mu_0^2\operatorname{sh}^2\pi\theta}}\operatorname{Re}\left[\frac{\Gamma(1+i\theta)}{\Gamma(1/2+i\theta)}(1/2+i\theta)e^{-(1/2+i\theta)(\alpha_0+\xi)}\right], \tag{3.49}$$

і розв'язується аналітично методом Вінера–Гопфа [23]. Напруження на межі півпросторів знаходимо в явному вигляді [33–35]. Ширина області контакту

$$\varepsilon = 2ae^{-\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2\theta} - 2\ln 2 + \frac{1}{\theta}\arg\left[\left(\frac{1}{2}+i\theta\right)\frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1/2+i\theta)}\right], \tag{3.50}$$

де γ визначено у (3.24). Коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_{\mathrm{II}} = p_\infty^{-1}\sqrt{2\pi\varepsilon/a}\lim_{r\to a+0}\left((r-a)/\varepsilon\right)^{1/2-\gamma}\tau_{r\zeta}^{(1)}\Big|_{\zeta=0} =$$

$$= 2\theta\sqrt{\pi^3(1+4\theta^2)}\left(\operatorname{sh}\pi\theta\cos\pi\gamma\,\Gamma(1/2+\gamma)\left|\Gamma(1/2+i\theta)\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|\right)^{-1}. \tag{3.51}$$

Числові значення відносної ширини області контакту ε/a і коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II}, які обчислені за формулами (3.50) і (3.51) за різних значень коефіцієнта тертя μ_0 і відношення модулей зсуву G_1/G_2 для $\nu_1=\nu_2=0{,}3$, подані у табл. 3.7 і 3.8. Припущення, що $\varepsilon/a \ll 1$, зроблене за

асимтотичного спрощення інтегрального рівняння, підтверджують табличні дані величини ε/a, яка при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\mu_0 = 0,5$ набуває найбільшого значення $1,56 \cdot 10^{-8}$, коли один з півпросторів є абсолютно жорстким ($G_1/G_2 = \infty$). Зі зростанням коефіцієнта тертя μ_0 і відношення модулей зсуву G_1/G_2 матеріалів півпросторів відносна ширина області контакту ε/a і коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} збільшуються.

Значення ε/a ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$) **Таблиця 3.7**

μ_0 \ G_1/G_2	1,5	2	4	10	∞
0	$9,31 \cdot 10^{-39}$	$9,99 \cdot 10^{-24}$	$1,15 \cdot 10^{-13}$	$2,80 \cdot 10^{-10}$	$1,44 \cdot 10^{-8}$
0,25	$9,38 \cdot 10^{-39}$	$1,01 \cdot 10^{-23}$	$1,18 \cdot 10^{-13}$	$2,88 \cdot 10^{-10}$	$1,50 \cdot 10^{-8}$
0,5	$9,44 \cdot 10^{-39}$	$1,02 \cdot 10^{-23}$	$1,20 \cdot 10^{-13}$	$2,98 \cdot 10^{-10}$	$1,56 \cdot 10^{-8}$

Значення K_{II} ($\nu_1 = \nu_2 = 0,3$) **Таблиця 3.8**

μ_0 \ G_1/G_2	1,5	2	4	10	∞
0	1,130	1,132	1,141	1,152	1,164
0,25	1,137	1,144	1,163	1,183	1,203
0,5	1,144	1,157	1,186	1,216	1,245

3.4. Міжфазна напівнескінченна тріщина у кусково-однорідній смузі

Напружений стан пружної однорідної площини з прямолінійною тріщиною в умовах стиску та зсуву вивчено раніше [48]. Тріщину вважали повністю закритою, а її береги фрикційно контактували. Нижче розглянуто аналогічну задачу для напівнескінченної тріщини, яка знаходиться на межі поділу різнорідних матеріалів у пружній смузі. Частковий випадок цієї задачі, коли одна із складових смуг є абсолютно жорстка, розглянуто в працях [27, 28]. Залежно від відношення інтенсивностей зсувного та стискального навантажень тріщина може бути або повністю закритою, або частково розкритою на скінченному чи напівнескінченному інтервалі.

3.4.1. Закрита тріщина [30]

Кусково-однорідна смуга складена із двох різнорідних смуг $-\infty < x < \infty$, $-h_1 \le y \le 0$, $0 \le y \le h_2$ із модулями зсуву G_1, G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно (рис. 3.14). На частині $0 \le x < \infty$ межі $y = 0$ поділу матеріалів смуги жорстко з'єднані, а на іншій її частині $-\infty < x < 0$ кусково-однорідна смуга містить напівнескінченну тріщину. Грані $y = -h_1$, $y = h_2$ загальної смуги з'єднані із жор-

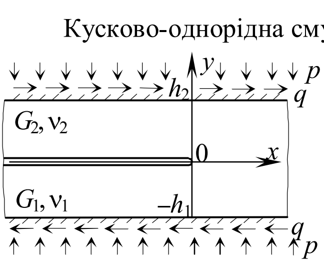


Рис. 3.14

сткими стінками, до яких прикладені стискальне та зсувне рівномірно розподілені навантаження інтенсивностей p і q. Вважаємо, що між берегами тріщини $y=\pm 0$ відбувається фрикційний контакт згідно із законом Амонтона.

Крайові умови задачі мають вигляд

$$u_y^{(1)}\Big|_{y=0} = u_y^{(2)}\Big|_{y=0} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_{y=0} = -\mu_0\,\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = -\mu_0\,\sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0} \quad (-\infty < x < 0),$$

$$u_x^{(1)}\Big|_{y=0} = u_x^{(2)}\Big|_{y=0}, \quad \sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0}, \quad \tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty),$$

$$u_x^{(1)}\Big|_{y=-h_1} = 0, \quad u_y^{(1)}\Big|_{y=-h_1} = 0, \quad u_x^{(2)}\Big|_{y=h_2} = \delta_2, \quad u_y^{(2)}\Big|_{y=h_2} = -\delta_1 \quad (-\infty < x < \infty), \qquad (3.52)$$

μ_0 – коефіцієнт тертя; δ_1, δ_2 – нормальне та тангенціальне відносні зміщення стінок, які визначаємо із умов на нескінченності ($x \to \pm\infty$):

$$\delta_1 = \left(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}\frac{h_1}{G_1} + \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2}\frac{h_2}{G_2}\right)\frac{p}{2}, \quad \delta_2 = \left(\frac{h_1}{G_1} + \frac{h_2}{G_2}\right)(2q - \mu_0 p). \qquad (3.53)$$

Друга із крайових умов (3.52) вказує на проковзування верхнього берега тріщини відносно нижнього у напрямку до її вершини, що справедливо за значного зсуву, коли $q > \mu_0 p$.

Уведемо невідому функцію

$$g(x) = \frac{1}{2G_1}(\tau_{xy}^{(1)} + \mu_0\sigma_y^{(1)})\Big|_{y=0} \quad (0 < x < \infty) \qquad (3.54)$$

та подамо її у вигляді $g(x) = (q-\mu_0 p)/G_1 + g_*(x)$, $g_*(\infty) = 0$.

Із залученням розв'язку (8.4) із [13] основної змішаної задачі для смуги маємо:

$$\frac{1}{h_1}\left(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}\right)\Big|_{y=0} = -\frac{q-\mu_0 p}{2G_1}\left(K(0) + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\mu h_1)}{\mu}e^{-i\mu x}d\mu\right) +$$

$$+\int_0^{\infty} g_*(r)dr\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(\mu h_1)e^{-i\mu(x-r)}d\mu, \quad K(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\tau\Delta(\tau)}, \quad K(0) = 2\left(1+\bar{G}\bar{h}\right),$$

$$\lambda(\tau) = \lambda^{(1)}(\tau)\Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G}^2\lambda^{(2)}(\bar{h}\tau)\Delta_1^{(1)}(\tau) +$$

$$+\bar{G}\left[\lambda_{11}^{(1)}(\tau)\lambda_{22}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{22}^{(1)}(\tau)\lambda_{11}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{12}^{(1)}(\tau)\lambda_{21}^{(2)}(\bar{h}\tau) + \lambda_{21}^{(1)}(\tau)\lambda_{12}^{(2)}(\bar{h}\tau)\right],$$

$$\Delta(\tau) = \Delta^{(1)}(\tau)\Delta_1^{(2)}(\bar{h}\tau) + \bar{G}\Delta^{(2)}(\bar{h}\tau)\Delta_1^{(1)}(\tau), \quad \bar{h} = h_2/h_1, \quad \bar{G} = G_1/G_2,$$

$$\lambda^{(j)}(\tau) = [\lambda_{11}^{(j)}(\tau)\lambda_{22}^{(j)}(\tau) - \lambda_{12}^{(j)}(\tau)\lambda_{21}^{(j)}(\tau)]/\Delta_1^{(j)}(\tau) = (3-4\nu_j)^2(\mathrm{ch}2\tau - 1) - 2\tau^2,$$

$$\Delta^{(j)}(\tau) = \lambda_{11}^{(j)}(\tau) - (-1)^j\mu_0\lambda_{12}^{(j)}(\tau), \quad \lambda_{11}^{(j)}(\tau) = 2(1-\nu_j)[(3-4\nu_j)\mathrm{sh}2\tau - 2\tau],$$

$$\lambda_{12}^{(j)}(\tau) = -\lambda_{21}^{(j)}(\tau) = -2i[(3-4\nu_j)(1-2\nu_j)\mathrm{sh}^2\tau - \tau^2], \quad \lambda_{22}^{(j)}(\tau) = 2(1-\nu_j)\times$$

$$\times[(3-4\nu_j)\mathrm{sh}2\tau + 2\tau], \quad \Delta_1^{(j)}(\tau) = (3-4\nu_j)(\mathrm{ch}2\tau - 1) + 2\tau^2 + 8(1-\nu_j)^2 \quad (j = 1, 2). \qquad (3.55)$$

Задовольнивши першим виразом із (3.55) третю із крайових умов (3.52) і виконавши заміни $x = h_1\xi$, $r = h_1\eta$, $\mu = \tau/h_1$, для функції $\varphi(\xi) = g_*(h_1\xi)$ отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k(\xi-\eta)\varphi(\eta)d\eta = f(\xi) \quad (0<\xi<\infty), \tag{3.56}$$

$$k(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}d\tau, \quad f(\xi) = \frac{q-\mu_0 p}{2G_1}\left(K(0) + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\tau)}{\tau}e^{-i\tau\xi}d\tau\right),$$

яке розв'язано методом Вінера–Гопфа [23].

Коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень

$$K_{\mathrm{II}} = 2(q-\mu_0 p)(2\pi h_1)^\rho\sqrt{\frac{K(0)}{\pi\kappa}}\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{\mu_0\tilde{\lambda}_{12}(\zeta)\operatorname{th}\pi\rho - \tilde{\lambda}_{11}(\zeta)\operatorname{th}\pi\zeta}{\tilde{\lambda}_{11}(\zeta)\operatorname{th}\pi\rho + \mu_0\tilde{\lambda}_{12}(\zeta)\operatorname{th}\pi\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta}\right\},$$

$$\tilde{\lambda}_{1j}(\zeta) = i^{j-1}\left[\lambda_{1j}^{(1)}(\zeta)\Delta_1^{(2)}(\bar{h}\zeta) - (-1)^j\bar{G}\lambda_{1j}^{(2)}(\bar{h}\zeta)\Delta_1^{(1)}(\zeta)\right] \quad (j = 1,\ 2), \tag{3.57}$$

де $\kappa = \left[1+(3-4\nu_2)\bar{G}\right](\operatorname{th}\pi\theta+1)$, $\rho = 1/2-(1/\pi)\operatorname{arctg}\left(\mu_0\operatorname{th}\pi\theta\right)$, а θ узято із (3.24).

На рис. 3.15 подано розподіли безрозмірних дотичних $\tau_{xy}^{(1)}/q$ і нормаль-

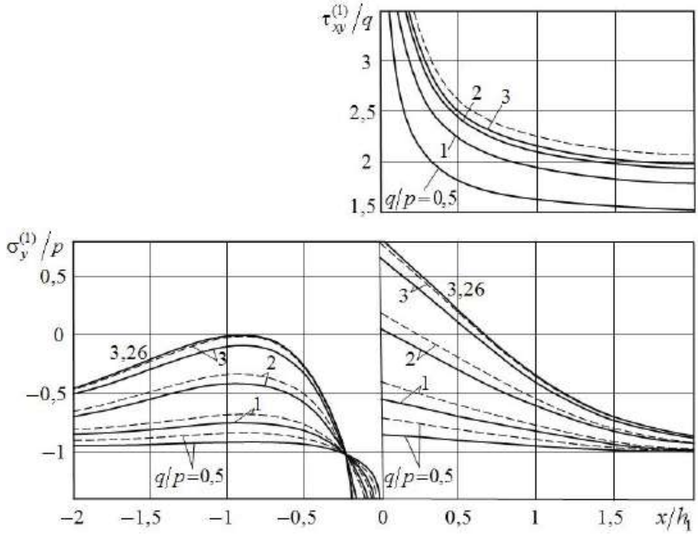


Рис. 3.15

них $\sigma_y^{(1)}/p$ напружень на лінії поділу матеріалів ($y = 0$) для абсолютно жорсткої верхньої смуги ($G_2/G_1 = \infty$, $\nu_1 = 1/3$) за різних відношень інтенсивностей q/p зсувного та стискального навантажень ($q/p = 0,5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 3,26$). Суцільні криві відповідають фрикційному контакту берегів тріщини ($\mu_0 = 0,25$), а штрихові – гладкому ($\mu_0 = 0$). Тертя між берегами закритої тріщини суттєво знижує

дотичні напруження $\tau_{xy}^{(1)}/q$ на продовженні тріщини ($x>0$). При цьому зі збільшенням відношення q/p дотичні напруження зростають і наближаються, якщо $q/p\to\infty$, до тих самих значень, яких набувають за відсутності тертя незалежно від відношення q/p. Тертя не так відчутно зменшує нормальні напруження $\sigma_y^{(1)}/p$ на продовженні тріщини. Якщо $q/p<2$, нормальні напруження $\sigma_y^{(1)}$ на продовженні за вершину тріщини ($x>0$) стискальні ($\sigma_y^{(1)}<0$). Якщо $q/p\ge 2$, вони переходять у розтягувальні ($\sigma_y^{(1)}>0$) у певному околі вершини тріщини. Зі збільшенням зсувного навантаження напруження $\sigma_y^{(1)}$ зростають як на продовженні, так за абсолютними значеннями і на тріщині поблизу її вершини на інтервалі $-h_1/4<x<0$ завдовжки у чверть ширини нижньої смуги, де абсолютні значення напружень необмежено збільшуються. На всій іншій частині тріщини ($x<-h_1/4$) зі зростанням q/p напруження $\sigma_y^{(1)}$ зменшуються за абсолютними значеннями і, якщо коефіцієнт тертя $\mu_0=0,25$, за відношення $q/p=3,2614$ стають нульовими у точці $x/h_1=0,9$. Подальше збільшення відношення q/p призводить до появи на тріщині ділянки, яка містить усередині точку $x/h_1=0,9$, де ці напруження стають додатними. Це вказує на часткове розкриття берегів тріщини, що суперечить поставі задачі. Таким чином, коли $q/p>3,2614$ (якщо $\mu_0=0,25$), розв'язок задачі втрачає зміст і її необхідно розглядати в уточненому формулюванні з уведенням зони відриву, яка відповідає розкриттю тріщини на певній її частині. За відсутності тертя ($\mu_0=0$) максимальне значення напружень $\sigma_y^{(1)}$ сягає нуля, якщо $q/p=3,05$.

Таблиця 3.9

$G_2/G_1=1,5$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5	8	15,79
$\tilde{K}_{\mathrm{II}}$	1,246	1,869	2,077	2,181	2,243	2,284	2,367	2,414	2,453

$G_2/G_1=2$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5	8	9,52
$\tilde{K}_{\mathrm{II}}$	1,262	1,893	2,104	2,209	2,272	2,314	2,398	2,445	2,458

$G_2/G_1=4$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	5	5,35
$\tilde{K}_{\mathrm{II}}$	1,300	1,949	2,166	2,274	2,339	2,382	2,469	2,478

$G_2/G_1=\infty$

q/p	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,26
$\tilde{K}_{\mathrm{II}}$	1,370	2,055	2,283	2,397	2,466	2,512	2,530

Нормалізовані значення коефіцієнта інтенсивності напружень $\tilde{K}_{\text{II}} = \pi^{-\rho+1/2} q^{-1} (2h_1)^{-\rho} K_{\text{II}}$ залежно від відношення зусиль q/p при $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$, $\mu_0 = 0,25$ і різних відношеннях модулей зсуву G_2/G_1 наведено у табл. 3.9. Коефіцієнт $\tilde{K}_{\text{II}}$ монотонно зростає зі збільшенням зсувного навантаження. Коли відношення зусиль досягає критичного значення (останній стовбчик), яке відповідає початку відриву берегів тріщини, його значення збігається з відповідним значенням $\tilde{K}_{\text{II}}$ за відсутності тертя, незалежно від відношення q/p. За переходу до однорідної смуги ($G_2/G_1 \to 1$) критичне значення відношення q/p необмежено зростає, що вказує на відсутність розкриття тріщини за дії як комбінованого навантаження, так і тільки зсувного (якщо $p = 0$).

3.4.2. Часткове розкриття тріщини

Узагальнимо розглянуту у п. 4.1 задачу, передбачивши розкриття тріщини на певному інтервалі $-l_2 < x < -l_1$, який міститься всередині тріщини і межі якого $x = -l_2$, $x = -l_1$ ($l_2 > l_1 > 0$) заздалегідь невідомі (рис. 3.16). Як з'ясовано у п. 4.1, відрив берегів тріщини відбувається за перевищення відношення інтенсивностей зсувного та нормального навантажень q/p деякого критичного значення $\overline{q}_*$ ($\overline{q}_* = 3,05$ і 3,26, якщо $G_2/G_1 = \infty$, $\nu_1 = 1/3$, а $\mu_0 = 0$ і 0,25 відповідно).

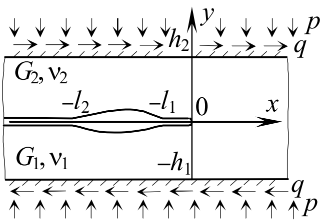


Рис. 3.16

Для першої та другої із крайових умов (3.52) вилучаємо інтервал $-l_2 < x < -l_1$, на якому тепер $\sigma_y^{(1)}\Big|_{y=0} = \sigma_y^{(2)}\Big|_{y=0} = 0$, $\tau_{xy}^{(1)}\Big|_{y=0} = \tau_{xy}^{(2)}\Big|_{y=0} = 0$.

Для функцій $\varphi_1(\xi) = g_1(h_1\xi) - q_0$ $(0 < \xi < \infty)$, $\varphi_2(\xi) = g_2(h_1\xi)$ $(-c < \xi < -b)$, де $2G_1 g_1(x) = (\tau_{xy}^{(1)} + \mu_0 \sigma_y^{(1)})\big|_{y=0}$ $(0 < x < \infty)$, $g_2(x) = (u_y^{(1)} - u_y^{(2)})\big|_{y=0}$ $(-l_2 < x < -l_1)$, $q_0 = (q - \mu_0 p)/G_1$, $b = l_1/h_1$, $c = l_2/h_1$, задачу зводимо до системи рівнянь

$$\int_0^\infty k_{11}(\xi - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \int_{-c}^{-b} k_{12}(\xi - \eta)\varphi_2(\eta)d\eta = f_1(\xi) \quad (0 < \xi < \infty),$$

$$\int_0^\infty k_{21}(\xi - \eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \int_{-c}^{-b} k_{22}(\xi - \eta)\varphi_2(\eta)d\eta = f_2(\xi) \quad (-c < \xi < -b), \tag{3.58}$$

$$k_{mj}(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}(\tau) e^{-i\tau(\xi-\eta)} d\tau \quad (m,\ j = 1,\ 2),$$

$$K_{11}(\tau)=\frac{\lambda(\tau)}{\tau\Delta(\tau)},\quad K_{12}(\tau)=\frac{\lambda_1(\tau)}{\Delta(\tau)},\quad K_{21}(\tau)=-\frac{\lambda_{12}(\tau)}{\Delta(\tau)},\quad K_{22}(\tau)=\frac{\tau\Delta_1(\tau)}{\Delta(\tau)},$$

$$\lambda_1(\tau)=\lambda^{(1)}(\tau)\Delta_1^{(2)}(\bar h\tau)-\bar G\lambda^{(2)}(\bar h\tau)\Delta_1^{(1)}(\tau),\quad \Delta_1(\tau)=\Delta_1^{(1)}(\tau)\Delta_1^{(2)}(\bar h\tau),$$

$$f_1(\xi)=q_0\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(\tau)}{\tau^2\Delta(\tau)}e^{-i\tau\xi}d\tau+1\right),\quad f_2(\xi)=\frac{p}{2G_1}-\frac{q_0}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda_{12}(\tau)}{\tau\Delta(\tau)}e^{-i\tau\xi}d\tau .$$

Із застосуванням методу Вінера–Гопфа [23] цю систему інтегральних рівнянь звели [28] до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Межі інтервалу $-l_2<x<-l_1$ розкриття тріщини визначено із умов обмеженості напружень у точках $x=-l_2$, $x=-l_1$ ($y=0$).

На рис. 3.17 подано розподіли безрозмірних нормальних напружень $\bar\sigma=\sigma_y^{(1)}/p$ на лінії тріщини та її продовженні, якщо $G_2/G_1=\infty$, $\nu_1=1/3$, за різних відношень q/p інтенсивностей зсувного та стискального навантажень ($q/p=3{,}3$; 3,5; 4; 5). Суцільні криві відповідають фрикційному контакту берегів тріщини ($\mu_0=0{,}25$), штрихові – гладкому ($\mu_0=0$). Розподіли безрозмірних дотичних напружень $\bar\tau=\tau_{xy}^{(1)}/p$ мало змінюються зі зміною відношення q/p і займають проміжне положення між розподілами для $q/p=3$ ($\mu_0=0{,}25$) і $\mu_0=0$ (див. рис. 3.15, $q/p<\bar q_*$), а розподіли величини $\bar\tau$ за відсутності тертя, якщо $q/p>\bar q_*=3{,}26$, залишаються незмінними – такими, як при $q/p<\bar q_*$ (штрихова крива на рис. 3.15).

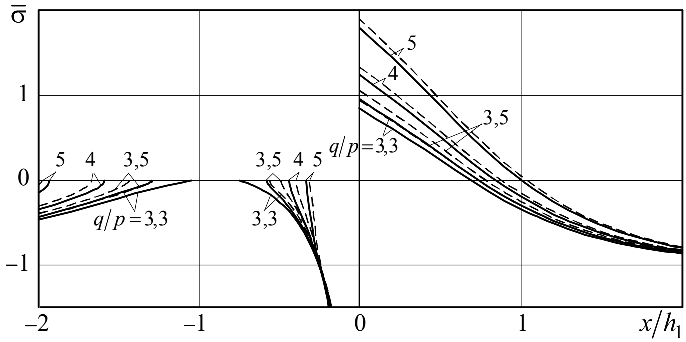


Рис. 3.17

Відносні нормальні переміщення $\bar u_y^{(1)}=\delta_1^{-1}u_y^{(1)}\Big|_{y=0}$ нижнього берега тріщини на ділянці $-l_2<x<-l_1$ її розкриття для $G_2/G_1=\infty$, $\nu_1=1/3$ ($u_y^{(2)}=0$) зображено на рис. 3.18. Відносні відстані $b=l_1/h_1$, $c=l_2/h_1$ меж ділянки розкриття тріщини від її вершини, відносні максимальні розкриття тріщини $d=-\delta_2^{-1}\min u_y^{(1)}\Big|_{y=0}$ (при $x=-0{,}9\cdot 2h$ для $q/p\le 5$ та $x=-2h$ для $q/p>5$), а та-

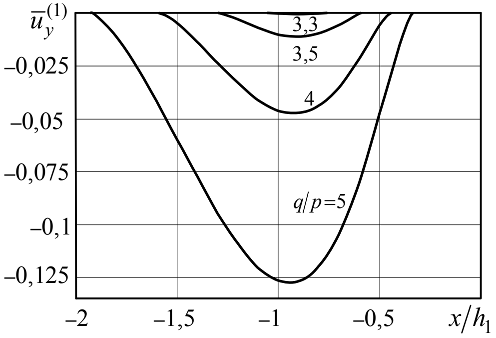


Рис. 3.18

кож нормалізовані значення коефіцієнта інтенсивності напружень $\tilde{K}_{\mathrm{II}} = \pi^{-\rho+1/2} q^{-1} (4h)^{-\rho} K_{\mathrm{II}}$ (для $\mu_0 = 0,25$) залежно від відношення зусиль q/p для $G_2/G_1 = \infty$, $\nu_1 = 1/3$ подано у табл. 3.10. За відсутності тертя ($\mu_0 = 0$) значення $\tilde{K}_{\mathrm{II}} = 2,5298$ не залежать від відношення q/p. Зі збільшенням q/p права межа $x = -l_1$ зони відриву берегів тріщини наближається до вершини тріщини, а ліва $x = -l_2$ необмежено віддаляється від вершини.При цьому тертя дещо зменшує розмір зони відриву. У граничному випадку, коли $q/p \to \infty$ (тільки зсувне навантаження q, $p = 0$), тріщина розкривається на напівнескінченному інтервалі $-\infty < x < -l_1^*$ ($l_1^* = 0,1536 \cdot h_1$, якщо $\mu_0 = 0,25$, і $l_1^* = 0,1492 \cdot h_1$, якщо $\mu_0 = 0$; $l_2 \to \infty$), а область контакту $-l_1^* \le x < 0$ стає скінченною.

Таблиця 3.10

q/p	$\mu_0 = 0$			$\mu_0 = 0,25$			
	b	c	$d \cdot 10^2$	b	c	$d \cdot 10^2$	$\tilde{K}_{\mathrm{II}}$
3,265	0,586	1,260	0,073	0,845	0,934	0,0002	2,530
3,3	0,566	1,290	0,089	0,754	1,054	0,007	2,532
3,5	0,495	1,431	0,180	0,586	1,296	0,082	2,544
4	0,401	1,671	0,393	0,443	1,591	0,296	2,566
5	0,316	1,984	0,713	0,337	1,931	0,651	2,596
10	0,213	2,786	1,375	0,221	2,755	1,358	2,653
100	0,155	5,379	1,961	0,159	5,359	1,960	2,701

3.4.3. Необмежена область розкриття тріщини

За тільки зсувного навантаження ($p = 0$, $q > 0$) або розтягувального та зсувного навантаження ($p = -p_1 < 0$, $q > 0$) тріщина розкривається на напівнескінченному інтервалі $-\infty < x < -l_1$ (рис. 3.19). Розмір l_1 області контакту $-l_1 \le x < 0$ її берегів заздалегідь невідомий і підлягає визначенню.

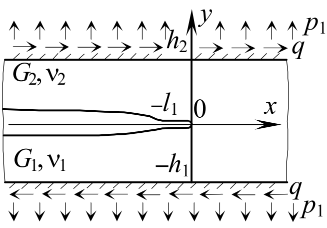


Рис. 3.19

Розв'язок отримуємо шляхом граничного переходу при $l_2 \to \infty$ із розв'язку задачі п. 4.2.

Таблиця 3.11

$-q/p$	1000	100	10	5	2	1	0,5	0,2
b	0,153	0,148	0,110	0,081	0,039	0,017	0,006	0,0007
$\tilde{K}_{\mathrm{II}}$	2,706	2,711	2,758	2,812	2,980	3,273	3,877	5,766

У табл. 3.11 для $G_2/G_1=\infty$, $\nu_1=1/3$, $\mu_0=0,25$ та різних відношень $-q/p$ дотичного та нормального навантажень наведено відносні розміри області контакту $b=l_1/(2h)$ і нормалізовані коефіцієнти інтенсивності напружень $\tilde{K}_{\mathrm{II}}=\pi^{-\rho+1/2}q^{-1}K_{\mathrm{II}}$. Зі збільшенням розтягувального навантаження $-p$ (при $q=\mathrm{const}$) розмір b області контакту зменшується, а коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} зростає.

3.5. Тріщина на межі поділу кругового включення і матриці

Розглянемо [41] всебічний розтяг пружної півплощини з відшарованим включенням (рис. 3.20). Модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона включення позначимо G_1 і ν_1, а матриці (площини із круговим отвором) – відповідно G_2 і ν_2. Візьмемо радіус включення $R=1$. Межа поділу ($r=1$) складається із дуг L' та L'', причому вздовж дуги L' ($\alpha\le\vartheta\le 2\pi-\alpha$) включення і матриця жорстко з'єднані, а вздовж дуги L'' ($-\alpha<\vartheta<\alpha$) є тріщина з вершинами у точках $a=e^{-i\alpha}$ і $b=e^{i\alpha}$ комплексної площини $re^{i\vartheta}$. Береги розрізу L'' вільні від зовнішнього навантаження, а на нескінченності задано розтягувальні напруження $\sigma_x^\infty=\sigma_y^\infty=\sigma^\infty$ ($\tau_{xy}^\infty=0$).

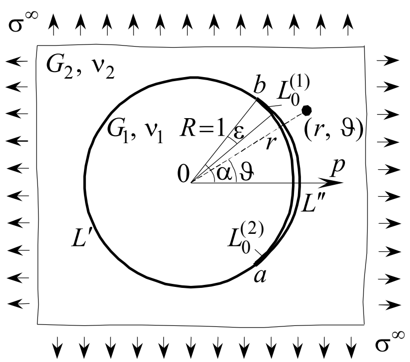


Рис. 3.20

Згідно з моделлю Комніноу вважаємо, що береги тріщини контактують уздовж дуг $L_0^{(1)}$ і $L_0^{(2)}$, прилеглих до вершин b і a тріщини. Припускаємо, що в областях контакту $L_0^{(1)}$ і $L_0^{(2)}$ є взаємне проковзування берегів тріщини і нормальний тиск та дотичні зусилля підпорядковуються закону тертя Амонтона (Кулона). Кутовий розмір ε областей контакту заздалегідь невідомий і підлягає визначенню.

Маємо такі змішані умови на межі розділу $L'\cup L''$ ($L_0^{(1)}\cup L_0^{(2)}\subset L''$) матриці та включення:

$$u_r^{(1)}\Big|_{r=1}=u_r^{(2)}\Big|_{r=1},\qquad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1}=\tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{r=1}=\operatorname{sign}\vartheta\cdot\mu_0\,\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1}=$$

$$= \operatorname{sign}\vartheta \cdot \mu_0 \, \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=1} \quad (\alpha - \varepsilon \le |\vartheta| < \alpha), \tag{3.59}$$

$$\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=1} = 0, \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{r=1} = 0 \quad (|\vartheta| < \alpha - \varepsilon), \tag{3.60}$$

$$u_\vartheta^{(1)}\Big|_{r=1} = u_\vartheta^{(2)}\Big|_{r=1}, \quad u_r^{(1)}\Big|_{r=1} = u_r^{(2)}\Big|_{r=1}, \quad \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} = \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=1},$$

$$\tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} = \tau_{r\vartheta}^{(2)}\Big|_{r=1} \quad (\alpha \le \vartheta \le 2\pi - \alpha). \tag{3.61}$$

Тут верхній індекс (1) відповідає включенню, (2) – матриці; μ_0 – коефіцієнт тертя. Знак $\operatorname{sign}\vartheta$ при μ_0 у другій умові (3.59) вибрано згідно із припущенням, що для колових переміщень в областях контакту справджується умова

$$\operatorname{sign}\vartheta \cdot \Delta u_\vartheta = \operatorname{sign}\vartheta \cdot (u_\vartheta^{(2)} - u_\vartheta^{(1)})\Big|_{r=1} < 0 \quad (\alpha - \varepsilon \le |\vartheta| < \alpha), \tag{3.62}$$

яку перевіряли після розв'язання задачі.

Уведемо невідому функцію контактного тиску

$$\sigma(t) = -\frac{1}{2G_1}\sigma_r^{(1)}\Big|_{r=1} \quad (t \in L_0^{(1)}, \ \alpha - \varepsilon \le \vartheta < \alpha). \tag{3.63}$$

Тоді напруження на берегах тріщини L'' запишемо у вигляді

$$\sigma_r^{(j)}\Big|_{r=1} = \begin{cases} -2G_1\sigma(t), & t \in L_0, \\ 0, & t \in L'' \setminus L_0, \end{cases} \quad \tau_{r\vartheta}^{(j)}\Big|_{r=1} = \begin{cases} -2G_1\mu_0 \operatorname{sign}\vartheta \cdot \sigma(t), & t \in L_0, \\ 0, & t \in L'' \setminus L_0 \end{cases}$$

$$(j = 1, 2), \quad L_0 = L_0^{(1)} \cup L_0^{(2)}. \tag{3.64}$$

Задовольнивши розв'язком першої крайової задачі з умовами (3.61), (3.64) для кусково-однорідної площини з розрізом L'' [47] першу із крайових умов (3.59), із нехтуванням взаємовпливу малих областей контакту $L_0^{(1)}$ і $L_0^{(2)}$ отримаємо інтегральне рівняння для функції $\sigma(t)$:

$$\mu_0 \operatorname{th}\pi\theta \cdot \sigma(t) - \operatorname{Im}\left((1 + i\mu_0)\frac{X(t)}{\pi i} \int_{L_0^{(1)}} \frac{\sigma(\tau)d\tau}{X(\tau)(\tau - t)} \right) =$$

$$= -\frac{2G_2C''}{\kappa_1 G_2 + G_1}\operatorname{Im}[(C_0 t + C_1)X(t)] \quad (t \in L_0^{(1)}), \tag{3.65}$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\kappa_2 G_1 + G_2}{\kappa_1 G_2 + G_1} > 0, \quad \kappa_j = 3 - 4\nu_j \ (j = 1, 2),$$

$$X(z) = (z - a)^{-1/2 - i\theta}(z - b)^{-1/2 + i\theta},$$

$$C'' = 1 - \frac{C'}{C_0(1 + e^{-2\pi\theta})}, \quad C_1 = -(\cos\alpha + 2\theta\sin\alpha)C_0,$$

$$C_0 = \frac{\kappa_2 G_1 + G_2}{4G_1G_2}\sigma^\infty - \frac{C}{2G_1}, \quad C' = \frac{C}{2}\frac{\kappa_1\kappa_2 - 1}{\kappa_2 G_1 + G_2},$$

$$C = \frac{\sigma^\infty}{2} \frac{\kappa_1 G_2 + G_1 - (\kappa_2 G_1 + G_2)\alpha_0}{\dfrac{(\kappa_1\kappa_2 - 1)G_1 G_2}{(\kappa_1 + 1)G_2 + (\kappa_2 + 1)G_1}(1-\alpha_0) + \kappa_1 G_2 + 2G_1 - G_2\alpha_0},$$

$$\alpha_0 = e^{-2\theta\alpha}(\cos\alpha + 2\theta\sin\alpha).$$

З огляду на мализну кутового розміру ε області контакту $L_0^{(1)}$ асимптотично спростимо при $\varepsilon \to 0$ рівняння (3.65). Виконавши заміни змінних $\tau = e^{i\alpha}(1 - i\varepsilon e^{-\eta})$, $t = e^{i\alpha}(1 - i\varepsilon e^{-\xi})$ ($0 < \eta, \xi < \infty$) і перейшовши до нової невідомої функції $\varphi(\eta) = \sigma(e^{i\alpha}(1 - i\varepsilon e^{-\eta}))e^{-\eta}$, отримаємо інтегральне рівняння на півосі (10.25) з різницевим ядром $\frac{d}{d\xi}k(\xi - \eta)$ і правою частиною:

$$f(\xi) = \frac{\sigma^\infty C''}{2G_1}\cos\pi\gamma \cdot \sqrt{\frac{\sin\alpha}{2\varepsilon}}\, e^{\theta(\pi-\alpha)}\,\mathrm{Re}\left((1-2i\theta)e^{i\alpha/2}e^{-i\theta\ln\frac{\varepsilon}{2\sin\alpha}}e^{-(1/2-i\theta)\xi}\right), \quad (3.66)$$

де $k(\xi - \eta)$ і γ такі, як у (3.24).

Асимптотично спрощене рівняння (3.65) розв'язано методом Вінера–Гопфа [23]. Напруження на межі матриці та включення знайдено у явному вигляді [41]. Кутовий розмір області контакту виражає рівність

$$\varepsilon = 8\sin\alpha \cdot \exp\left\{-\frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi-\alpha}{2} + \arg\left((1/2 + i\theta)\frac{\Gamma(1-\gamma+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)}\right)\right]\right\}. \quad (3.67)$$

Коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень

$$K_{\mathrm{II}} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^\infty}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \lim_{\vartheta\to\alpha+0}\left(\frac{\vartheta-\alpha}{\varepsilon}\right)^{1/2-\gamma} \tau_{r\vartheta}^{(1)}\Big|_{r=1} =$$

$$= \frac{\pi^2 C''\theta\sqrt{1+4\theta^2}\,\mathrm{cth}\,\pi\theta}{\Gamma(1/2+\gamma)\left|\Gamma(1+i\theta)\Gamma(1-\gamma+i\theta)\right|\cos\pi\gamma} e^{\theta(\pi-\alpha)}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \quad (3.68)$$

Числові значення кутового розміру області контакту ε і коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II}, які обчислені за формулами (3.67) і (3.68) за різних відношень модулів зсуву G_1/G_2 і кутів піврозхилу тріщини α для $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, подано у табл. 3.12 і 3.13. Верхні значення відповідають гладкому контакту ($\mu_0 = 0$), нижні – фрикційному ($\mu_0 = 0{,}5$) берегів тріщини. Припущення, що $\varepsilon << \alpha$, зроблене під час виведення інтегрального рівняння, підтверджують табличні дані величини ε, яка суттєво залежить як від кутового розміру тріщини, так і від відношення модулів зсуву включення та матриці. Зі зростанням відношення модулів зсуву G_1/G_2 матеріалів включення та матриці розмір області контакту ε і коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} збільшуються.

Значення ε **(** $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ **,** $\mu_0 = 0$ **та** $0{,}5$ **)** **Таблиця 3.12**

G_1/G_2 \ α	1°	30°	60°	90°	120°	150°
1,5	$1{,}05 \cdot 10^{-39}$ $1{,}06 \cdot 10^{-39}$	$3{,}26 \cdot 10^{-32}$ $3{,}31 \cdot 10^{-32}$	$9{,}91 \cdot 10^{-26}$ $1{,}01 \cdot 10^{-25}$	$2{,}01 \cdot 10^{-19}$ $2{,}04 \cdot 10^{-19}$	$3{,}05 \cdot 10^{-13}$ $3{,}10 \cdot 10^{-13}$	$3{,}09 \cdot 10^{-7}$ $3{,}14 \cdot 10^{-7}$
4	$9{,}34 \cdot 10^{-15}$ $9{,}77 \cdot 10^{-15}$	$2{,}64 \cdot 10^{-11}$ $2{,}76 \cdot 10^{-11}$	$5{,}29 \cdot 10^{-9}$ $5{,}53 \cdot 10^{-9}$	$7{,}06 \cdot 10^{-7}$ $7{,}39 \cdot 10^{-7}$	$7{,}07 \cdot 10^{-5}$ $7{,}40 \cdot 10^{-5}$	$4{,}72 \cdot 10^{-3}$ $4{,}94 \cdot 10^{-3}$
∞	$1{,}08 \cdot 10^{-9}$ $1{,}17 \cdot 10^{-9}$	$4{,}64 \cdot 10^{-7}$ $5{,}01 \cdot 10^{-7}$	$1{,}32 \cdot 10^{-5}$ $1{,}42 \cdot 10^{-5}$	$2{,}50 \cdot 10^{-4}$ $2{,}70 \cdot 10^{-4}$	$3{,}56 \cdot 10^{-3}$ $3{,}84 \cdot 10^{-3}$	$3{,}37 \cdot 10^{-2}$ $3{,}64 \cdot 10^{-2}$

Значення K_{II} **(** $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$ **,** $\mu_0 = 0$ **та** $0{,}5$ **)** **Таблиця 3.13**

G_1/G_2 \ α	1°	30°	60°	90°	120°	150°
1,5	1,905 1,930	1,815 1,839	1,604 1,625	1,321 1,338	1,003 1,016	0,652 0,661
4	2,194 2,282	2,066 2,149	1,825 1,898	1,511 1,571	1,151 1,197	0,746 0,776
∞	2,520 2,694	2,349 2,511	2,082 2,225	1,739 1,859	1,335 1,427	0,864 0,923

Водночас коефіцієнт K_{II} зменшується зі збільшенням кутового розміру тріщини 2α. Врахування сил тертя в областях контактного тиску берегів тріщини дає поправку до значення коефіцієнта інтенсивності зсувних напружень, розрахованого для гладкого контакту, до 7 %, якщо коефіцієнт тертя $\mu_0 = 0{,}5$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Эволюция равновесного состояния гладких криволинейных трещин со взаимодействующими с трением поверхностями в процессе нагружения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 1. – С. 135–149.
2. *Антипов Ю.А.* Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, вып. 2. – С. 290–306.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 295 с.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 300 с.
5. *Говоруха В.Б., Лобода В.В.* Моделі та методи механіки руйнування п’єзокерамічних тіл з міжфазними тріщинами // Дніпропетровськ: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2013. – 252 с.

6. *Годес А.Ю., Лобода В.В.* Контактна задача для дугової тріщини в електрострикційному матеріалі // Вісн. Київськ. нац. ун-ту імені Т. Шевченка: Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2015. – Спецвип. – С. 69–72.
7. *Годес А.Ю., Лобода В.В.* Контактная задача для межфазной дуговой трещины // Вісн. Дніпропетр. ун-ту: Сер.: Механіка. – 2015. – № 19 (2). – С. 3–17.
8. *Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Равновесие трещин при сложном нагружении с учетом областей контакта и свободной поверхности, скольжения и сцепления. – М.: ИПМ АН СССР. Препр. № 276, 1986. – 63 с.
9. *Грилицкий Н.Д., Кит Г.С.* О напряженном состоянии в окрестности трещины с частично контактирующими берегами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 8. – С. 35–39.
10. *Дундурс Я., Комниноу М.* Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композит. материалов. – Рига, 1979. – С. 78–87.
11. *Зозуля В.В.* Згин пластини, ослабленої тріщиною з контактуючими кромками при динамічному навантаженні // Доп. АН УРСР. – 1991. – № 4. – С. 56–60.
12. *Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Чорноіван Ю.О.* Визначення контактних напружень між берегами тріщини нормального відриву // Доп. НАН України. – 2016. – № 5. – С. 36–42.
13. *Клімчук Т.В., Острик В.І., Щокотова О.М.* Задачі ковзного контакту для смуги та клина // Контактна механіка. Фрикційна і адгезійна взаємодія поверхонь: за заг. ред. Р.М. Мартиняка. – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 254 с. – С. 188–214.
14. *Козінов С.В.* Періодична система міжфазних тріщин із зонами контакту в ортотропному біматеріалі у полі розтягу та зсуву // Машинознавство. – 2006. – № 5 (107). – С. 8–13.
15. *Козінов С.В., Лобода В.В.* Періодична система електропроникних тріщин на межі двох п’єзоелектричних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 2. – С. 81–91.
16. *Козінов С.В., Лобода В.В., Харун І.В.* Періодична система міжфазних тріщин із зонами контакту в ізотропному біматеріалі у полі розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 4. – С. 101–107.
17. *Лобода В.В., Шевелева А.Е.* Осесимметричная задача для дискообразного межфазного разреза с учетом контакта его берегов // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1991. – № 3. – С. 55–61.
18. *Лобода В.В., Шевельова А.Є., Тулін К.О.* Дугова тріщина з зонами контакту між включенням і матрицею // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 180–183.
19. *Луцышин Р.М.* Контактная задача для пластинки, ослабленной криволинейным разрезом // Прикл. механика. – 1970. – **6**, № 3. – С. 93–98.

20. *Моссаковский В.И., Загубиженко П.А.* Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью // Докл. АН СССР. – 1954. – **94**, № 3. – С. 409–412.
21. *Моссаковський В.І., Загубиженко П.А.* Про стиснення пружної ізотропної площини, ослабленої прямолінійною щилиною // Доп. АН УРСР. – 1954. – № 5.
22. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
23. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
24. *Опанасович В., Дорош М.* Комбінований згин з розтягом пластини, ослабленої двома колінеарними тріщинами, береги яких контактують // Вісн. Львів. ун-ту. Сер.: Мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 194–206.
25. *Опанасович В.К., Слободян М.С.* Двовісний згин ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів і за наявності пластичних зон біля її вершин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 128–135.
26. *Острик В.І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 2. – С. 58–65.
27. *Острик В.І.* Закрита півнескінченна тріщина на межі пружної смуги і жорсткої стінки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 1. – С. 84–89.
28. *Острик В.І.* Часткове розкриття півнескінченної тріщини на межі пружної смуги і жорсткої стінки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2020. – **56**, № 1. – С. 94–100.
29. *Острик В.І.* Контакт берегів міжфазної напівнескінченної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 1. – С. 106–121.
30. *Острик В.І.* Закрита напівнескінченна тріщина на межі поділу матеріалів у кусково-однорідній смузі // Прикл. механіка. – 2021. – **57**, № 3. – С. 127–136.
31. *Острик В.І., Улітко А.Ф.* Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 2. – С. 119–126.
32. *Острик В.І., Улітко А.Ф.* Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 3. – С. 88–95.
33. *Острик В.І., Улітко А.Ф.* Осесиметрична контактна задача для міжфазної тріщини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 1. – С. 21–26.
34. *Острик В.І., Улітко А.Ф.* Кругова міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту поверхонь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 1. – С. 84–94.
35. *Острик В.И., Улитко А.Ф.* Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.

36. *Острик В.І., Щокотова О.М.* Задачі контакту зі зчепленням і проковзуванням // Контактна механіка. Фрикційна і адгезійна взаємодія поверхонь: за заг. ред. Р.М. Мартиняка. – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 254 с. – С. 215–253.
37. *Симонов И.В.* Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. – 1985.– № 6. – С. 969–976.
38. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
39. *Улитко А.Ф.* Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // Совр. проблемы механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185–193.
40. *Улітко А.Ф., Острик В.І.* Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 133–141.
41. *Улітко А.Ф., Острик В.І.* Міжфазна тріщина на межі розділу кругового включення і матриці // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2006. – Вип. 3. – С. 138–149.
42. *Улитко А.Ф., Острик В.И.* Фрикционный контакт упругих тел и взаимодействие межфазных трещин // Актуальні аспекти фіз.-мех. досліджень. Механіка. – К.: Наук. думка, 2007. – С. 305–317.
43. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
44. *Харун І.В., Козінов С.В.* Взаємодія міжфазних тріщин із зонами контакту у полі розтягу та зсуву // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2004. – Вип. 8, т. 1, № 6. – С. 177–186.
45. *Харун І.В., Козінов С.В.* Взаємодія міжфазних тріщин із зонами контакту в анізотропному біматеріалі у полі розтягу та зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 1. – С. 98–108.
46. *Харун І.В., Лобода В.В.* Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 2. – С. 103–113.
47. *Черепанов Г.П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1.
48. *Черепанов Г.П.* О развитии трещин в сжатых средах // Прикл. математика и механика. – 1966. – **30**, вып. 1.
49. *Шацкий И.П.* Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – № 31. – С. 91–97.
50. *Шацький І.П., Маковійчук М.В.* Взаємодія берегів тріщини при сумісному розтязі-згині пластини на пружній основі // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 62–68.

51. *Aksogan O.* Partial closure of a Griffith crack under a general loading // Int. J. Fract. – 1975. – **11**, No. 4. – P. 659–670.
52. *Bowie O.L., Freese C.E.* On the “overlapping” problem in crack analysis // Eng. Fract. Mech. – 1976. – **8**, No. 2. – P. 373–379.
53. *Chao R.*, *Laws N.* Closure of an arc crack in an isotropic homogeneous material due to uniaxial loading // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1992. – **45**. – P. 629–640.
54. *Chao R.*, *Laws N.* The fiber-matrix interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1997. – **64**. – P. 992–999.
55. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 780–781.
56. *Comninou M.* Exterior interface cracks // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18.** – P. 501–506.
57. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J. Elasticity. – 1980. – **10**, No. 2. – P. 203–212.
58. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension – compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – **46**. – P. 345–348.
59. *Dini D., Barber J.R., Churchman C.M., Sackfield A., Hills D.A.* The application of asymptotic solutions to contact problems characterised by logarithmic singularities // European J. Mechanics A/Solids. – 2008. – **27**. – P. 847–858.
60. *Gautesen A.K., Dundurs J.* The interface crack under a combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**. – P. 580–586.
61. *Helsing J., Peters G.* An efficient numerical algorithm for cracks partly in frictionless contact // SIAM J. Appl. Math. – 2000. – **61**. – P. 551–566.
62. *Herrmann K.P., Loboda V.V.* On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – **69**. – P. 311–335.
63. *Herrmann K.P., Loboda V.V.* Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – **70**. – P. 127–143.
64. *Hodes A.Y., Loboda V.V.* A contact zone approach for an arc crack at the interface between two electrostrictive materials // Int. J. Solids and Structures. – 2017. – **128**. – P. 262–271.
65. *Loboda V.V.* The quasi-invariant in the theory of interface crack // Eng. Fract. Mech. – 1993. – **44**. – P. 573–580.
66. *Martin-Moran C.J., Barber J.R., Comninou M.* The penny-shaped interface crack with heat flow. Part 1: Perfect contact // J. Appl. Mech. – 1983. – **50**, No. 1. – P. 29–36.
67. *Opanasovych V.K., Yatsyk I.M., Sulym H.T.* Bending of Reissner’s plate containing a through-the-thickness crack by concentrated moments taking into account the width of a contact zone of its faces // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 5. – P. 620–634.

68. *Ostrik V.I.* Contact of faces of a rectilinear crack under complex loading and various contact conditions // Acta Mechanica. – 2019. – **230**, No. 10. – P. 3741–3758.
69. *Paris F., Cano J.C., Varna J.* The fiber-matrix interface crack – A numerical analysis using oundary lements // Int. J. Fracture. – 1996. – **82**. – P. 11–29.
70. *Paris F., Correa E., Mantic V.* Kinking of transversal interface cracks between fiber and matrix // J. Appl. Mech. – 2007. – **74**. – P. 703–716.
71. *Varna J., Paris F., Cano J.C.* The effect of crack-face contact on fiber/matrix debonding in transverse tensile loading // Composites Science and Technology. – 1997. – **51**. – P. 523–532.
72. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – **19**, No. 4. – P. 526–535.

РОЗДІЛ 4

ЗГИН ТА РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА СИСТЕМОЮ ПРЯМОЛІНІЙНИХ ТРІЩИН ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

М.С. Слободян

Розглянуто задачу про згин з розтягом безмежної пластини з круговим отвором та системою наскрізних прямолінійних тріщин, береги яких гладко контактують по всій довжині тріщин по смузі сталої ширини. Через контакт берегів тріщин сформульована задача розбивається на дві взаємозв'язані: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини (класична теорія). З використанням теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів, плоска задача та задача згину пластини зведені до задач лінійного спряження, на основі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для невідомих похідних від стрибків переміщень на берегах тріщин у плоскій задачі та кутів повороту у задачі згину пластини. Крайові умови на коловій межі пластини задоволено аналітично. Отриману систему СІР розв’язано числово методом механічних квадратур, на основі якого побудовано графіки контактного зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль.

Задачі згину пластин з тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії на одній з основ пластини (лінійний контакт) розглянуто у працях [1, 3, 16–18, 24]. Експериментально підтверджено вплив контакту берегів тріщин на перерозподіл напружено-деформованого стану пластини у праці [2]. У працях [5–11, 19–23] розглянуто згин з розтягом пластини з отворами та включеннями і прямолінійними наскрізними тріщинами, береги яких гладко контактують по всій довжині тріщин по області сталої ширини на одній з основ пластини (смуговий контакт).

4.1. Формулювання задачі

Нехай нескінченна ізотропна пластина завтовшки $2h$ містить циліндричний (круговий) отвір радіуса R та систему M довільно орієнтованих наскрізних прямолінійних тріщин завдовжки $2l_k$ $\left(k=\overline{1,M}\right)$. У серединній площині пластини виберемо початок декартової системи координат $Oxy\tilde{z}$ так, щоб початок координат збігався з центром кругового отвору, а вісь $O\tilde{z}$ була перпендикулярною до цієї площини. У площині Oxy введемо полярну систему координат r і θ з полюсом у точці O та полярною віссю Ox. Нехай центрам тріщин O_k відповідають координати $\left(x_{0k}, y_{0k}\right)$, а α_k –

кути нахилу лінії k-ої тріщини до осі Ox $\left(k=\overline{1,M}\right)$. Пов'яжемо з k-ою тріщиною декартову систему координат $O_k x_k y_k$. Вважатимемо, що пластина згинається на безмежності рівномірно розподіленими моментами M_x^∞ та M_y^∞ і розтягується зусиллями P_1 та P_2. Область всередині кругового отвору позначимо через S^+, ззовні – через S^-, лінію, де розміщена k-та тріщина – через L_k, а коло – через L (див. рис. 4.1).

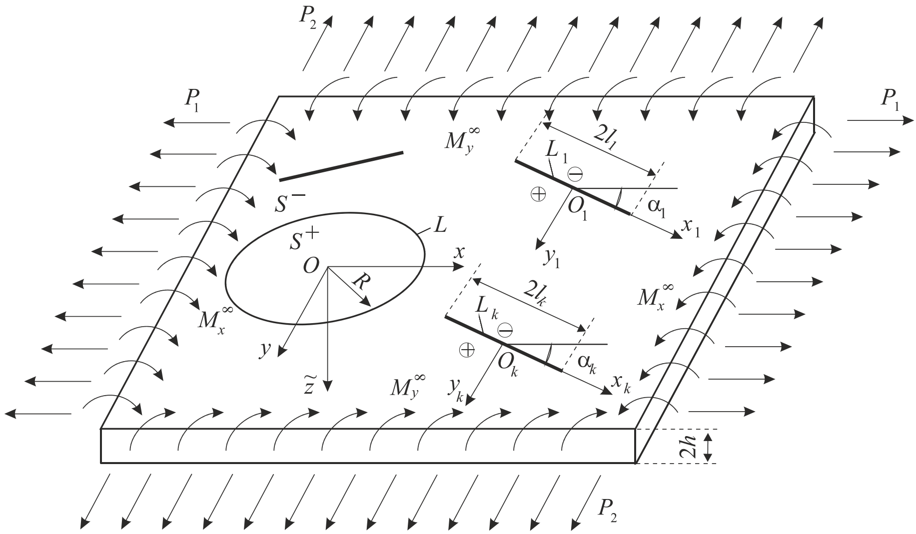


Рис. 4.1

Вважатимемо, що тріщина – це математичний розріз [18] із невідомими стрибками переміщень у плоскій задачі та кутів повороту у задачі згину пластини. Припустимо, що під заданим навантаженням береги тріщин контактуватимуть смузі сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини по всій довжині тріщин. Схема контакту берегів тріщини у відліковій конфігурації зображені на рис. 4.2. Оскільки береги тріщини контактують, то крім згинальних моментів виникають мембранні зусилля [16–18]. Тому розв'язок задачі шукатимемо у вигляді суми розв'язків двох задач: задачі про згин пластини, використовуючи теорію Кірхгофа–Лява, та плоскої задачі.

На межі отвору виконуються такі умови:

$$M_r = 0\,,\ x \in L\,, \tag{4.1}$$

$$P_r = 0\,,\ x \in L\,, \tag{4.2}$$

$$\sigma_{\Pi r} = 0\,,\ x \in L\,, \tag{4.3}$$

$$\tau_{\Pi r\theta} = 0\,,\ x \in L\,, \tag{4.4}$$

де M_r – згинальний момент, $\sigma_{\Pi r}$ і $\sigma_{\Pi r\theta}$ – компоненти тензора напружень у полярній системі координат, P_r – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізальна сила.

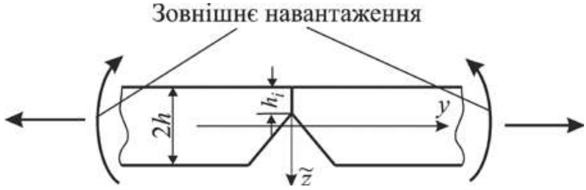


Рис. 4.2

Крайові умови гладкого контакту берегів тріщин мають вигляд [7]

$$P^{+} = P^{-} = 0\,,\ x_k \in L_k\,,\ k = \overline{1, M}\,, \tag{4.5}$$

$$M^{+}_{y_k} = M^{-}_{y_k} = h\beta_k N_k\,, x_k \in L_k\,,\ k = \overline{1, M}\,, \tag{4.6}$$

$$\tau^{+}_{\Pi x_k y_k} = \tau^{-}_{\Pi x_k y_k} = 0\,,\ x_k \in L_k\,,\ k = \overline{1, M}\,, \tag{4.7}$$

$$\sigma^{+}_{\Pi y_k y_k} = \sigma^{-}_{\Pi y_k y_k} = -\frac{N_k}{2h}\,,\ x_k \in L_k\,,\ k = \overline{1, M}\,, \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial\left[v_{\Pi}\right]}{\partial x_k} + \lambda_k h\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial y_k}\right] = 0\,,\ x_k \in L_k\,,\ k = \overline{1, M}\,, \tag{4.9}$$

$$\beta_k = 1 - \gamma_k / 3\,,\ \lambda_k = 0.5\left(1 + \left(1 - \gamma_k\right)^2\right),\ \gamma_k = h_k / h\,,$$

де N_k – контактне зусилля між берегами k-ої тріщини; h_k – ширина смуги контакту; $\left[f\right] = f^{+} - f^{-}$, значками “+” і “–” позначені граничні значення функцій за прямування точки площини до k-ої тріщини при $y_k \to \pm 0$.

Отже, (4.5)–(4.9) – взаємозв’язані крайові умови для задачі про згин пластини та плоскої задачі, які описують контактну взаємодію берегів тріщин у двовимірному формулюванні.

4.2. Побудова розв’язку задачі про згин пластини

Для визначення напружено-деформованого стану пластини з круговим отвором та системою довільно орієнтованих тріщин скористаємося формулами [14]

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = \frac{\partial g}{\partial x}\,, \tag{4.10}$$

$$\tilde{\kappa}\,\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\,\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} = f\,, \tag{4.11}$$

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \overline{z}\,\overline{\Phi'(z)} - \frac{\overline{z}}{z}\,\overline{\Psi(z)} = \tilde{g}\,, \tag{4.12}$$

$$\tilde{\kappa}\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}+\overline{z}\overline{\Phi'(z)}+\frac{\overline{z}}{z}\overline{\Psi(z)}=\tilde{f}\ , \qquad (4.13)$$

де

$$g=\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y},\ \ f=-\frac{1}{D(1-\upsilon)}\left\{M_y+i\tilde{c}'+iH_{xy}+i\int_{l_k}^{t}N_y(\tau)\,d\tau\right\},\ \ \tilde{\kappa}=\frac{3+\upsilon}{1-\upsilon},$$

$$\tilde{g}=\frac{1}{iz}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]e^{i\theta}\right\},\ \ \tilde{f}=-\frac{1}{D(1-\upsilon)}\left\{M_r+i\tilde{c}_0'+iH_{r\theta}+i\int_{0}^{s}N_r(\tau)\,d\tau\right\},$$

M_x, M_y і H_{xy} – відповідно згинальні та крутний моменти у декартовій системі координат; N_x, N_y – перерізувальні сили; w – прогин точок пластини; $D=2Eh^3\big/\left\{3\left(1-\upsilon^2\right)\right\}$ – циліндрична жорсткість; E – модуль пружності матеріалу пластини, а υ – коефіцієнт Пуассона; $z=x+iy$, $i^2=-1$, x і y – декартові координати точки серединної площини пластини, $\tilde{c}'$ і $\tilde{c}_0'$ – дійсні сталі, $H_{r\theta}$ – крутний момент у полярній системі координат.

Комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ подамо у вигляді

$$\Phi(z)=\Phi_K(z)+\sum_{j=1}^{M}\Phi_j(z),\ \ \Psi(z)=\Psi_K(z)+\sum_{j=1}^{M}\Psi_j(z), \qquad (4.14)$$

де функції $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$ – голоморфні ззовні j-ої тріщини, а функції $\Phi_K(z)$ і $\Psi_K(z)$ – в області S^-.

Якщо маємо дві декартові системи координат Oxy і $O_jx_jy_j$, пов’язані між собою співвідношенням

$$z=z_{0j}+z_je^{i\alpha_j},$$

а функції $\Phi_j(z_j)$ і $\Psi_j(z_j)$ виконують ту ж роль у системі координат $O_jx_jy_j$, що й функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ у системі координат Oxy, тоді

$$\Phi_j(z_j)=\Phi\left(z_je^{i\alpha_j}+z_{0j}\right),$$

$$\Psi_j(z_j)=e^{2i\alpha_j}\left\{\Psi\left(z_je^{i\alpha_j}+z_{0j}\right)+\overline{z}_{0j}\Phi'\left(z_je^{i\alpha_j}+z_{0j}\right)\right\},$$

де $z_j=x_j+iy_j$, $z_{0j}=x_{0j}+iy_{0j}$.

Тепер (4.14) перепишемо у вигляді

$$\Phi(z)=\Phi_K(z)+\sum_{j=1}^{M}\Phi_j(z_j), \qquad (4.15)$$

$$\Psi(z) = \Psi_K(z) + \sum_{j=1}^{M} \left\{ \Psi_j(z_j) e^{-2i\alpha_j} - \bar{z}_{0j} \Phi'_j(z_j) e^{-i\alpha_j} \right\}. \qquad (4.16)$$

Введемо функції [14]

$$\Omega_j(z_j) = -\bar{\Phi}_j(z_j) - z_j \bar{\Phi}'_j(z_j) - \bar{\Psi}_j(z_j), \ j = \overline{1,M},$$

$$\Phi_K(z) = -\bar{\Phi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\bar{\Phi}'_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\bar{\Psi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right), \ z \in S^+,$$

та подамо комплексні потенціали $\Psi_j(z_j)$ і $\Psi_K(z)$ у вигляді

$$\Psi_j(z_j) = -\Phi_j(z_j) - z_j \Phi'_j(z_j) - \bar{\Omega}_j(z_j), \qquad (4.17)$$

$$\Psi_K(z) = \frac{R^2}{z^2}\left\{ \bar{\Phi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \Phi_K(z) - z\Phi'_K(z) \right\}. \qquad (4.18)$$

Врахувавши (4.15)–(4.18), формули (4.10)–(4.13) перепишемо так:

$$\Phi_K(z) - \frac{R^2}{r^2}\Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left\{\overline{\Phi_K(z)} - \bar{z}\,\overline{\Phi'_K(z)}\right\} + \sum_{j=1}^{M}\Phi_j(z_j) +$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\left(1 + \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_j}\right)\overline{\Phi_j(z_j)} + \frac{\bar{z}}{z}\sum_{j=1}^{M}\left\{\Omega_j(\bar{z}_j) - (z_j - \bar{z}_j)\overline{\Phi'_j(z_j)}\right\}e^{2i\alpha_j} = \tilde{g}, \qquad (4.19)$$

$$\tilde{\kappa}\Phi_K(z) + \frac{R^2}{r^2}\Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left\{\overline{\Phi_K(z)} - \bar{z}\,\overline{\Phi'_K(z)}\right\} + \tilde{\kappa}\sum_{j=1}^{M}\Phi_j(z_j) -$$

$$-\sum_{j=1}^{M}\left(1 + \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_j}\right)\overline{\Phi_j(z_j)} - \frac{\bar{z}}{z}\sum_{j=1}^{M}\left\{\Omega_j(\bar{z}_j) - (z_j - \bar{z}_j)\overline{\Phi'_j(z_j)}\right\}e^{2i\alpha_j} = \tilde{f}, \qquad (4.20)$$

$$\Phi_m(z_m) - \Omega_m(\bar{z}_m) + (z_m - \bar{z}_m)\overline{\Phi'_m(z_m)} + \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{\bar{z}^2}\right)\overline{\Phi_K(z)} +$$

$$+ z e^{-2i\alpha_m}\,\overline{\Phi'_K(z)} + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{\bar{z}^2}\left\{\Phi_K\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z}\,\overline{\Phi'_K(z)}\right\} +$$

$$+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{M}\left\{\Phi_j(z_j) + \overline{\Phi_j(z_j)} + z_m e^{-i(\alpha_m - \alpha_j)}\overline{\Phi'_j(z_j)}\right\} + e^{-2i\alpha_m}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq m}}^{M}\left(e^{i\alpha_j}(z_{0m} - z_{0j})\overline{\Phi'_j(z_j)} -\right.$$

$$\left. - e^{2i\alpha_j}\left\{\overline{\Phi_j(z_j)} + \bar{z}_j\overline{\Phi'_j(z_j)} + \Omega_j(\bar{z}_j)\right\}\right) = \frac{\partial g}{\partial x_m}, \ m = \overline{1,M}, \qquad (4.21)$$

$$\tilde{\kappa}\Phi_m(z_m) + \Omega_m(\bar{z}_m) - (z_m - \bar{z}_m)\overline{\Phi'_m(z_m)} + \tilde{\kappa}\Phi_K(z) - \left(1 + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_m}}{\bar{z}^2}\right)\overline{\Phi_K(z)} -$$

$$-ze^{-2i\alpha_m}\overline{\Phi_K'(z)}-\frac{R^2e^{-2i\alpha_m}}{\overline{z}^2}\left\{\Phi_K\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)-\overline{z}\,\overline{\Phi_K'(z)}\right\}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left\{\tilde{\kappa}\Phi_j(z_j)-\overline{\Phi_j(z_j)}-\right.$$

$$\left.-z_m e^{-i(\alpha_m-\alpha_j)}\overline{\Phi_j'(z_j)}\right\}-e^{-2i\alpha_m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left(e^{i\alpha_j}\left(z_{0m}-z_{0j}\right)\overline{\Phi_j'(z_j)}-\right.$$

$$\left.-e^{2i\alpha_j}\left\{\overline{\Phi_j(z_j)}+\overline{z}_j\overline{\Phi_j'(z_j)}+\Omega_j(\overline{z}_j)\right\}\right)=f_m\,,\ m=\overline{1,M}\,. \tag{4.22}$$

Зауважимо, що за такого формулювання задачі для безмежної пластини виконуються подання

$$\Phi(z)=\Gamma+\Phi_*(z)\,,\ \Psi(z)=\Gamma'+\Psi_*(z)\,, \tag{4.23}$$

де $\Phi_*(z)$ і $\Psi_*(z)$ – голоморфні в області S^- функції,

$$\Gamma=-\frac{M_x^\infty+M_y^\infty}{4D(1+\upsilon)}\,,\ \Gamma'=\frac{M_y^\infty-M_x^\infty}{2D(1-\upsilon)}\,,$$

M_x^∞, M_y^∞ – задані на нескінченності згинальні моменти.

Для безмежної пластини з круговим отвором, якщо $z\to 0$, маємо [14]:

$$\Phi_K(z)=\frac{\overline{\Gamma}'R^2}{z^2}+O(1)\,,\ z\to 0\,. \tag{4.24}$$

Із формули (4.22) і крайових умов (4.5), (4.6) матимемо задачу лінійного спряження

$$\left(\tilde{\kappa}\Phi_m(t)-\Omega_m(t)\right)^+-\left(\tilde{\kappa}\Phi_m(t)-\Omega_m(t)\right)^-=0\,,\ t\in L_m\,,\ m=\overline{1,M}\,,$$

розв’язок якої такий:

$$\Omega_m(z_m)=\tilde{\kappa}\Phi_m(z_m)\,,\ m=\overline{1,M}\,. \tag{4.25}$$

Додамо залежності (4.21) і (4.22)

$$(1+\tilde{\kappa})\left\{\Phi_m(z_m)+\Phi_K(z)\right\}=\frac{\partial g}{\partial x_m}+f_m\,,\ m=\overline{1,M}\,,$$

та врахуємо крайові умови (4.5) і (4.6). Тоді одержимо задачу лінійного спряження:

$$(1+\tilde{\kappa})\left(\Phi_m^+(t)-\Phi_m^-(t)\right)=\left[\frac{\partial g}{\partial x_m}\right],\ t\in L_m\,,\ m=\overline{1,M}\,. \tag{4.26}$$

Ввівши позначення

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x_m}\right]=(1+\tilde{\kappa})\,y_m(t)\,,\ t\in L_m\,,\ m=\overline{1,M}\,,$$

формулу (4.26) перепишемо у вигляді

$$\Phi_m^+(t)-\Phi_m^-(t)=y_m(t),\ t\in L_m,\ m=\overline{1,M}.$$

Розв'язок цієї задачі лінійного спряження матиме вигляд

$$\Phi_m(z_m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-l_m}^{l_m}\frac{y_m(t)}{t-z_m}dt,\ m=\overline{1,M}. \tag{4.27}$$

З формули (4.20) та крайових умов (4.1) і (4.2) отримаємо:

$$\tilde{\kappa}\Phi_K^-(s)+\Phi_K^+(s)+\tilde{\kappa}\sum_{j=1}^{M}\Phi_j\left(\left(s-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{M}\left(1+\frac{R^2e^{2i\alpha_j}}{s^2}\right)\overline{\Phi}_j\left(\left(\frac{R^2}{s}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)-$$

$$-\frac{R^2}{s^2}\sum_{j=1}^{M}e^{2i\alpha_j}\left\{\Omega_j\left(\left(\frac{R^2}{s}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)-\left\{\left(s-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}-\left(\frac{R^2}{s}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\overline{\Phi}'_j\left(\left(\frac{R^2}{s}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\right\}=i\tilde{c}'_0,\ s\in L. \tag{4.28}$$

Введемо функцію

$$F(z)=\begin{cases}\Phi_K(z)+\tilde{\kappa}\sum\limits_{j=1}^{M}\Phi_j\left(\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}\right)-i\tilde{c}'_0, z\in S^+,\\ -\tilde{\kappa}\Phi_K(z)+\sum\limits_{j=1}^{M}\left(1+\dfrac{R^2e^{2i\alpha_j}}{z^2}\right)\overline{\Phi}_j\left(\left(\dfrac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)+\dfrac{R^2}{z^2}\sum\limits_{j=1}^{M}e^{2i\alpha_j}\times\end{cases}$$

$$\times\left\{\Omega_j\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)-\right.$$

$$\left.-\left\{\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}-\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right\}\overline{\Phi}'_j\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\right\}, z\in S^-. \tag{4.29}$$

Тоді (4.28) запишемо так:

$$F^+(s)-F^-(s)=0,\ s\in L.$$

Якщо врахувати (4.23) і (4.24), розв'язок цієї задачі лінійного спряження матиме вигляд

$$F(z)=\frac{\overline{\Gamma}'R^2}{z^2}-\tilde{\kappa}\Gamma+B,$$

де $B=\dfrac{i}{2\pi}\sum\limits_{j=1}^{M}\int\limits_{-l_j}^{l_j}\dfrac{\overline{y_j(t)}dt}{t+\overline{z}_{0j}e^{i\alpha_j}}$.

Визначимо з (4.29) функцію $\Phi_K(z)$ в областях S^+ і S^-:

$$\Phi_K(z)=\frac{\overline{\Gamma}'R^2}{z^2}-\tilde{\kappa}\Gamma+B-\tilde{\kappa}\sum_{j=1}^{M}\Phi_j\left(\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}\right)+i\tilde{c}_0',\ z\in S^+, \tag{4.30}$$

$$\Phi_K(z)=\frac{1}{\tilde{\kappa}}\left\{-\frac{\overline{\Gamma}'R^2}{z^2}+\tilde{\kappa}\Gamma-B+\sum_{j=1}^{M}\left(1+\frac{R^2e^{2i\alpha_j}}{z^2}\right)\overline{\Phi}_j\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)+\right.$$

$$+\frac{R^2}{z^2}\sum_{j=1}^{M}\left\{e^{2i\alpha_j}\left(\Omega_j\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)-\left\{\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}-\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right\}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\overline{\Phi}_j'\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\right)\right\}\right\},\ z\in S^-. \tag{4.31}$$

З формули (4.22), крайових умов (4.5), (4.6) і співвідношення (4.25) отримаємо:

$$\tilde{\kappa}\Phi_m^+(x_m)+\tilde{\kappa}\Phi_m^-(x_m)+\tilde{\kappa}\Phi_K\left(z_{0m}+x_me^{i\alpha_m}\right)-$$

$$-\left(1+\frac{R^2e^{-2i\alpha_m}}{\left(\overline{z}_{0m}+x_me^{-i\alpha_m}\right)^2}\right)\overline{\Phi_K\left(z_{0m}+x_me^{i\alpha_m}\right)}-$$

$$-e^{-2i\alpha_m}\left(z_{0m}+x_me^{i\alpha_m}-\frac{R^2}{\overline{z}_{0m}+x_me^{-i\alpha_m}}\right)\overline{\Phi_K'\left(z_{0m}+x_me^{i\alpha_m}\right)}-\frac{R^2e^{-2i\alpha_m}}{\left(\overline{z}_{0m}+x_me^{-i\alpha_m}\right)^2}\times$$

$$\times\Phi_K\left(\frac{R^2}{\overline{z}_{0m}+x_me^{-i\alpha_m}}\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left\{\tilde{\kappa}\Phi_j\left(z_j\right)-\overline{\Phi_j\left(z_j\right)}-x_me^{-i\left(\alpha_m-\alpha_j\right)}\overline{\Phi_j'\left(z_j\right)}\right\}-$$

$$-e^{-2i\alpha_m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left\{\left(z_{0m}-z_{0j}\right)\overline{\Phi_j'\left(z_j\right)}e^{i\alpha_j}-e^{2i\alpha_j}\left(\overline{\Phi_j\left(z_j\right)}+\overline{z}_j\overline{\Phi_j'\left(z_j\right)}+\tilde{\kappa}\Phi_j\left(\overline{z}_j\right)\right)\right\}=$$

$$=i\tilde{c}_m'+qh\beta_mN_m\left(x_m\right),\ x_m\in L_m,\ m=\overline{1,M}, \tag{4.32}$$

де $z_j=\left(z_{0m}-z_{0j}+x_me^{i\alpha_m}\right)e^{-i\alpha_j}$.

Підставимо співвідношення (4.27), (4.30), (4.31) у формулу (4.32) і отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для знаходження невідомих функцій $y_m(t)$, $\left(m=\overline{1,M}\right)$, яка у безрозмірних змінних буде:

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{-1}^{1}\left\{K_{mj}(\eta,\xi)Y_j(\eta)+L_{mj}(\eta,\xi)\overline{Y_j(\eta)}\right\}d\eta-$$

$$-\frac{ie^{-2i\alpha_m}\tilde{c}_0'}{\bar{X}_m^2} = i\tilde{c}_m' + \beta_m q \frac{hN_m(\xi)}{M_y^\infty} + \tilde{P}_m(\xi),\ \xi \in [-1,1],\ m = \overline{1,M}, \qquad (4.33)$$

де

$$K_{mj}(\eta,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{\kappa}}{\pi i(\eta-\xi)} + \tilde{K}_{mj}(\eta,\xi), m = j, \\ \tilde{K}_{mj}(\eta,\xi) + K_{mj}^V(\eta,\xi), m \neq j, \end{cases}$$

$$L_{mj}(\eta,\xi) = \begin{cases} \tilde{L}_{mj}(\eta,\xi), m = j, \\ \tilde{L}_{mj}(\eta,\xi) + L_{mj}^V(\eta,\xi), m \neq j, \end{cases}$$

$$\tilde{K}_{mj}(\eta,\xi) = \tilde{\kappa}K_{mj}^I(\eta,\xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2}\right)K_{mj}^{II}(\eta,\xi) -$$

$$-e^{-2i\alpha_m}\left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m}\right)K_{mj}^{III}(\eta,\xi) - \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2}K_{mj}^{IV}(\eta,\xi),$$

$$\tilde{L}_{mj}(\eta,\xi) = \tilde{\kappa}L_{mj}^I(\eta,\xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2}\right)L_{mj}^{II}(\eta,\xi) -$$

$$-e^{-2i\alpha_m}\left(X_m - \frac{1}{\bar{X}_m}\right)L_{mj}^{III}(\eta,\xi) - \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\bar{X}_m^2}L_{mj}^{IV}(\eta,\xi),\ K_{mj}^I(\eta,\xi) = \frac{1}{2\pi i X_m}\frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1},$$

$$L_{mj}^I(\eta,\xi) = \frac{1}{2\pi i\tilde{\kappa}}\left\{\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\bar{T}_j} + \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}F_{mj}}{\left(\bar{T}_j X_m - 1\right)^2} - \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{X_m}\frac{X_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{\bar{T}_j X_m - 1}\right\},$$

$$K_{mj}^{II}(\eta,\xi) = -\frac{1}{2\pi i\tilde{\kappa}}\left\{\frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{T_j} + \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}\bar{F}_{mj}}{\left(T_j\bar{X}_m - 1\right)^2} - \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\bar{X}_m}\frac{\bar{X}_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{T_j\bar{X}_m - 1}\right\},$$

$$L_{mj}^{II}(\eta,\xi) = -\frac{1}{2\pi i\bar{X}_m}\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j\bar{X}_m - 1},\ K_{mj}^{III}(\eta,\xi) = -\frac{1}{\pi i\tilde{\kappa}}\frac{\lambda_j}{\left(T_j\bar{X}_m - 1\right)^2}\left\{e^{i\alpha_j} + \frac{e^{-i\alpha_j}}{\bar{X}_m^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{T_j\bar{X}_m - 1}{\bar{X}_m^2}e^{-i\alpha_j} - \frac{e^{i\alpha_j}\bar{F}_{mj}}{\bar{X}_m} - \frac{e^{i\alpha_j}}{\bar{X}_m}\frac{\bar{F}_{mj}}{T_j\bar{X}_m - 1}\right\},$$

$$L_{mj}^{III}(\eta,\xi) = \frac{1}{\pi i\bar{X}_m^2}\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j\bar{X}_m - 1}\left(1 + \frac{1}{2\left(T_j\bar{X}_m - 1\right)}\right),$$

$$K_{mj}^{IV}\left(\eta,\xi\right)=-\frac{\tilde{\kappa}\lambda_j\overline{X}_m e^{i\alpha_j}}{2\pi i\left(T_j\overline{X}_m-1\right)},\ L_{mj}^{IV}\left(\eta,\xi\right)=-\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{2\pi i\overline{T}_j},$$

$$K_{mj}^{V}\left(\eta,\xi\right)=\frac{\tilde{\kappa}\lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi i}\left(\frac{1}{T_j-X_m}+\frac{e^{-2i\alpha_m}}{\overline{T}_j-\overline{X}_m}\right),$$

$$L_{mj}^{V}\left(\eta,\xi\right)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\overline{T}_j-\overline{X}_m}\left(1-\frac{T_j-X_m}{\overline{T}_j-\overline{X}_m}e^{-2i\alpha_m}\right),$$

$$\tilde{P}_m\left(\xi\right)=-\tilde{\kappa}A+\frac{B}{X_m^2}+A-\frac{B}{\tilde{\kappa}\overline{X}_m^2}-e^{-2i\alpha_m}\left\{\frac{B}{\tilde{\kappa}\overline{X}_m^4}-\frac{A}{\overline{X}_m^2}-\frac{2B}{\tilde{\kappa}}\frac{X_m\overline{X}_m-1}{\overline{X}_m^4}-B+\frac{\tilde{\kappa}A}{\overline{X}_m^2}\right\},$$

$$Z_{0j}=\frac{z_{0j}}{R}=\frac{x_{0j}}{R}+i\frac{y_{0j}}{R},\ \lambda_j=\frac{l_j}{R},\ q=-\frac{3}{2}\left(1+\upsilon\right),$$

$$T_j=Z_{0j}+\lambda_j\eta e^{i\alpha_j},\ X_j=Z_{0j}+\lambda_j\xi e^{i\alpha_j},\ F_{mj}=X_m-Z_{0j}-\frac{e^{2i\alpha_j}}{X_m}+\overline{Z}_{0j}e^{2i\alpha_j},$$

$$A=-0.375\left(1+\rho\right)\left(1-\upsilon\right),\ B=0.75\left(1-\rho\right)\left(1+\upsilon\right),\ \rho=M_x^\infty\big/M_y^\infty,$$

$$y_m\left(t\right)=M_y^\infty Y_m\left(\eta\right)\Big/\left(Eh^3\right),\ Y_m\left(\eta\right)=Y_{m1}\left(\eta\right)+iY_{m2}\left(\eta\right),$$

$Y_{m1}\left(\eta\right)$, $Y_{m2}\left(\eta\right)$ – дійсні функції, $\xi=\dfrac{x_j}{l_j}$, $\eta=\dfrac{t_j}{l_j}$ – безрозмірні змінні.

4.3. Побудова розв’язку плоскої задачі

За узагальненого плоского напруженого стану компоненти тензора напружень $\sigma_{\Pi x}$, $\sigma_{\Pi y}$, $\tau_{\Pi xy}$ і вектора переміщень u_Π, v_Π у декартовій системі координат виражають через дві функції комплексної змінної $\Phi_\Pi\left(z\right)$ і $\Psi_\Pi\left(z\right)$ [3, 13]:

$$\sigma_{\Pi x}+\sigma_{\Pi y}=2\left\{\Phi_\Pi\left(z\right)+\overline{\Phi_\Pi\left(z\right)}\right\},$$

$$\sigma_{\Pi y}-i\tau_{\Pi xy}=\Phi_\Pi\left(z\right)+\overline{\Phi_\Pi\left(z\right)}+z\overline{\Phi'_\Pi\left(z\right)}+\overline{\Psi_\Pi\left(z\right)},$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\Pi+iv_\Pi\right)=\kappa\Phi_\Pi\left(z\right)-\overline{\Phi_\Pi\left(z\right)}-z\overline{\Phi'_\Pi\left(z\right)}-\overline{\Psi_\Pi\left(z\right)},\qquad(4.34)$$

де $\mu=E\Big/\left(2\left(1+\upsilon\right)\right)$ – модуль зсуву матеріалу пластини, $\kappa=\left(3-\upsilon\right)\Big/\left(1+\upsilon\right)$ – для узагальненого плоского напруженого стану.

Компоненти тензора напружень $\sigma_{\Pi r}$, $\sigma_{\Pi\theta}$, $\tau_{\Pi r\theta}$ і вектора переміщень $u_{\Pi r}$, $u_{\Pi\theta}$ у полярній системі координат визначають за співвідношеннями:

$$\sigma_{\Pi r}+\sigma_{\Pi\theta}=2\left\{\Phi_{\Pi}(z)+\overline{\Phi_{\Pi}(z)}\right\},$$

$$\sigma_{\Pi r}+i\tau_{\Pi r\theta}=\Phi_{\Pi}(z)+\overline{\Phi_{\Pi}(z)}-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi}(z)}-\frac{\overline{z}}{z}\overline{\Psi_{\Pi}(z)},$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_{\Pi r}+iu_{\Pi\theta}\right)=iz\left\{\kappa\Phi_{\Pi}(z)-\overline{\Phi_{\Pi}(z)}+\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi}(z)}+\frac{\overline{z}}{z}\overline{\Psi_{\Pi}(z)}\right\}. \qquad (4.35)$$

Зауважимо, що за переходу від однієї системи декартових координат до іншої комплексні потенціали $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Psi_{\Pi}(z)$ перетворюються за аналогічними формулами до (4.15), (4.16):

$$\Phi_{\Pi}(z)=\Phi_{\Pi K}(z)+\sum_{j=1}^{M}\Phi_{\Pi j}(z_j),$$

$$\Psi_{\Pi}(z)=\Psi_{\Pi K}(z)+\sum_{j=1}^{M}\left\{\Psi_{\Pi j}(z_j)e^{-2i\alpha_j}-\overline{z}_{0j}\Phi'_{\Pi j}(z_j)e^{-i\alpha_j}\right\}.$$

Якщо ввести функції [13]

$$\Omega_{\Pi j}(z_j)=\overline{\Phi}_{\Pi j}(z_j)+z_j\overline{\Phi}'_{\Pi j}(z_j)+\overline{\Psi}_{\Pi j}(z_j),\ \ j=\overline{1,M},$$

$$\Phi_{\Pi K}(z)=-\overline{\Phi}_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{R^2}{z}\overline{\Phi}'_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi}_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{z}\right),\ \ z\in S^{+},$$

то з (4.34) і (4.35), як і в підрозділі 4.2, отримаємо залежності

$$\begin{aligned}\sigma_{\Pi r}+i\tau_{\Pi r\theta}={}&\Phi_{\Pi K}(z)-\frac{R^2}{r^2}\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cdot\left\{\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}\right\}+\\&+\sum_{j=1}^{M}\left\{\Phi_{\Pi j}(z_j)+\left(1+\frac{\overline{z}}{z}e^{2i\alpha_j}\right)\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)}-\right.\\&+\sum_{j=1}^{M}\left\{\Phi_{\Pi j}(z_j)+\left(1+\frac{\overline{z}}{z}e^{2i\alpha_j}\right)\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)}-\right.\\&\left.-\frac{\overline{z}}{z}e^{2i\alpha_j}\left\{\Omega_{\Pi j}(\overline{z}_j)+(z_j-\overline{z}_j)\overline{\Phi'_{\Pi j}(z_j)}\right\}\right\},\end{aligned} \qquad (4.36)$$

$$\begin{aligned}2\mu\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_{\Pi r}+iu_{\Pi\theta}\right)={}&\kappa\Phi_{\Pi K}(z)+\frac{R^2}{r^2}\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)-\\&-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\cdot\left\{\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}\right\}+\sum_{j=1}^{M}\left\{\kappa\Phi_{\Pi j}(z_j)-\left(1+\frac{\overline{z}}{z}e^{2i\alpha_j}\right)\overline{\Phi_{\Pi j}(z_j)}+\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{\overline{z}}{z}e^{2i\alpha_j}\left\{\Omega_{\Pi j}\left(\overline{z}_j\right)+\left(z_j-\overline{z}_j\right)\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}\right\}\Bigg\}, \tag{4.37}$$

$$\sigma_{\Pi y}-i\tau_{\Pi xy}=\Phi_{\Pi m}\left(z_m\right)+\Omega_{\Pi m}\left(\overline{z}_m\right)+\left(z_m-\overline{z}_m\right)\overline{\Phi'_{\Pi m}\left(z_m\right)}+\Phi_{\Pi K}\left(z\right)+$$

$$+\left(1+\frac{R^2}{\overline{z}^2}e^{-2i\alpha_m}\right)\overline{\Phi_{\Pi K}\left(z\right)}+ze^{-2i\alpha_m}\overline{\Phi'_{\Pi K}\left(z\right)}+\frac{R^2}{\overline{z}^2}e^{-2i\alpha_m}\left\{\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}\left(z\right)}\right\}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left\{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)+\overline{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)}+z_m e^{-i\left(\alpha_m-\alpha_j\right)}\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}\right\}+$$

$$+e^{-2i\alpha_m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\Bigg\{\left(z_{0m}-z_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}-$$

$$-e^{2i\alpha_j}\left(\overline{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)}+\overline{z}_j\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}-\Omega_{\Pi j}\left(\overline{z}_j\right)\right)\Bigg\},\ m=\overline{1,M}, \tag{4.38}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(u_\Pi+iv_\Pi\right)=\kappa\Phi_{\Pi m}\left(z_m\right)-\Omega_{\Pi m}\left(\overline{z}_m\right)-\left(z_m-\overline{z}_m\right)\overline{\Phi'_{\Pi m}\left(z_m\right)}+\kappa\Phi_{\Pi K}\left(z\right)-$$

$$-\left(1+\frac{R^2}{\overline{z}^2}e^{-2i\alpha_m}\right)\overline{\Phi_{\Pi K}\left(z\right)}+ze^{-2i\alpha_m}\overline{\Phi'_{\Pi K}\left(z\right)}+\frac{R^2}{\overline{z}^2}e^{-2i\alpha_m}\left\{\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)-\overline{z}\overline{\Phi'_{\Pi K}\left(z\right)}\right\}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left\{\kappa\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)-\overline{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)}-z_m e^{-i\left(\alpha_m-\alpha_j\right)}\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}\right\}-e^{-2i\alpha_m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\Bigg\{\left(z_{0m}-z_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\times$$

$$\times\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}-e^{2i\alpha_j}\left(\overline{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)}+\overline{z}_j\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}-\Omega_{\Pi j}\left(\overline{z}_j\right)\right)\Bigg\},\ m=\overline{1,M}. \tag{4.39}$$

Для функцій $\Phi_\Pi\left(z\right)$ і $\Psi_\Pi\left(z\right)$ справедливе подання

$$\Phi_\Pi\left(z\right)=\tilde{\Gamma}+\Phi_{\Pi*}\left(z\right),\ \Psi_\Pi\left(z\right)=\tilde{\Gamma}'+\Psi_{\Pi*}\left(z\right),\ |z|\to 0, \tag{4.40}$$

де $\Phi_{\Pi*}\left(z\right)$ і $\Psi_{\Pi*}\left(z\right)$ – голоморфні функції в S^-, для яких за великих $|z|$ існують розвинення

$$\Phi_{\Pi*}\left(z\right)=\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\ldots,\ \Psi_{\Pi*}\left(z\right)=\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_3}{z^3}+\ldots,\ \tilde{\Gamma}=\frac{P_1+P_2}{4},\ \tilde{\Gamma}'=-\frac{P_1-P_2}{2},$$

де P_1, P_2 – головні напруження на нескінченності.

Для функції $\Phi_{\Pi K}\left(z\right)$ при $z\to 0$ маємо [13]:

$$\Phi_{\Pi K}\left(z\right)=\frac{\overline{\tilde{\Gamma}}'R^2}{z^2}+O\left(1\right),\ z\to 0. \tag{4.41}$$

З (4.38), врахувавши крайові умови (4.7) і (4.8), отримаємо задачу лінійного спряження:

$$\left(\Phi_{\Pi m}(t)-\Omega_{\Pi m}(t)\right)^{+}-\left(\Phi_{\Pi m}(t)-\Omega_{\Pi m}(t)\right)^{-}=0,\ t\in L_m,\ m=\overline{1,M}.$$

Розв'язок цієї задачі лінійного спряження має вигляд

$$\Phi_{\Pi m}(z)=\Omega_{\Pi m}(z),\ m=\overline{1,M}. \tag{4.42}$$

Додавши (4.38) і (4.39), матимемо

$$(1+\kappa)\left\{\Phi_{\Pi m}(z_m)+\Phi_{\Pi K}(z)\right\}=\sigma_{\Pi y}-i\tau_{\Pi xy}+2\mu\frac{\partial(u_\Pi+iv_\Pi)}{\partial x_m},\ m=\overline{1,M}.$$

З попередньої формули та крайових умов (4.7) і (4.8) отримаємо задачу лінійного спряження:

$$(1+\kappa)\left(\Phi^{+}_{\Pi m}(t)-\Phi^{+}_{\Pi m}(t)\right)=2\mu\left[\frac{\partial(u_\Pi+iv_\Pi)}{\partial x_m}\right],\ t\in L_m,\ m=\overline{1,M}. \tag{4.43}$$

Введемо позначення:

$$g'_m(t)=\frac{2\mu}{(1+\kappa)i}\left[\frac{\partial(u_\Pi+iv_\Pi)}{\partial x_m}\right],\ t\in L_m,\ m=\overline{1,M}.$$

Тоді розв'язок задачі лінійного спряження (4.43) буде:

$$\Phi_{\Pi m}(z_m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-l_m}^{l_m}\frac{g'_m(t)\,dt}{t-z_m},\ m=\overline{1,M}. \tag{4.44}$$

З крайових умов (4.3), (4.4) і формули (4.36) одержимо:

$$\Phi^{-}_{\Pi K}(s)-\Phi^{+}_{\Pi K}(s)+\sum_{j=1}^{M}\Phi_{\Pi j}\left(\left(s-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\left(1+\frac{R^2e^{2i\alpha_j}}{s^2}\right)\overline{\Phi}_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{s}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)-$$

$$-\frac{R^2}{s^2}\sum_{j=1}^{M}e^{2i\alpha_j}\left\{\Omega_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{s}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)+\left(\left(s-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}-\left(\frac{R^2}{s}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\overline{\Phi}'_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{s}-z_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\right\}=0,\ s\in L. \tag{4.45}$$

Введемо функцію

$$F_\Pi(z)=\begin{cases}\Phi_{\Pi K}(z)-\sum\limits_{j=1}^{M}\Phi_{\Pi j}\left(\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}\right), z\in S^{+},\\ \Phi_{\Pi K}(z)+\sum\limits_{j=1}^{M}\left(1+\dfrac{R^2e^{2i\alpha_j}}{z^2}\right)\overline{\Phi}_{\Pi j}\left(\left(\dfrac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)-\end{cases}$$

$$-\frac{R^2}{z^2}\sum_{j=1}^{M}e^{2i\alpha_j}\left\{\Omega_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}-\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\overline{\Phi}'_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{z}-z_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\right\}, z\in S^- . \qquad (4.46)$$

Із залежності (4.45) одержимо задачу лінійного спряження

$$F_{\Pi}^{+}(s)-F_{\Pi}^{-}(s)=0,\; s\in L,$$

розв'язок якої запишемо так:

$$F_{\Pi}(z)=\frac{\overline{\tilde{\Gamma}}'R^2}{z^2}+\tilde{\Gamma}+B_{\Pi},$$

де $B_{\Pi}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{M}\int_{-l_j}^{l_j}\frac{\overline{g_j'(t)}dt}{t+\overline{z}_{0j}e^{i\alpha_j}}$.

Тоді з (4.46) визначимо функцію $\Phi_{\Pi K}(z)$ в областях S^+ і S^-:

$$\Phi_{\Pi K}(z)=\frac{\overline{\tilde{\Gamma}}'R^2}{z^2}+\tilde{\Gamma}+B_{\Pi}+\sum_{j=1}^{M}\Phi_{\Pi j}\left(\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}\right),\; z\in S^+, \qquad (4.47)$$

$$\Phi_{\Pi K}(z)=\frac{\overline{\tilde{\Gamma}}'R^2}{z^2}+\tilde{\Gamma}+B_{\Pi}-\sum_{j=1}^{M}\left(1+\frac{R^2e^{2i\alpha_j}}{z^2}\right)\overline{\Phi}_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)+\frac{R^2}{z^2}\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{M}e^{2i\alpha_j}\left\{\Omega_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}+\left(\left(z-z_{0j}\right)e^{-i\alpha_j}-\left(\frac{R^2}{z}-\overline{z}_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\overline{\Phi}'_{\Pi j}\left(\left(\frac{R^2}{z}-z_{0j}\right)e^{i\alpha_j}\right)\right\},\; z\in S^- . \qquad (4.48)$$

З формули (4.38), крайових умов (4.7), (4.8) та співвідношення (4.42) матимемо:

$$\Phi_{\Pi K}\left(x_me^{i\alpha_m}+z_{0m}\right)+\left(1+\frac{R^2e^{-2i\alpha_m}}{\left(x_me^{-i\alpha_m}+\overline{z}_{0m}\right)^2}\right)\overline{\Phi_{\Pi K}\left(x_me^{i\alpha_m}+z_{0m}\right)}+$$

$$+e^{-2i\alpha_m}\left(x_me^{i\alpha_m}+z_{0m}-\frac{R^2}{x_me^{-i\alpha_m}+\overline{z}_{0m}}\right)\overline{\Phi'_{\Pi K}\left(x_me^{i\alpha_m}+z_{0m}\right)}+\frac{R^2e^{-2i\alpha_m}}{\left(x_me^{-i\alpha_m}+\overline{z}_{0m}\right)^2}\times$$

$$\times\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{x_m e^{-i\alpha_m}+\overline{z}_{0m}}\right)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left\{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)+\overline{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)}+x_m e^{-i\left(\alpha_m-\alpha_j\right)}\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}\right\}+$$

$$+e^{-2i\alpha_m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left\{\left(z_{0m}-z_{0j}\right)\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}e^{i\alpha_j}-e^{2i\alpha_j}\left(\overline{\Phi_{\Pi j}\left(z_j\right)}+\overline{z}_j\overline{\Phi'_{\Pi j}\left(z_j\right)}-\Omega_{\Pi j}\left(\overline{z}_j\right)\right)\right\}+$$

$$+\Phi^{+}_{\Pi m}\left(x_m\right)+\Phi^{-}_{\Pi m}\left(x_m\right)=-\frac{N_m}{2h},\ m=\overline{1,M}\,. \qquad (4.49)$$

де $z_j=\left(z_{0m}-z_{0j}+x_m e^{i\alpha_m}\right)e^{-i\alpha_j}$.

Підставивши співвідношення (4.44), (4.47) і (4.48) у формулу (4.49), отримаємо систему СІР для знаходження невідомих функцій $g'_m\left(t\right)$, $\left(m=\overline{1,M}\right)$, яка у безрозмірних змінних має вигляд

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{-1}^{1}\left\{R_{mj}\left(\eta,\xi\right)G_j\left(\eta\right)+S_{mj}\left(\eta,\xi\right)\overline{G_j\left(\eta\right)}\right\}d\eta=$$

$$=-\frac{hN_m\left(\xi\right)}{2M_y^{\infty}}+\tilde{H}_m\left(\xi\right),\ \xi\in\left[-1,1\right],\ m=\overline{1,M}\,, \qquad (4.50)$$

де

$$R_{mj}\left(\eta,\xi\right)=\begin{cases}1/\left(\pi\left(\eta-\xi\right)\right)+\tilde{R}_{mj}\left(\eta,\xi\right), m=j,\\ \tilde{R}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+R^{V}_{mj}\left(\eta,\xi\right), m\neq j,\end{cases}$$

$$S_{mj}\left(\eta,\xi\right)=\begin{cases}\tilde{S}_{mj}\left(\eta,\xi\right), m=j,\\ \tilde{S}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+S^{V}_{mj}\left(\eta,\xi\right), m\neq j,\end{cases}$$

$$\tilde{R}_{mj}\left(\eta,\xi\right)=R^{I}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+\left(1+\frac{e^{-2i\alpha_m}}{\overline{X}_m^2}\right)R^{II}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+e^{-2i\alpha_m}\left(X_m-\frac{1}{\overline{X}_m}\right)R^{III}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+$$

$$+\frac{e^{-2i\alpha_m}}{\overline{X}_m^2}R^{IV}_{mj}\left(\eta,\xi\right),\ \tilde{S}_{mj}\left(\eta,\xi\right)=S^{I}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+\left(1+\frac{e^{-2i\alpha_m}}{\overline{X}_m^2}\right)S^{II}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+$$

$$+e^{-2i\alpha_m}\left(X_m-\frac{1}{\overline{X}_m}\right)S^{III}_{mj}\left(\eta,\xi\right)+\frac{e^{-2i\alpha_m}}{\overline{X}_m^2}S^{IV}_{mj}\left(\eta,\xi\right),$$

$$R^{I}_{mj}\left(\eta,\xi\right)=\frac{1}{2\pi X_m}\frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\overline{T}_j X_m-1},\ S^{I}_{mj}\left(\eta,\xi\right)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\overline{T}_j}+\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}F_{mj}}{\left(\overline{T}_j X_m-1\right)^2}-\frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{X_m}\times\right.$$

$$\times \frac{X_m^2 + e^{-2i\alpha_j}}{\overline{T}_j X_m - 1} \Bigg\}, \; R_{mj}^{II}(\eta,\xi) = \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{T_j} + \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}\overline{F}_{mj}}{\left(T_j \overline{X}_m - 1\right)^2} - \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{\overline{X}_m} \frac{\overline{X}_m^2 + e^{2i\alpha_j}}{T_j \overline{X}_m - 1} \right\},$$

$$S_{mj}^{II}(\eta,\xi) = \frac{1}{2\pi \overline{X}_m} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \overline{X}_m - 1},$$

$$R_{mj}^{III}(\eta,\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_j}{\left(T_j \overline{X}_m - 1\right)^2} \Bigg\{ e^{i\alpha_j} + \frac{e^{-i\alpha_j}}{\overline{X}_m^2} + \frac{T_j \overline{X}_m - 1}{\overline{X}_m^2} e^{-i\alpha_j} -$$

$$- \frac{e^{i\alpha_j}\overline{F}_{mj}}{\overline{X}_m} - \frac{e^{i\alpha_j}}{\overline{X}_m} \frac{\overline{F}_{mj}}{T_j \overline{X}_m - 1} \Bigg\}, \; S_{mj}^{III}(\eta,\xi) = -\frac{1}{\pi \overline{X}_m^2} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{T_j \overline{X}_m - 1} \left(1 + \frac{1}{2\left(T_j \overline{X}_m - 1\right)} \right),$$

$$R_{mj}^{IV}(\eta,\xi) = \frac{\lambda_j \overline{X}_m e^{i\alpha_j}}{2\pi\left(T_j \overline{X}_m - 1\right)}, \; S_{mj}^{IV}(\eta,\xi) = \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{2\pi \overline{T}_j},$$

$$R_{mj}^{V}(\eta,\xi) = \frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}}{2\pi} \left(\frac{1}{T_j - X_m} + \frac{e^{-2i\alpha_m}}{\overline{T}_j - \overline{X}_m} \right),$$

$$S_{mj}^{V}(\eta,\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_j e^{-i\alpha_j}}{\overline{T}_j - \overline{X}_m} \left(1 - \frac{T_j - X_m}{\overline{T}_j - \overline{X}_m} e^{-2i\alpha_m} \right),$$

$$\tilde{H}_m(\xi) = 2\gamma + \frac{\gamma'}{X_m^2} + \frac{\gamma'}{\overline{X}_m^2} - e^{-2i\alpha_m} \left(\frac{\gamma'}{\overline{X}_m^4} + \frac{\gamma}{\overline{X}_m^2} + \frac{2\left(X_m \overline{X}_m - 1\right)}{\overline{X}_m^4}\gamma' - \gamma' - \frac{\gamma}{\overline{X}_m^2} \right),$$

$$\gamma = \frac{p_1 + p_2}{4}, \; \gamma' = -\frac{p_1 - p_2}{2}, \; p_1 = \frac{hP_1}{M_y^\infty}, \; p_2 = \frac{hP_2}{M_y^\infty},$$

$$g_m'(t) = M_y^\infty G_m(l_m \eta) \big/ h^2, \; G_m(\eta) = G_{m1}(\eta) + iG_{m2}(\eta),$$

$G_{m1}(\eta)$, $G_{m2}(\eta)$ – дійсні функції.

4.4. Система сингулярних інтегральних рівнянь задачі

Взявши дійсну і уявну частини від рівнянь (4.33) і (4.50), отримаємо

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^{M} \int_{-1}^{1} \left\{ K_{mj}(\eta,\xi) Y_j(\eta) + L_{mj}(\eta,\xi) \overline{Y_j(\eta)} \right\} d\eta \right) - \operatorname{Im}\left(\frac{i e^{-2i\alpha_m} \tilde{c}_0'}{\overline{X}_m^2} \right) =$$

$$= \tilde{c}_m' + \operatorname{Im} \tilde{P}_m(\xi), \; \xi \in [-1,1], \; m = \overline{1,M}, \tag{4.51}$$

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{M}\int_{-1}^{1}\left\{K_{mj}(\eta,\xi)Y_j(\eta)+L_{mj}(\eta,\xi)\overline{Y_j(\eta)}\right\}d\eta\right)-\operatorname{Re}\left(\frac{ie^{-2i\alpha_m}\tilde{c}_0'}{\bar{X}_m^2}\right)+$$
$$+\frac{q}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{M}\int_{-1}^{1}\left\{R_{mj}(\eta,\xi)G_j(\eta)+S_{mj}(\eta,\xi)\overline{G_j(\eta)}\right\}d\eta\right)=$$
$$=\operatorname{Re}\left(\tilde{P}_m(\xi)+\tilde{H}_m(\xi)\right),\ \xi\in[-1,1],\ m=\overline{1,M}, \tag{4.52}$$
$$\operatorname{Im}\left(\sum_{j=1}^{M}\int_{-1}^{1}\left\{R_{mj}(\eta,\xi)G_j(\eta)+S_{mj}(\eta,\xi)\overline{G_j(\eta)}\right\}d\eta\right)=$$
$$=\operatorname{Im}\tilde{H}_m(\xi),\ \xi\in[-1,1],\ m=\overline{1,M}. \tag{4.53}$$

З крайової умови (4.9) одержимо:

$$G_{m1}(\eta)+\frac{\lambda_m(1+\tilde{\kappa})}{(1+\kappa)(1+\upsilon)}Y_{m2}(\eta)=0,\ \eta\in[-1,1],\ m=\overline{1,M}. \tag{4.54}$$

Систему рівнянь (4.51)–(4.54) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^{1}Y_m(\eta)d\eta=0,\ \int_{-1}^{1}\eta Y_{m1}(\eta)d\eta=0,\ \int_{-1}^{1}G_m(\eta)d\eta=0,\ m=\overline{1,M}, \tag{4.55}$$

які виражають відповідно однозначність кутів повороту, прогину пластини та переміщень за обходу контуру тріщини.

З другої умови (4.55) одержимо сталу

$$\tilde{c}_0'=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{M}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_j e^{i\alpha_j}Y_j(\eta)}{T_j}d\eta. \tag{4.56}$$

4.5. Числовий аналіз задачі

Отримана система СІР (4.51)–(4.56) розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур [12, 15] при $\upsilon=0.3$, $\gamma_k=h_k/h=0.13$ $(k=1,2)$.

4.5.1. Згин і розтяг пластини з отвором та однією прямолінійною тріщиною

Розглянемо одну радіальну тріщину, тобто коли $\alpha=0$.

На рис. 4.3 зображено залежність зведеного контактного зусилля $N^*=hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi=x_1/l$ при $\lambda=l/R=0.9$, $\rho=M_x^\infty/M_y^\infty=1$, $p_1=hP_1/M_y^\infty=0$, $p_2=hP_2/M_y^\infty=0$. Крива *1* побудована при $\varepsilon=d/R=1$, *2* – 1.5, *3* – 2, *4* – 5. Як бачимо, зі збільшенням відносної відстані ε від центра тріщини до кругового отвору

контактне зусилля між берегами тріщини зменшується, а при $\varepsilon \to \infty$ отримаємо відомі результати [7].

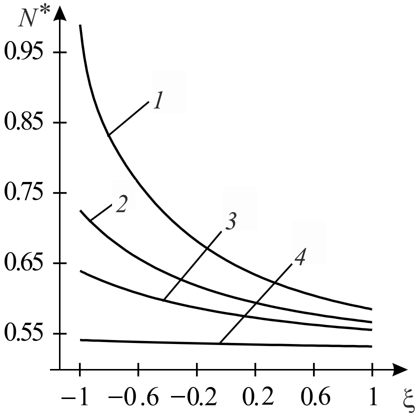


Рис. 4.3

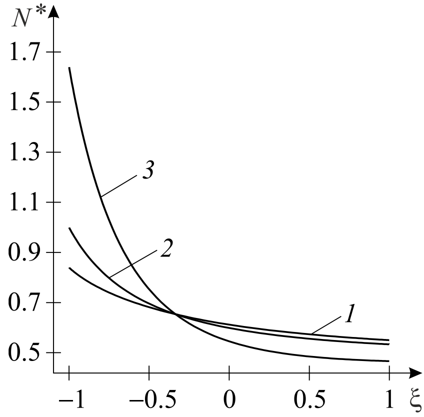


Рис. 4.4

На рис. 4.4 побудовано залежність зведеного контактного зусилля $N^* = hN/M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1/l$ при $\varepsilon = 1$, $\lambda = 0.8$, $\rho = 1$, $p_2 = 0$. Крива *1* побудована за навантаження $p_1 = 0$, *2* – 1, *3* – 5. Бачимо, що величина N^* є більшою у ближній до отвору вершині a, ніж у дальній b. Крім того, зі збільшенням навантаження p_1 контактне зусилля N^* у вершині a збільшується, а у вершині b зменшується. З рис. 4.2 і рис. 4.3 видно, що контактне зусилля максимального значення набуває у ближній вершині тріщини відносно кругового отвору.

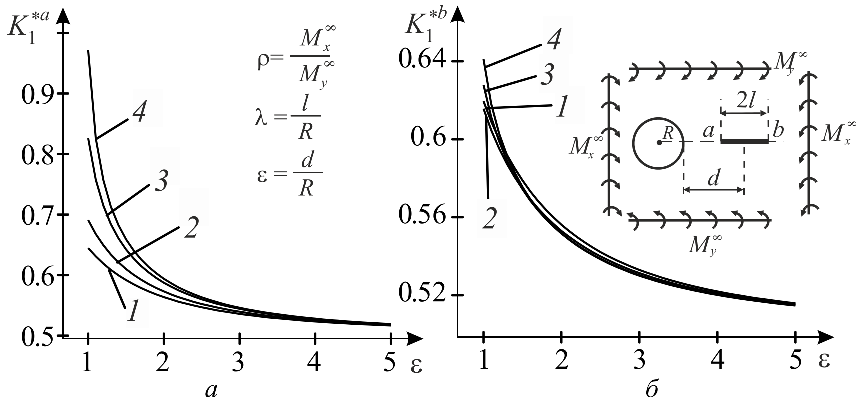


Рис. 4.5

На рис. 4.5 подано залежність зведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КІМ) $K_1^* = K_1 \Big/ \left(M_y^\infty \sqrt{l} \right)$ у вершині a (рис. 4.5 *а*) та у вершині b (рис. 4.5 *б*) від відносної відстані центра тріщини до кругового отвору ε при $\rho = 0.5$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Криві *1* побудовані при $\lambda = 0.2$, *2* – 0.5, *3* – 0.8, *4* – 0.9. Як бачимо, КІМ у вершині тріщини a є більшими, ніж у вершині b. Зі зростанням відносної довжини тріщини λ КІМ у вершині тріщини a збільшується, а у вершині b майже не змінюється. З віддаленням тріщини від отвору КІМ у вершинах a та b тріщини зменшується і прямує до одного значення, яке відповідає випадку однієї ізольованої тріщини [7]. Зауважимо, що при $\gamma = 0$ отримаємо результати праці [4]. Числовий аналіз виявив, що між зведеним коефіцієнтом інтенсивності зусиль (КІЗ) $k_1^* = h k_1 \Big/ \left(M_y^\infty \sqrt{l} \right)$ і КІМ $K_1^* = K_1 \Big/ \left(M_y^\infty \sqrt{l} \right)$ існує залежність $\dfrac{k_1^*}{K_1^*} = \dfrac{3\lambda_1 (1+\upsilon)}{(3+\upsilon) h}$, а $k_2^* = 0$ і $K_2^* = 0$ за такого розміщення тріщини відносно отвору.

Розглянемо довільно розташовану тріщину.

На рис. 4.6 побудовано залежність зведеного контактного зусилля $N^* = hN \Big/ M_y^\infty$ від безрозмірної координати ξ при $\varepsilon = d/R = 1$, $\lambda = l/R = 0.5$, $p_1 = hP_1 \Big/ M_y^\infty = 0$, $p_2 = hP_2 \Big/ M_y^\infty = 0$, $\rho = M_x^\infty \Big/ M_y^\infty = 0$. Крива *1* отримана при $\alpha = 0^\circ$, *2* – 30°, *3* – 45°, *4* – 60°, *5* – 74°. Числовий аналіз засвідчив, що коли $\alpha > 74^\circ$ за заданого навантаження, контактне зусилля міняє знак. Як бачимо, зі збільшенням α контактне зусилля спадає.

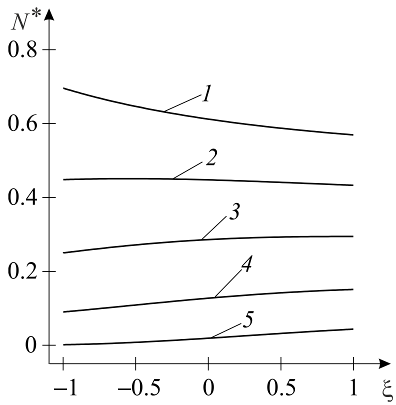


Рис. 4.6

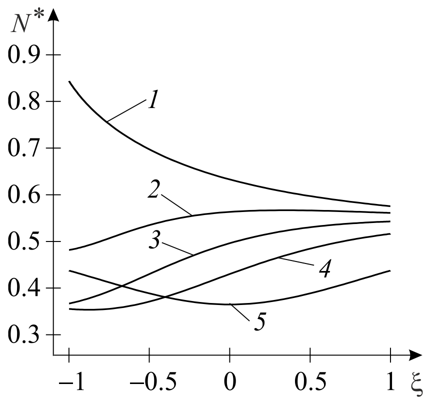


Рис. 4.7

На рис. 4.7 подано залежність N^* від ξ при $\varepsilon = 1$, $\lambda = 0.8$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $\rho = 1$. Крива *1* отримана при $\alpha = 0^\circ$, *2* – 30°, *3* – $\alpha = 45^\circ$, *4* – 60°, *5* – 90°.

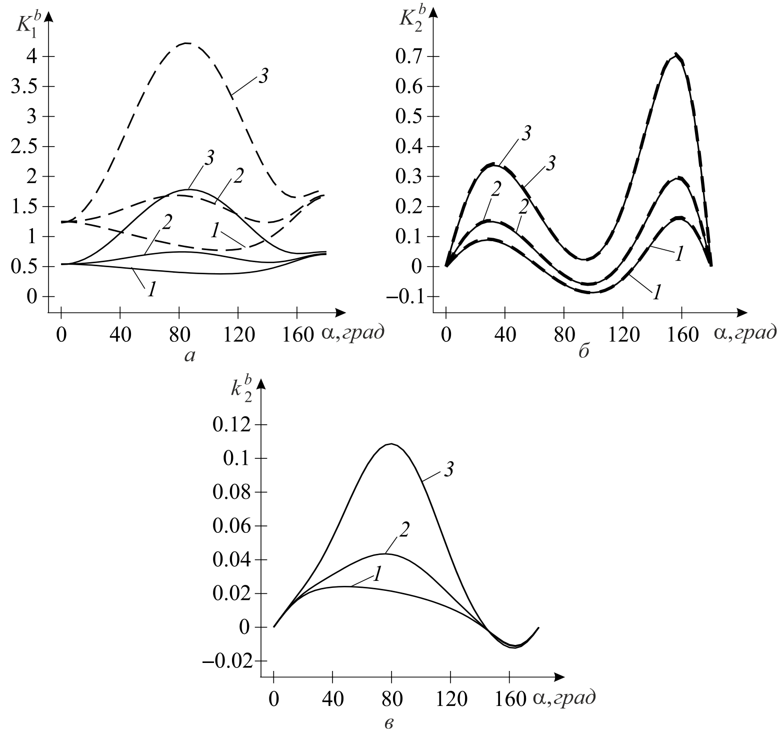


Рис. 4.8

На рис. 4.8 наведено залежність КІМ K_1 (рис. 4.8 *а*), K_2 (рис. 4.8 *б*) і КІЗ k_2 (рис. 4.8 *в*) у точці b від кута α при $\varepsilon = 1$, $\lambda = 0.8$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Криві *1* побудовані при $\rho = 1$, *2* – 2, *3* – 5. Тут штрихові лінії – без урахування контакту берегів тріщини, а суцільні – з урахуванням. Як бачимо, K_1 є меншим за врахування контакту берегів тріщини, ніж без.

4.5.2. Згин пластини з отвором та двома прямолінійними тріщинами

Розглянемо спочатку задачу про згин пластини з отвором та двома радіальними тріщинами. Числовий аналіз виконали при $\upsilon = 0.3$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0^\circ$, $z_{01} = 1 + \varepsilon_1$, $z_{02} = -1 - \varepsilon_2$, $\varepsilon_k = d_k / R$, $k = 1, 2$.

На рис. 4.9, 4.10 суцільні лінії відповідають першій тріщині, а

штрихові – другій. На рис. 4.9 результати одержані при $\rho = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = l/R = 0.8$, причому криві *1* отримано при $\varepsilon_2 = 1.1$, $2 - 1.5$, $3 -\ 2$. Як бачимо, з віддаленням другої тріщини від отвору контактне зусилля на ній зменшується, а на першій тріщині воно майже не міняється.

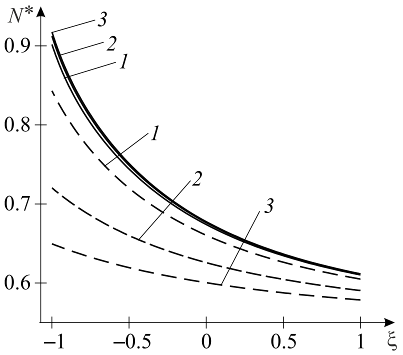


Рис. 4.9

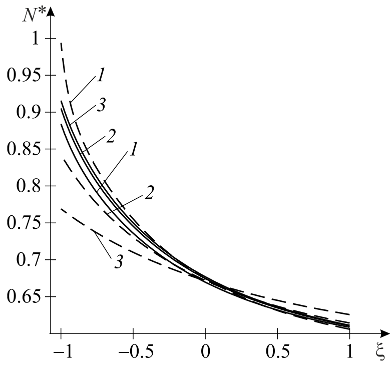


Рис. 4.10

На рис. 4.10 результат отримано при $\rho = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\lambda_1 = l_1/R = 0.8$, крива *1* побудована при $\lambda_2 = l_2/R = 0.9$, $2\ -\ 0.7$, $3\ -\ 0.5$. Як бачимо, зі зменшенням відносної довжини другої тріщини λ_2 контактне зусилля у ближній до отвору вершині $(\xi = -1)$ на першій тріщині збільшується, а у вершині a_2 на другій – зменшується. Теж можна зауважити, що зменшення довжини другої тріщини незначно впливає на контактне зусилля N_1^* для першої тріщини.

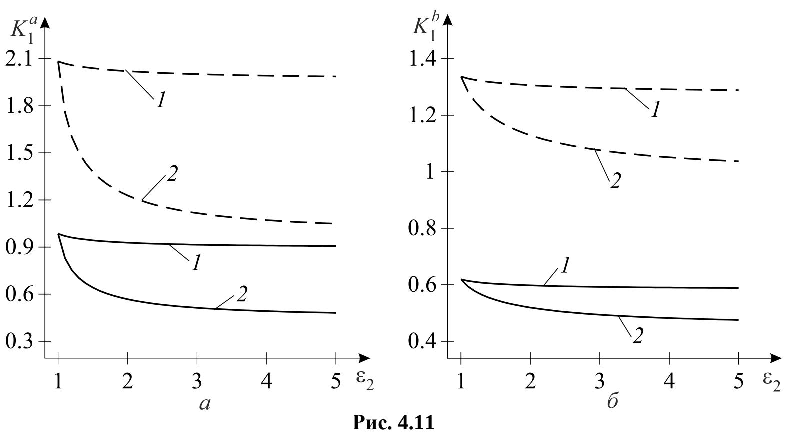


Рис. 4.11

На рис. 4.11 результати наведено при $\varepsilon_1 = d_1/R = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.9$, $\rho = 1$, причому кривим *1* відповідають КІМ, отримані для першої тріщини, а кривим *2* – для другої. Тут штрихові лінії – без урахування контакту берегів тріщини, а суцільні – з урахуванням. Як бачимо, зі збільшенням $\varepsilon_2 = d_2/R$, тобто з віддаленням другої тріщини від отвору, КІМ спадають як на першій, так і на другій тріщині, причому на другій зі збільшенням ε_2 вони прямують до тих самих значень, як для однієї ізольованої тріщини.

Розглянемо задачу про згин пластини з отвором та двома прямолінійними тріщинами.

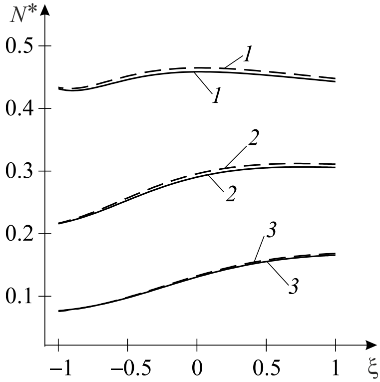


Рис. 4.12

На рис. 4.12 наведено залежність N_1^* від $\xi = x_1/l_1$ при $\rho = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. Суцільним лініям відповідає контактне зусилля для першої тріщини при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, а штриховим – для $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$. Крива *1* отримана при $\alpha = 30^\circ$, *2* – 45°, *3* – 60°. Як бачимо, контактне зусилля N_1^*, якщо $\alpha_1 = -\alpha_2$, є більшим, ніж за $\alpha_1 = \alpha_2$.

На рис. 4.13 побудовано залежності для КІМ і КІЗ у точці b_1 при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ від кута $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Криві *1* отримані при $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 1$, *2* – 3, *3* – 5. З рисунка бачимо, що K_1 у точці b_1 при $\rho = 1$ і $0^\circ < \alpha < 106^\circ$, при $\rho = 3$ і $84^\circ < \alpha < 151^\circ$, при $\rho = 5$ і $86^\circ < \alpha < 161^\circ$ спадає зі збільшенням α, а при $\rho = 1$ і $106^\circ < \alpha < 180^\circ$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in \left(0^\circ, 84^\circ\right) \cup \left(151^\circ, 180^\circ\right)$, при $\rho = 5$ і $\alpha \in \left(0^\circ, 86^\circ\right) \cup \left(161^\circ, 180^\circ\right)$ зростає; K_2 у точці b_1 при $\rho = 1$ і $\alpha \in \left(0^\circ, 30^\circ\right) \cup \left(99^\circ, 158^\circ\right)$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in \left(0^\circ, 31^\circ\right) \cup \left(95^\circ, 156^\circ\right)$, при $\rho = 5$ і $\alpha \in \left(0^\circ, 33^\circ\right) \cup \left(94^\circ, 155^\circ\right)$ зростає зі

збільшенням α, а при $\rho = 1$ і $\alpha \in \left(30^\circ, 99^\circ\right) \cup \left(158^\circ, 180^\circ\right)$, при $\rho = 3$ і $\alpha \in \left(31^\circ, 95^\circ\right) \cup \left(156^\circ, 180^\circ\right)$, при $\rho = 5$ і $\alpha \in \left(33^\circ, 94^\circ\right) \cup \left(155^\circ, 180^\circ\right)$ спадає.

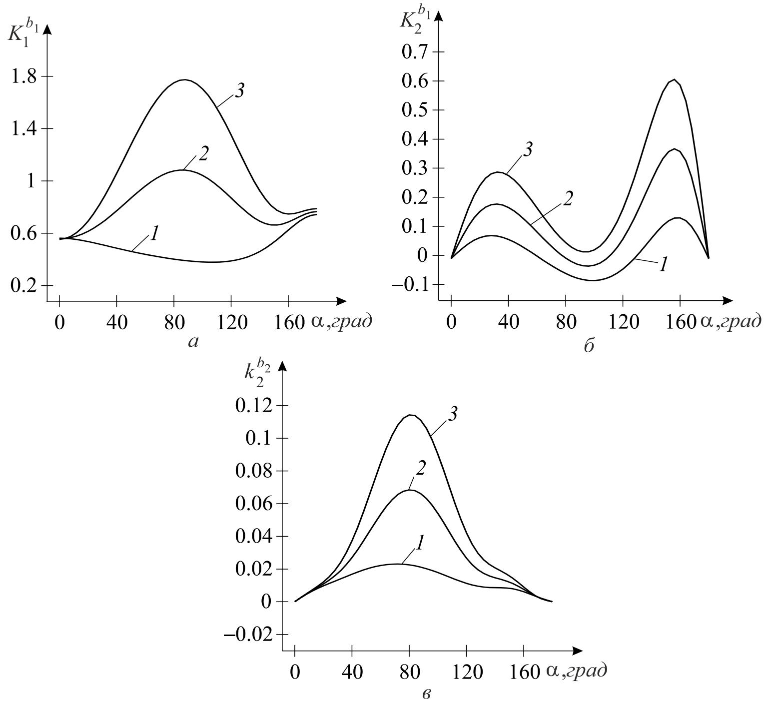


Рис. 4.13

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Альфавіцька С.О., Николишин М.М., Опанасович В.К., Слободян М.С.* Комбінований згин з розтягом ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною за наявності пластичних зон у її вершинах з урахуванням контакту її берегів та лінійного зміцнення матеріалу // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017 – Т. 15. – С. 63–70.
2. *Кальтгоф Дж.Ф., Шацький І.П., Бюргель А.* Експериментальне підтвердження контакту берегів тріщини при згині пластини // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій (вип.2): в 3-х т. // Під заг.ред. В.В. Панасюка. – Львів: Каменяр, 1999. – Т. 1. – С. 72–74.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

4. *Опанасович В., Слободян М.* Двосторонній згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням контакту її берегів // Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. механіко-математична. – 2006. – Вип. 65. – С. 46–59.
5. *Опанасович В., Слободян М., Бедрій В.* Згин ізотропної пластини з квадратною жорсткою шайбою і прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2015. – № 2 (78). – С. 81–93.
6. *Опанасович В., Слободян М., Бедрій В.* Згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Вісник Львівськ. ун-ту. Сер. механіко-математична. – 2012. – Вип. 76. – С. 222–230.
7. *Опанасович В.К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту. – 2007. – № 20 (2). – С. 123–127.
8. *Опанасович В.К., Слободян М.С., Бедрій В.Я.* Згин ізотропної пластини з еліптичним отвором та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – № 20. – С. 274–280.
9. *Опанасович В., Слободян М.* Згин ізотропної пластини з двома рівними співвісними наскрізними тріщинами при злитті пластичних зон між ними з урахуванням контакту берегів тріщин // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2015. – № 4 (80). – С. 53–63.
10. *Опанасович В.К., Слободян М.С., Бедрій В.Я.* Двовісний згин ізотропної пластини з прямокутною жорсткою шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. фізико-математична.– 2015. – № 3. – С. 21–24.
11. *Опанасович В.К., Слободян М.С., Звізло І.С.* Двовісний згин пластини з круговим отвором та двома співвісними крайовими радіальними тріщинами, береги яких контактують по області сталої ширини // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. фізико-математична.– 2015. – Спецвип. – С. 197–202.
12. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П.* Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 442 с.
13. *Прусов И.А.* Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1962. – 200 с.
14. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
15. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: ДВЦ НТШ,

2007. – 716 с.

16. *Шацкий И.П.* О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжениии и изгибе // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – **25**, № 2. – С. 46–50.
17. *Шацкий И.П.* Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине // Теор. и прикл. механика. – 2000. – № 31. – С. 91–97.
18. *Шацький І.П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-матем. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
19. *Dempsey J.P., Shektman I.I., Slepyan L.L.* Closure of a through crack in a plate under bending // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**. – P. 4077–4089.
20. *Opanasovych V.K., Slobodyan M.S.* Bending of an isotropic plate with two identical coaxial through cracks depending on the width of the contact zone of their faces and in the presence of plastic zones near their tips // J. Math. Sci. – 2018. – **229**, №. 3. – P. 280–291.
21. *Opanasovych V.K., Slobodyan M.S.* Biaxial bending of an isotropic plate with through rectilinear crack with regard for the width of the contact zone of its edges and in the presence of plastic zones near its tips // J. Math. Sci. – 2018. – **228**, № 2.– P. 162–172.
22. *Slepyan L.I., Dempsey J.P., Shekhtman I.I.* Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending // J. Mech. Phys. Solids. – 1995. – **43**. – P. 1727–1749.
23. *Sulym H., Opanasovych V., Slobodian M., Bilash O.* Combined bending with tension of isotropic plate with crack considering crack banks contact and plastic zones at its tops // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – **12**, No. 2 (44). – P. 91–95.
24. *Young M., Sun C.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates // Int. J. Fract. – 1992. – **55**. – P. 81–93.

РОЗДІЛ 5

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ СМУГИ З МІКРОРЕЛЬЄФОМ НА ПОВЕРХНІ

В.І. Кузьменко

Викладено формулювання класу контактних задач для пружно-пластичних тіл в умовах складного навантаження. Числове розв’язання ґрунтується на формулюваннях у вигляді квазіваріаційної нерівності та операторного рівняння. Наведено розв’язки прямих та обернених задач про деформування пружно-пластичної смуги з мікронерівністю на поверхні. Вивчено характер деформаційного зміцнення приповерхневого шару, а також особливості утворення та згладжування мікронерівностей. Матеріал розділу ґрунтується на наукових результатах, опублікованих у працях [3, 9–19].

5.1. Формулювання контактних задач теорії пластичності за складного навантаження

Дамо загальне формулювання контактних задач про дію жорсткого інструмента (штампа) на поверхню пружно-пластичного тіла [3,9,10,17].

Відзначимо принципову проблему такого формулювання. На відміну від теорії пружності, в теорії пластичного деформування відсутня (і, мабуть, неможлива) загальноприйнятна модель, яка б достатньо повно описувала різноманітні ефекти непружного деформування реальних матеріалів. Фактично різними авторами запропонована значна кількість варіантів теорії пластичності, які ґрунтуються на різних ідеях та концепціях. Тому для побудови теорії контактної взаємодії пружно-пластичних тіл принципово важливо виділити узагальнену форму визначальних співвідношень, яка б охоплювала практично всі сучасні варіанти теорії пластичності.

Позначимо через t монотонно зростальний параметр, пов'язаний з навантаженням, який називатимемо часом. Надалі обмежимося вивченням контактної взаємодії за малих переміщень та деформацій. Під $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ розумітимемо компоненти вектора переміщень та тензорів деформацій і напружень, а під $\dot{u}_i, \dot{\varepsilon}_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}$ – похідні цих компонент за часом, які називатимемо швидкостями переміщень, деформацій та напружень. Як узагальнення визначальних співвідношень існуючих теорій пластичності уведемо уніфіковані визначальні співвідношення у такому вигляді [10]:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkm}(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_r, \dot{\varepsilon}_{\xi\eta})\dot{\varepsilon}_{km}, \tag{5.1}$$

де $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_r$ – значення функціоналів історії деформування. Коефіцієнти

$A_{ijkm}(\ldots)$ є однорідні функції нульового степеня відносно $\dot{\varepsilon}_{\xi\eta}$. Фіксуючи певний вигляд функцій A_{ijkm} та функціоналів $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_r$, в уніфікованій формі (5.1) можна подати визначальні співвідношення фактично усіх існуючих варіантів теорії пластичності.

Додатково вважаємо, що коефіцієнти $A_{ijkm}(\ldots)$ задовольняють умову

$$C_1\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \le A_{ijkm}(\ldots)\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{km} \le C_2\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad C_2 > C_1 > 0.$$

Об'єктом розв'язання контактних задач для пружно-пластичного тіла вважатимемо зміну параметрів напружено-деформованого стану залежно від зміни параметрів зовнішнього навантаження.

Позначимо через Ω область простору, яку займає тіло у недеформованому стані, через Γ – поверхню цієї області. Параметр t змінюється від нуля до значення T.

Зміну напружено-деформованого стану описуватимемо функціями $u_i(x,t),\ \varepsilon_{ij}(x,t),\ \sigma_{ij}(x,t),\ x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega,\ t\in[0,T]$. Поверхня Γ складається з трьох частин $\Gamma_u, \Gamma_\sigma, \Gamma_c$. На частині Γ_u задані переміщення

$$u_i(x,t)=U_i(x,t),\ \forall(x,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{5.2}$$

а на частині Γ_σ – зусилля

$$\sigma_{ij}(x,t)\nu_j(x,t)=S_i(x,t),\ \forall(x,t)\in\Gamma_u\times[0,T], \tag{5.3}$$

де $\nu_j(x)$ – компоненти вектора одиничної нормалі у точці x поверхі тіла.

По частині Γ_c на тіло діє недеформівний інструмент (штамп). Тертям між поверхнями тіла та штампа нехтуємо. Взаємне розташування тіла і штампа описує функція $\Phi(x,t)$, значення якої дорівнюють відстані від поверхні Γ_c до поверхні штампа, виміряної у напрямку нормалі до поверхні тіла.

Позначимо через $u_\nu(x,t),\ \sigma_\nu(x,t)$ нормальні компоненти векторів переміщень і напружень, через $\sigma_{\tau i}(x,t)$ – дотичні компоненти вектора напружень у точках поверхні тіла. Умови контактної взаємодії містять вимогу взаємного непроникнення тіла і штампа та умови відсутності нормальних розтягувальних зусиль у точках поверхні Γ_c:

$$u_\nu(x,t)\le\Phi(x,t),\ \sigma_\nu(x,t)\le 0,\ \sigma_{\tau i}(x,t)=0,$$

$$\sigma_\nu(x,t)\left[u_\nu(x,t)-\Phi(x,t)\right]=0,\ \forall(x,t)\in\Gamma_c\times[0,T]. \tag{5.4}$$

Підкреслимо, що формулювання умов контактної взаємодії не потребує інформації про фактичні області контакту.

У початковий момент часу тіло знаходилося у недеформованому та ненапруженому стані, тобто

$$u_i(x,0)=0,\ \ \sigma_{ij}(x,0)=0,\ \ \forall x\in\Omega\,. \qquad (5.5)$$

Очевидно, що для виконання таких початкових умов необхідно накласти додаткові обмеження на параметри зовнішнього навантаження:

$$U_i(x,0)=0,\ \ \forall x\in\Gamma_u\,,\ \ S_i(x,0)=0,\ \ \forall x\in\Gamma_\sigma\,,\ \ \Phi(x,0)\ge 0,\ \ \forall x\in\Gamma_c\,.$$

Отримуємо задачу побудови процесів зміни переміщень $u_i(x,t)$, деформацій $\varepsilon_{ij}(x,t)$, напружень $\sigma_{ij}(x,t)$, для яких виконуються визначальні рівняння (5.1), рівняння рівноваги, співвідношення Коші, крайові умови (5.2), (5.3), умови контактної взаємодії (5.4) та початкові (5.5).

5.2. Квазіваріаційна нерівність

Для обґрунтування коректності контактних задач та розробки алгоритмів числового розв'язання скористаємося узагальненим формулюванням у вигляді квазіваріаційної нерівності [10].

Виділимо передусім клас допустимих функцій. Введемо простір Соболєва $H\equiv\left[W_2^1(\Omega)\right]^3$ вектор-функцій $w(x)=(w_1(x),w_2(x),w_3(x))$ як гільбертовий простір зі скалярним добутком

$$(w^{(1)},w^{(2)})=\sum_{i=1}^{3}(w_i^{(1)},w_i^{(2)})_{L_2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(w_{i,j}^{(1)},w_{i,j}^{(2)})_{L_2(\Omega)}$$

та гільбертовий простір $L_2(0,T;H)$ вектор-функцій $v(x,t),\ (x,t)\in\Omega\times\left[0,T\right]$ зі скалярним добутком

$$(v^{(1)},v^{(2)})=\int_0^T(v^{(1)},v^{(2)})_H\,dt\,.$$

Виділимо множину $V\subset L_2(0,T;H)$ допустимих швидкостей, в яку включимо вектор-функції $\dot v(x,t)\in L_2(0,T;H)$, які задовольняють кінематичні умови :

$$V=\{\dot v\in L_2(0,T;H)\,|\int_0^t\dot v_i(x,\tau)d\tau=U_i(x,t),\ \ \forall(x,t)\in\Gamma_u\times\left[0,T\right],$$

$$\int_0^T\dot v_\nu(x,\tau)d\tau\le\Phi(x,t),\ \ \forall(x,t)\in\Gamma_c\times\left[0,T\right]\}\,.$$

Допустимим швидкостям переміщень відповідає тензор допустимих швидкостей деформацій:

$$\dot\zeta_{ij}=\frac{1}{2}(\dot v_{i,j}+\dot v_{j,i})\,.$$

Застосовуючи до тотожності

$$-\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij,j}(\dot{v}_i - \dot{u}_i)d\Omega = 0$$

теорему Остроградського–Гаусса та формулу диференціювання добутку, знаходимо, що

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}(\dot{\zeta}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij})d\Omega - \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij}\nu_j(\dot{v}_i - \dot{u}_i)d\Gamma = 0\,.$$

Враховуючи крайові умови та умови контактної взаємодії, отримуємо таку інтегральну рівність:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}(\dot{\zeta}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij})d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \dot{S}_i(\dot{v}_i - \dot{u}_i)d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \dot{\sigma}_\nu(\dot{v}_\nu - \dot{u}_\nu)d\Gamma = 0, \forall \dot{v} \in V\,. \qquad (5.6)$$

Виділимо у множині V підмножину $K(u)$ вектор-функцій, які задовольняють додаткову умову

$$v_\nu(x,t) \equiv \int_0^t \dot{v}_\nu(x,\tau)d\tau = \Phi(x,t)$$

для усіх таких $(x,t) \in \Gamma_c \times \left[0,T\right]$, що

$$u_\nu(x,t) \equiv \int_0^t \dot{u}_\nu(x,\tau)d\tau = \Phi(x,t)\,.$$

Зауважимо, що у точках фактичного контакту, за винятком моментів дотику та відставання, виконується рівність

$$\dot{v}_\nu(x,t) = \dot{u}_\nu(x,t),\ \forall \dot{v} \in K(u)\,.$$

У точках, вільних від контактування, маємо: $\dot{\sigma}_\nu(x,t) = 0$.

Отже, $\dot{\sigma}_\nu(\dot{v}_\nu - \dot{u}_\nu) = 0, \forall \dot{v} \in K(u)$ майже для всіх $(x,t) \in \Gamma_c \times \left[0,T\right]$.

Розглянемо тепер рівність (5.6), вважаючи $\dot{v}$ елементом множини $K(u)$. Тоді інтеграл за Γ_c дорівнює нулю. Інтегруємо тепер (5.6) на проміжку $\left[0,T\right]$ і отримуємо, що

$$\int_0^T \left[\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}(\dot{\zeta}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij})d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \dot{S}_i(\dot{v}_i - \dot{u}_i)d\Gamma \right] dt = 0,\ \ \forall \dot{v} \in K(u). \qquad (5.7)$$

Виразимо $\dot{\sigma}_{ij}$ через $\dot{\varepsilon}_{ij}$ та перетворимо (5.7) до вигляду

$$J_1(\dot{u}, \dot{v} - \dot{u}) \equiv \int_0^T [a(\ldots, \dot{u}, \dot{v} - \dot{u}) - F(\dot{v} - \dot{u})]dt = 0,\ \ \forall \dot{v} \in K(u), \qquad (5.8)$$

де

$$a(...,\dot{u},\dot{v}-\dot{u})=\int_{\Omega} A_{ijkm}(...,\dot{\varepsilon}_{\xi\eta})\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\zeta}_{ij}d\Omega\,,\quad F(\dot{v})=\int_{\Gamma_s}\dot{S}_i\dot{v}_i d\Gamma\,.$$

Отримана рівність аналогічна варіаційному рівнянню відносно швидкостей для класичних крайових задач [4] і відрізняється тим, що допустимі швидкості належать множині $K(u)$, яку можна утворити, лише знаючи розв’язок задачі.

Перетворимо рівність (5.8) у еквівалентну форму так, щоб допустимі функції належали множині V. Якщо $\dot{v}\in V\setminus K(u)$, то $J_1(\dot{u},\dot{v}-\dot{u})$ може набувати як додатних, так і від’ємних значень. Якщо додати до цього виразу доданок, що набуває достатньо великих значень у разі виходу за множину $K(u)$, то для усіх $\dot{v}\in V$ отриманий вираз буде невід’ємним. Зокрема, для кожного $\dot{v}\in V$ можна вказати таке $\varepsilon_0(v)>0$, що

$$J_1(\dot{u},\dot{v}-\dot{u})+\int_0^T\int_{\Gamma_c}[\sigma_\nu(u)(v-u)]/\varepsilon d\Gamma dt\ge 0,\ \ \forall\varepsilon<\varepsilon_0(v)\,. \tag{5.9}$$

Уведемо функцію $\psi(\sigma_\nu(u),v-u)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_\nu(u)(v-u)/\varepsilon$. Очевидно, що $\psi(\sigma_\nu(u),v-u)=+\infty$, якщо $\sigma_\nu<0, v<\Phi$, і $\psi(\sigma_\nu(u),v-u)=0$ – у решті випадків. Формально переходимо в (5.9) до границі при $\varepsilon\to 0$ і отримуємо:

$$J_2(\sigma_\nu(u),\dot{u},\dot{v}-\dot{u})\equiv J_1(\dot{u},\dot{v}-\dot{u})+\int_0^T F_c(\sigma_\nu(u),v-u)d\Gamma\ge 0,\ \ \forall\dot{v}\in V\,, \tag{5.10}$$

$$F_c=\int_{\Gamma_c}\psi(\sigma_\nu(u),v-u)d\Gamma\,.$$

Якщо $\psi(\sigma_\nu(u),v-u)=+\infty$ на множині ненульової міри в $\Gamma_c\times[0,T]$, то, за означенням, нерівність (5.10) вважають виконаною.

Отже, якщо $\dot{u}\in V$ – розв’язок задачі у диференціальному формулюванні, то цей розв’язок задовольняє також квазіваріаційну нерівність (5.10).

Доведемо, що розв’язок квазіваріаційної нерівності (5.10) є узагальненим розв’язком задачі у формулюванні підрозділу 5.1. Обмежимося умовами (5.4); виконання решти рівнянь та умов можна обґрунтувати так само, як і для контактних задач для нелінійно-пружних тіл [8,9], формально замінюючи переміщення швидкостями. Нехай $\dot{u}(x,t)$ – розв’язок нерівності (5.10). Введемо позначення $\Gamma_c^{(1)}(t)=\{x\in\Gamma_c\,|\,u_\nu(x,t)=\Phi(x,t)\}$, $\Gamma_c^{(2)}(t)=\Gamma_c\setminus\Gamma_c^{(1)}$ та покажемо, що $\sigma_\nu(x,t)\le 0,\forall x\in\Gamma_c^{(1)}$, $\sigma_\nu(x,t)=0,\ \forall\in\Gamma_c^{(2)}$.

Справді, якщо $\sigma_\nu(x,t)>0$ для точок, що утворюють множину

ненульової міри в $\Gamma_c^{(1)}(t)$, то для усіх $\dot{v}(x,t) \in V$, таких, що $v_\nu(x,t) < \Phi(x,t),\ \forall x \in \Gamma_c^{(1)}$, маємо $F_c(\sigma_\nu(u).v - u) = -\infty$. Коли $\sigma_\nu(x,t) \neq 0,$ $x \in \Gamma_c^{(2)}$, то, обравши $v = u \pm \varphi$, також приходимо до суперечності із квазіваріаційною нерівністю.

Теорема 5.1. Розв’язок задачі у диференціальному формулюванні задовольняє квазіваріаційну нерівність (5.10); навпаки, розв’язок квазіваріаційної нерівності є узагальнений розв’язок задачі у формулюванні підрозділу 5.1.

5.3. Числове розв’язання квазіваріаційної нерівності

Ідея методу полягає у попередній дискретизації за часом та послідовному розв’язуванні уже варіаційних нерівностей, які відповідають вузловим моментам часу [10].

Зауважимо, що траєкторії зовнішнього навантаження можуть мати злам. Це означає можливість розривів першого роду у швидкостях параметрів зовнішнього навантаження. Тоді відповідні швидкості переміщень також матимуть розриви першого роду за часом. Тому дискретизацію за часом слід виконати так, щоб точки розриву похідних припадали на вузлові моменти часу.

Розіб’ємо відрізок часу $\left[0,T\right]$ на n проміжків вузлами $t_0 = 0, t_1, t_2, ..., t_l, t_{l+1}, ..., t_n = T$. Слід передбачити можливість розривів у вузлові моменти часу, тому розрізнятимемо моменти часу $t_l - 0$ і $t_l + 0$. На кожному проміжку $\left[t_l + 0, t_{l+1} - 0\right]$ функції $\dot{v}_i(x,t)$ наближаємо лінійними функціями, тобто на відрізку $\left[0,T\right]$ функції $\dot{v}_i(x,t)$ наближаємо кусково-лінійними функціями $\dot{v}_{in}(x,t)$ із можливістю розривів першого роду за змінною t. Відповідну апроксимацію вектор-функції $\dot{v}(x,t)$ позначимо як $\dot{v}_n(x,t)$, а отриманий наближений розв’язок – як $\dot{u}_n(x,t)$. Вузлові значення переміщень визначимо послідовно за співвідношеннями

$$u_n(x,t_{l+1}) = u_n(x,t_l) + \left[\dot{u}_n(x,t_l + 0) + \dot{u}_n(x,t_{l+0} - 0)\right](t_{l+1} + t_l)/2.$$

Переформулюємо кінематичні умови контактної взаємодії відносно вузлових моментів часу

$$v_{\nu n}(x,t_l - 0) \leq \Phi(x,t_l - 0),\ \forall x \in \Gamma_c,\ l = 1,2,....,n, \tag{5.11}$$

$$\dot{v}_{\nu n}(x,t_l + 0) \leq \dot{\Phi}(x,t_l + 0) \tag{5.12}$$

для таких усіх $x \in \Gamma_c$, що

$$v_{\nu n}(x,t_l - 0) = \Phi(x,t_l - 0),\ l = 0,1,...,n-1,$$

а також умови на Γ_u :

$$\dot{v}_i(x,t_l-0)=\dot{U}_i(x,t_l-0),\ \ l=1,2,...,n, \tag{5.13}$$

$$\dot{v}_i(x,t_l+0)=\dot{U}(x,t_l+0),\ \ l=0,1,...,n-1. \tag{5.14}$$

Уведемо множину V_n кусково-лінійних функцій $\dot{v}_n\in L^2(0,T;H)$, утворених у вказаний спосіб, і які задовольняють умови (5.11)–(5.14). Нехай $\dot{u}_n\in V_n$ – наближений розв'язок задачі, $\sigma_{\nu n}$ – відповідні контактні напруження. Нехай $K_n(u_n)\subset V_n$ – підмножина функцій $\dot{v}_n\in V_n$, які задовольняють додаткові умови

$$\dot{v}_{\nu n}(x,t_{l-1}+0)=\dot{\Phi}(x,t_l+0),\ \ v_{\nu n}(x,t_{l-1}-0)=\Phi(x,t_l-0)$$

для всіх $x\in\Gamma_c$, таких, що $\sigma_{\nu n}(x,t_{l-1}+0)<0,\ \ l=1,2,...,n.$

Замінимо інтеграл за відрізком $[0,T]$ інтегральною сумою за формулою трапецій. Якщо $\dot{v}_n\in K_n(u_n)$, то значення ψ у вузлах $t_l\pm 0$ дорівнюють нулю, тому відповідні доданки в інтегральній сумі відсутні.

Нехай наближений розв'язок уже отриманий для $t\le t_l$. Покажемо, як визначити вузлові значення $\dot{u}_n(x,t)$ у моменти часу $t^*=t_l+0$ та $t^{**}=t_{l+1}-0$. Позначимо через $\chi_{1n}^{(l)},\chi_{2n}^{(l)},...,\chi_{rn}^{(l)}$ значення функціоналів історії деформування до моменту часу t_l-0. Уведемо множину K_n^* допустимих швидкостей у момент часу t^*, враховуючи, що при $t\le t^*$ наближений розв'язок уже отримано:

$$K_n^*=\{\dot{v}_n(x,t^*)\in H\,\big|\,\dot{v}_{in}(x,t^*)=\dot{U}_i(x,t^*),\ \ \forall x\in\Gamma_u\,;$$

$$\dot{v}_{\nu n}(x,t^*)\le\dot{\Phi}(x,t^*)\ \ \textit{для усіх}\ x\in\Gamma_c,\ \textit{таких, що}\ u_{\nu n}(x,t^*)=\Phi(x,t^*);$$

$$\dot{v}_{\nu n}(x,t^*)=\dot{\Phi}(x,t^*)\ \textit{для усіх}\ x\in\Gamma_c,\ \textit{таких, що}\ \sigma_{\nu n}(x,t^*)<0\}.$$

Вимагатимемо, щоб доданки в інтегральній сумі, які відповідають моменту часу t^*, були невід'ємні, і отримуємо таку інтегральну нерівність:

$$a(x,\chi_{1n}^{(l)},\chi_{2n}^{(l)},...,\chi_{rn}^{(l)},\dot{u}_n^*,\dot{v}_n^*-\dot{u}_n^*)-F(t^*,\dot{v}_n^*-\dot{u}_n^*)\ge 0,\ \ \forall\dot{v}_n^*\in K_n^*. \tag{5.15}$$

Вважаючи $\dot{u}_n(x,t^*)$ відомим, побудуємо множину K_n^{**} допустимих швидкостей у момент часу t^{**}:

$$K_n^{**}=\{\dot{v}_n(x,t^{**})\in H\,\big|\,\dot{v}_{in}(x,t^{**})=\dot{U}_i\,(x,t^{**}),\ \ \forall x\in\Gamma_u\,;$$

$$v_{\nu n}(x,t^{**})\equiv u_{\nu n}(x,t^*)+[\dot{u}_{\nu n}(x,t^*)+\dot{v}_{\nu n}(x,t^{**})](t_{l+1}-t_l)/2\le\Phi(x,t^{**}),\ \ \forall x\in\Gamma_c\,;$$

$$v_{\nu n}(x,t^{**})=\Phi(x,t^{**})\ \textit{для всіх}\ x\in\Gamma_c,\ \textit{таких, що}\ \sigma_{\nu n}(x,t^*)>0\}.$$

Значення $\dot{u}_n^{**}(x,t)$ знаходимо як розв'язок такої варіаційної нерівності:

$$a(x,\chi_{1n}^{(l)},\chi_{2n}^{(l)},...,\chi_{rn}^{(l)},\dot{u}_n^{**},\dot{v}_n^{**}-\dot{u}_n^{**})-F(t^{**},\dot{v}_n^{**}-\dot{u}_n^{**})\geq 0,\ \forall\dot{v}_n^{**}\in K_n^{**}. \quad (5.16)$$

Умови існування розв'язку варіаційних нерівностей типу (5.15) та (5.16) наведено у працях [8,9]. Для числового розв'язання варіаційних нерівностей запропоновані ефективні методи [2]. У працях [10, 16] встановлені умови слабкої збіжності послідовності $\{\dot{u}_n(x,t)\}$ до розв'язку квазіваріаційної нерівності та одночасно отримані достатні умови існування та єдиності розв'язку.

5.4. Обкочування роликом мікронерівностей на поверхні смуги

Одним із найефективніших способів оброблення поверхонь деталей у машинобудуванні є поверхневе пластичне деформування (ППД) [3,14], яке полягає у циклічному обкочування поверхонь кульками або роликами. Мета ППД, з одного боку, – згладити мікронерівності, а з іншого – зміцнити приповерхневий шар. Унаслідок такої технологічної операції зростає чистота поверхні та підвищується стійкість деталей до зношування.

Задача про рух циліндра уздовж поверхні пружно-пластичного тіла набагато складніша, ніж відповідні задачі теорії пружності та в'язкопружності. Для задач теорії пластичності неможливо виокремити лише усталений процес кочення незалежно від попереднього деформування. Відомі розв'язки задач про обкочування поверхонь пружно-пластичних тіл отримані з використанням спрощених формулювань. Зокрема, у працях [20, 21] контактну задачу про кочення циліндра уздовж поверхні ідеально-пружно-пластичної півплощини замінили простішою про рух заданого розподіленого навантаження, за яке обирали тиск за дії циліндра на пружну півплощину.

ППД розглядаємо як процес малого пружно-пластичного деформування під дією рухомого інструменту [3,14,15]. Підкреслимо, що такий процес є складний, містить як активне навантаження, так і розвантаження. Надалі вивчатимемо обкочування поверхонь недеформівними роликами у вигляді кругових циліндрів. Ролик вважатимемо досить широким, щоб розглядати ППД як плоску деформацію. Ролик може вільно обертатися навколо вісі. Поверхня ролика добре змащена, тому тертя між поверхнями деталі та ролика не беремо до уваги. Обертально-поступальний рух ролика відбувається унаслідок переміщення його осі так, що відстань від неї до поверхні деталі залишається незмінна.

Опишемо спосіб руху ролика відносно контактної поверхні (рис.5.1).

Вважатимемо переріз Γ_c площиною $x0y$ гладкою кривою, гомеоморфною відрізку $[\alpha,\beta]$ зміни деякого параметра ξ. Через таку відповідність можна ввести на Γ_c місцеву систему координат 0ξ, пов'язану з

декартовими координатами параметричними рівняннями $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$. Положення осі ролика у довільний момент часу задаватимемо функціями $\xi_0(t), \Delta(t)$. Вісь ролика знаходиться на прямій, що проходить через точку $\xi_0(t)$ у напрямку нормалі до Γ_c у цій точці (рис. 5.1). Положення циліндра на вказаній прямій визначає глибина занурення $\Delta(t)$, що дорівнює відстані від точки $\xi_0(t)$ до поверхні ролика.

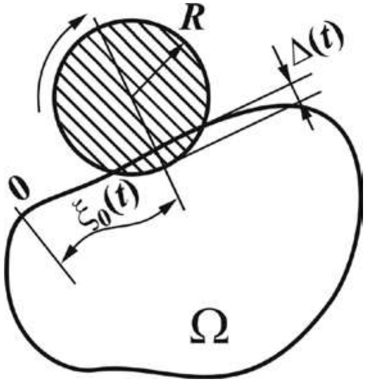


Рис. 5.1

Розглянемо спочатку особливості деформування смуги, на поверхні якої відсутні мікронерівності (рис. 5.2). Вважаємо, що смуга закріплена у точках нижньої та бічних граней. Верхня грань обкочується роликом з радіусом основи R.

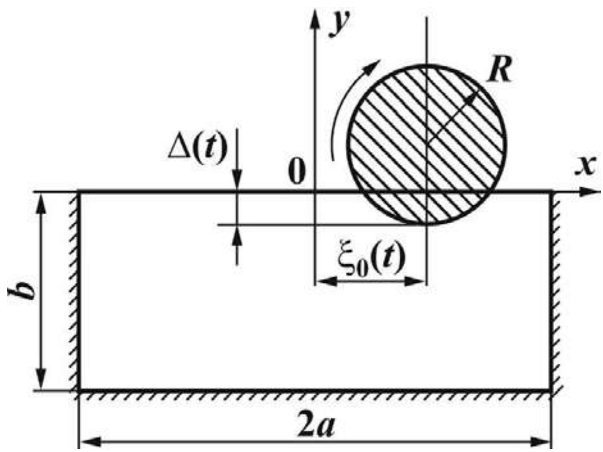


Рис. 5.2

Уведемо параметр $\xi = x/a$. Спочатку ролик упродовж часу $T/4$ занурюється на глибину Δ_0, а далі його вісь зі сталою швидкістю переміщується уздовж смуги паралельно осі $0x$.

Для числового розв'язання використовувалась теорія Ішлінського–Прагера. У межах цієї теорії зміцнення вважають лінійним і характеризують дотичним модулем G_t. Позначимо також через G модуль Юнга, через μ – коефіцієнт Пуассона, а через τ_s – границю плинності матеріалу смуги.

Числове розв'язання здійснювали згідно із алгоритмом, викладеним у підрозділі 5.3, і ґрунтували на дискретизації за часом та скінченно-елементній апроксимації варіаційних нерівностей для вузлових моментів часу. Відрізок $[0,T]$ розбивали на 80 проміжків. Апроксимували допустимі швидкості, використовуючи 1580 трикутних скінченних елементів. Числово досліджували за таких значень параметрів задачі: $b/a = 0{,}8$; $R = 0{,}1\dfrac{Ga}{\tau_s}$; $\mu = 0{,}3$. Розв'язували задачу та подавали результати у безрозмірному вигляді для таких значень занурення ролика:

$$\frac{\Delta_0 G}{\tau_s a} = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9\,.$$

Розподіл безрозмірного контактного тиску $q_0 = -\sigma_y / \tau_s$ наведений на рис. 5.3. Звернемо увагу на асиметрію кривих відносно лінії $\xi = 0$. У разі кочення по поверхні пружного тіла таку асиметрію пояснюють тертям ковзання. Оскільки тертя не враховували, то появу такої асиметрії варто пов'язувати із особливостями саме пружно-пластичного деформування.

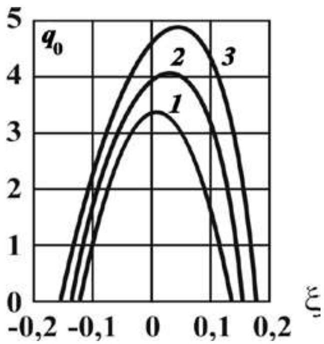


Рис. 5.3

На рис.5.4 зображено зони активних пластичних деформацій (виділено сіткою ліній) та зони розвантаження (горизонтальні лінії) для $\xi_0 = 0$ за тих же

значень занурення ролика. Відрізок AB на рис.5.4 проходить через вісь ролика.

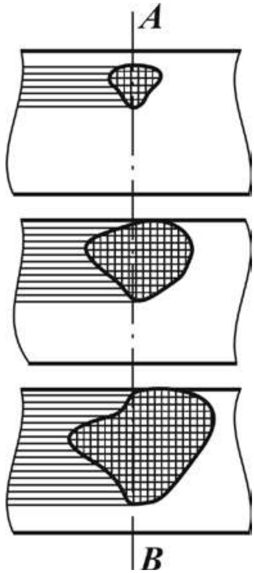


Рис. 5.4

Як можна побачити, справа від AB відбувається активне пластичне деформування, а зліва переважає зона розвантаження. Різний характер перебігу активного деформування та розвантаження якраз і зумовлює асиметрію епюри q_0.

Для технології ППД важливо мати значення сили, яку треба прикласти до ролика, щоб отримати потрібний характер деформування. Контактні зусилля зведемо до головного вектора P та головного моменту M. Момент M урівноважується моментом горизонтальної сили, яку треба прикласти до осі ролика, щоб здійснити кочення. Значення цього моменту, віднесене до $\tau_s a^2$, для $\Delta_0 G/(\tau_s a) = 0,5;\ 0,6;\ 0,7;\ 0,8;\ 0,9$ дорівнює відповідно 0,066; 0,088; 0,124; 0,172; 0,224. Робота горизонтальної сили забезпечує виникнення нових областей незворотних пластичних деформацій.

Відзначимо, що після вертикального занурення і початку горизонтального переміщення нормальне зусилля $P_0 = P/(\tau_s a)$ дещо зменшується (рис. 5.5). Номери кривих *1* – 5 відповідають $\Delta_0 G/(\tau_s a) = 0{,}5$; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Відмінність між нормальним навантаженням у момент початку кочення і на стадії його усталення зростає зі збільшенням глибини занурення ролика та досягає 20%.

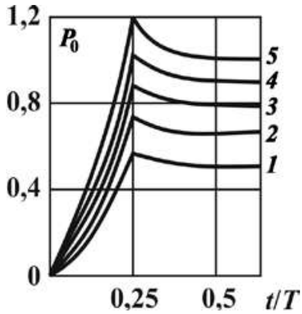


Рис. 5.5

Оцінимо глибину зміцненого шару та зміну меж плинності по товщині смуги залежно від глибини занурення ролика. Такі характеристики потрібні для розробки технології та обладнання ППД. На рис. 5.6 подано розподіл границі плинності τ_s по товщині зміцненого шару.

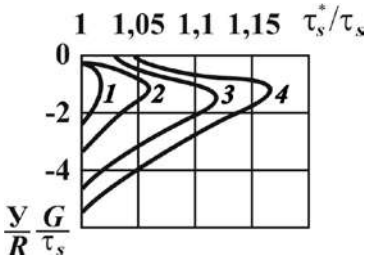


Рис. 5.6

Номери кривих *1–4* відповідають $\dfrac{\Delta_0}{R}\bigg/\left(\dfrac{\tau_s}{G}\right) = 4; 5; 6; 7$. Як бачимо, зростання границі плинності перевищує 15%. Особливо слід зауважити, що максимально матеріал зміцнюється не біля поверхні смуги, а на деякій глибині у приповерхневому шарі.

Розглянемо тепер закономірності процесу обкочування поверхні смуги з мікронерівністю (рис. 5.7). Форму нерівності описує рівняння

$$y = d\left[1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2\right]^2, \quad x \in [-c, c] .$$

Введемо безрозмірний параметр $d_0 = d\dfrac{G}{\tau_s a}$, який характеризує висоту мікронерівності.

Механічні характеристики та параметри числового розв'язання обрані такими ж, як і у попередній задачі. Розрахунки виконані для $\Delta_0 G/(\tau_s a) = 0,6$; $c = 0,1a$; $d_0 = 0,2;\ 0,4;\ 0,6$.

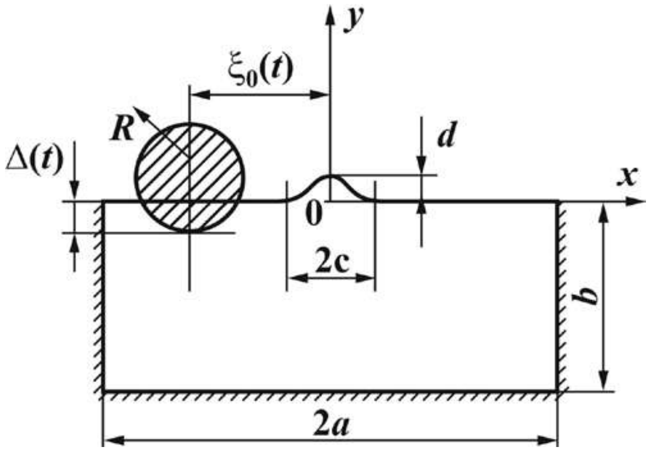


Рис. 5.7

Характер зміни вертикальної сили $P^0 = P/(\tau_s a)$, яку треба прикладати під час проходження через мікронерівність, ілюструє рис. 5.8.

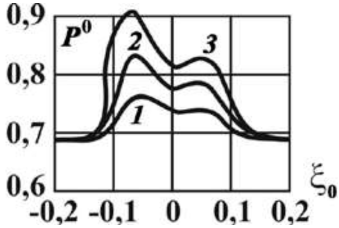


Рис. 5.8

Як бачимо, для деформування мікронерівності необхідно збільшити притискальну силу. Звернемо увагу на появу двох локальних максимумів. Щоб пояснити цей, дещо несподіваний результат, звернемося до аналізу контактного тиску для $d_0 = 0,6$ за різного розташування ролика відносно мікронерівності: $\xi_0 = -0,123$ (крива *1*), $\xi_0 = 0$ (крива *2*), $\xi_0 = 0,123$ (крива *3*) (рис. 5.9). Указані значення ξ_0 близькі до значень ξ, за яких досягаються локальні екстремуми контактного тиску. Відзначимо, що хоча при $\xi_0 = 0$ тиск дещо більший, ніж при $\xi_0 = \pm 0,123$, однак, область контакту суттєво менша,

що, зрештою, призводить до того, що при $\xi_0 = 0$ повний тиск менший, ніж коли $\xi_0 = \pm 0{,}123$.

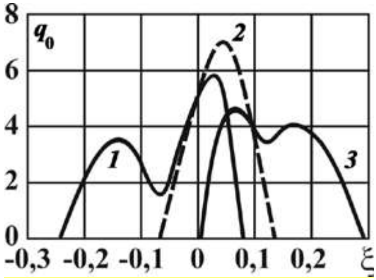


Рис. 5.9

Зони активних пластичних деформацій та зони розвантаження зображені на рис. 5.10 для трьох указаних раніше варіантів розташування ролика відносно мікронерівності. Зауважимо, що хоча при $\xi_0 = \pm 0{,}123$ ролик розташований симетрично відносно неї, однак, зони пластичних деформацій істотно відрізняються. Глибина області пластичного деформування більша, ніж у разі рівної поверхні.

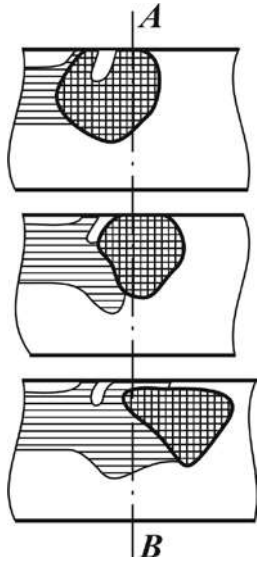


Рис. 5.10

Оцінимо, наскільки обкочування роликом змінює розмір та форму мікронерівності. На рис. 5.11 зображені профілі $\omega_0 = yG/(\tau_s a)$ залишкової

форми мікронерівності при $d_0 = 0,2$ (крива *1*) та $d_0 = 0,6$ (крива *2*). Для порівняння штриховою лінією позначено початковий профіль.

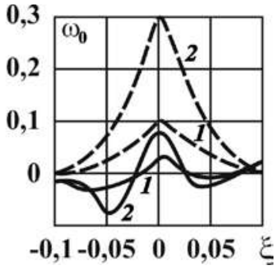


Рис. 5.11

Зауважимо, що після одноразового обкочування висота мікронерівності суттєво зменшилась, однак, повного згладжування не відбулося. Для підвищення чистоти поверхні треба здійснити декілька циклів обкочування. Загальне залишкове осідання смуги у середньому збільшується при $|\xi| < c$ порівняно із осіданням на рівних частинах поверхні. Підкреслимо, що залишкова форма профілю несиметрична, що пояснюють видавлюванням матеріалу у напрямку руху ролика.

5.5. Активне навантаження та розвантаження. Залишкова форма поверхні

Ключовою проблемою для технологій обробки металів тиском є визначення залишкової форми поверхні заготовки після активного пластичного деформування та наступного розвантаження. Крім того, важливо оцінити залишкові напруження у готовому виробі. Ці проблеми можна дослідити у межах загального формулювання, викладеного у підрозділі. 5.1, оскільки складне навантаження у пружнопластичних тілах охоплює як активне деформування, так і розвантаження. Однак окремо вивчити розвантаження набагато простіше та дає можливість отримати аналітичний розв’язок [12].

Нехай тіло піддається пружно-пластичному деформуванню впродовж часу t^*. Далі навантаження , прикладене до нього, поступово знімається, внаслідок чого у всіх точках тіла відбувається процес розвантаження. Вважаємо, що при $t \le t^*$ розв’язок контактної задачі отриманий зі застосуванням певної теорії пластичності, а у момент часу t^* використана пов’язана з цією теорією умова початку розвантаження.

Процес розвантаження виникає як наслідок зміни параметрів зовнішнього навантаження:

$$U_i(x,t^* + \Delta t) = U_i(x,t^*) + \Delta U_i(x,t^*),$$
$$S_i(x,t^* + \Delta t) = S_i(x,t^*) + \Delta S_i(x,t^*),$$
$$\Phi(x,t^* + \Delta t) = \Phi(x,t^*) + \Delta\Phi(x,t^*).$$

Відповідно під час розвантаження змінюються переміщення, деформації та напруження:

$$u_i(x,t^* + \Delta t) = u_i(x,t^*) + \Delta u_i(x,t^*),$$
$$\varepsilon_{ij}(x,t^* + \Delta t) = \varepsilon_{ij}(x,t^*) + \Delta\varepsilon_{ij}(x,t^*),$$
$$\sigma_{ij}(x,t^* + \Delta t) = \sigma_{ij}(x,t^*) + \Delta\sigma_{ij}(x,t^*). \qquad (5.17)$$

Вважаємо, що за розвантаження прирости компонент тензорів деформацій та напружень пов'язані лінійними співвідношеннями:

$$\Delta\sigma_{ij} = E^*_{ijkm}(x)\Delta\varepsilon_{km}.$$

Розв'язання задач про розвантаження за класичних крайових умов ґрунтується на теоремі Ільюшина [5], згідно із якою напружено-деформований стан у довільний момент розвантаження визначають співвідношення (5.17), а прирости Δu_i, $\Delta\varepsilon_{ij}$, $\Delta\sigma_{ij}$ отримано як розв'язок крайової задачі теорії пружності за заданих на частині поверхні переміщень ΔU_i, а на іншій частині – зусиль ΔS_i.

Очевидно, що формальна заміна величин, які входять до умов контактної взаємодії (5.4), їх приростами може призвести до порушення цих умов, тому теорему про розвантаження не можна безпосередньо перенести на задачі контактної взаємодії. Такий висновок слід пояснити нелінійністю умов контактної взаємодії у вигляді нерівностей.

Узагальнимо теорему про розвантаження на контактні задачі так, щоб зберегти співвідношення (5.17). Сформулюємо спеціальні умови для приростів у точках поверхні можливого контакту:

$$\Delta\sigma_\nu(x,t) \le -\sigma_\nu(x,t^*),\ \ \Delta\sigma_\tau = 0,$$
$$\Delta u_\nu(x,t) \le -u_\nu(x,t^*) + \Phi(x,t),$$
$$\left[\Delta\sigma_\nu(x,t) + \sigma_\nu(x,t^*)\right]\left[\Delta u_\nu(x,t) + u_\nu(x,t^*) - \Phi(x,t)\right] = 0,$$
$$\forall(x,t) \in \Gamma_c \times \left[0,T\right]. \qquad (5.18)$$

Неважко переконатися, що коли прирости $\Delta u_i, \Delta\sigma_{ij}$ задовольняють умови (5.18), то u_i, σ_{ij}, визначені за співвідношеннями (5.17), задовольняють умови контактної взаємодії (5.4).

Отже, отримуємо таке узагальнення теореми Ільюшина для задач контактної взаємодії.

Теорема 5.2. Для визначення напружено-деформованого стану під час розвантаження за контактної взаємодії тіла та штампа достатньо розв’язати задачу лінійної теорії пружності для приростів Δu_i, $\Delta\varepsilon_{ij}$, $\Delta\sigma_{ij}$, замінивши у крайових умовах U_i, S_i на ΔU_i, ΔS_i та обравши умови (5.18) на поверхні можливого контакту. Компоненти вектора переміщень, тензорів деформацій та напружень визначаються за співвідношеннями (5.17).

Наслідок теореми 5.2. Якщо під час дії на поверхню пружно-пластичного півпростору штамп переміщується поступально уздовж нормалі до поверхні, а контактний тиск у момент початку розвантаження обмежений, то з початком розвантаження відрив контактуючих поверхонь починається з точок контуру області контакту.

Справді, нехай упродовж як завгодно малого проміжку часу Δt після початку розвантаження область контакту не зменшилась. Тоді з теореми 5.2 випливає, що прирости контактного тиску дорівнюють контактному тиску під штампом з плоскою основою, що занурюється на глибину $\Delta\Phi$. У такому разі за як завгодно малого $\Delta\Phi$ контактні напруження на контурі області контакту будуть необмежені. Оскільки, за умовою, контактний тиск у момент початку розвантаження обмежений, то порушується вимога

$$\sigma_\nu(x,t^*)+\Delta\sigma_\nu(x,t)\le 0 .$$

Зауважимо, що у разі достатньо глибокого занурення штампа залишкові напруження можуть викликати повторне пластичне деформування. Тоді висновки теореми можуть бути застосовані лише до початку виникнення повторних пластичних деформацій.

Наведемо приклад аналітичного розв’язку контактної задачі про розвантаження. Нехай у пружно-пластичний півпростір $x_3 \le 0$ на глибину Φ^* утискається круговий штамп з плоскою основою радіусом c . Потім глибина занурення монотонно зменшується. Тертя не беремо до уваги. Розподіл контактного тиску $p^*(x_1,x_2)$ у момент початку розвантаження вважаємо відомим. Вважаємо також, що пластичне деформування не змінило пружних сталих – модуля Юнга E та коефіцієнта Пуассона μ .

Визначимо радіус кругової області контакту та розподіл контактного тиску залежно від глибини занурення штампа. Знайдемо також профіль залишкового відбитка на поверхні півпростору.

Задачу про дію кругового штампа на жорстко-пластичний півпростір вивчали у праці [6] із залученням умови повної пластичності.

Уведемо циліндричну систему координат $0rz\varphi$ із початком у центрі круга початкового контакту. Нехай у деякий момент розвантаження глибина занурення штампа зменшилась на $\Delta\Phi$. Згідно з теоремою 5.2, розподіл тиску за глибини занурення $\Phi^*-\Delta\Phi$ можна подати у вигляді

$$p(r) = p^*(r) - \Delta p(r),$$

де $\Delta p(r)$ – розподіл тиску на поверхні контакту, отриманий з розв'язку задачі теорії пружності для півпростору за таких крайових умов:

$$-\sigma_{zz}(r,0,\varphi) = \Delta p(r) \le p^*(r), \tag{5.19}$$

$$\Delta\sigma_{rz}(r,0,\varphi) = \Delta\sigma_{z\varphi}(r,0,\varphi) = 0,\ -\Delta u_z(r,0,\varphi) \ge \Delta\Phi,\ \forall r \le c, \tag{5.20}$$

$$\left[\Delta p(r) - p^*(r)\right]\left[\Delta u_z(r,0,\varphi) + \Delta\Phi\right] = 0,$$

$$\Delta\sigma_{zz}(r,0,\varphi) = \Delta\sigma_{rz}(r,0,\varphi) = \sigma_{z\varphi}(r,0,\varphi) = 0,\ \forall r > c.$$

Вважаючи, що контактні напруження на початку розвантаження обмежені, скористаємося наслідком теореми 5.2 і зробимо висновок, що область контакту під час розвантаження – круг, радіус a якого монотонно зменшується зі зменшенням глибини занурення штампа .Тоді умови (5.19), (5.20) можна замінити такими:

$$\Delta p(r) = p^*(r),\ a \le r \le c,$$

$$-u_z(r,0,\varphi) = \Delta\Phi, r \le a,$$

$$\Delta\sigma_{rz}(r,0,\varphi) = \Delta\sigma_{z\varphi}(r,0,\varphi) = 0, r \le c. \tag{5.21}$$

Умови (5.21) відповідають задачі теорії пружності про дію на півпростір кругового штампа з плоскою основою радіуса a та нормального навантаження $p^*(r)$, розподіленого по кільцевій області $a \le r \le c$. Така задача є окремий випадок задачі Галіна про дію на півпростір кругового штампа та нормального навантаження, розподіленого поза штампом. Використовуючи розв'язок Галіна [1], подамо $\Delta p(r)$ у вигляді

$$\Delta p(r) = \Delta p_1(r) + \Delta p_2(r),$$

де $\Delta p_1(r)$ – тиск під круговим штампом з плоскою основою радіуса a за занурення на глибину $\Delta\Phi$:

$$\Delta p_1(r) = \frac{E}{\pi(1-\mu^2)} \frac{\Delta\Phi}{\sqrt{a^2 - r^2}},$$

Δp_2 – додатковий тиск , що виникає під штампом з радіусом основи a від дії навантаження $p^*(r)$, розподіленого на кільцевій області $a \le r \le c$:

$$\Delta p_2 = -\frac{1}{\pi^2} \int_a^c \frac{p^*(\rho)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\vartheta} \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{a^2 - r^2}} \rho\, d\rho\, d\vartheta.$$

Радіус області контакту визначимо з умови неперервності тиску $\Delta p(a) = 0$. Визначення форми залишкового відбитка зводиться до обчислення

переміщень точок круга $r \le c$ від дії розподіленого на ньому нормального навантаження $p^*(r)$. Використовуючи розв'язок Буссинеска, отримуємо профіль залишкового відбитка:

$$w(r) = -\Delta\Phi^* + \frac{1-\mu}{E}\int_a^c \int_0^{2\pi} \frac{p^*(\rho)}{\sqrt{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\vartheta}}\rho d\rho d\vartheta .$$

Отже, отримані у квадратурах розподіл контактного тиску під час розвантаження та форма залишкового відбитка за будь-якого розподілу тиску $p^*(r)$ у момент початку розвантаження.

Якщо $p^*(r) = p^* = const$, вдається отримати прості формули для радіуса області контакту, контактного тиску та форми залишкового відбитка. Зазначимо, у разі жорстко-пластичного тіла розподіл контактного тиску відрізняється від середнього значення не більше, ніж на 7%.

При $p^*(r) = p^* = const$ отримуємо:

$$\Delta p_2(r) = \frac{2p^*}{\pi} arctg\sqrt{\frac{c^2 - r^2}{a^2 - r^2}} - \frac{2p^*}{\pi}\sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2 - r^2}} .$$

Умова неперервності тиску на контурі області контакту $p^* - \Delta p(a) = 0$ виконуватиметься, якщо обрати такий радіус області контакту:

$$a = \left\{ c^2 - \left[\frac{E}{2p^*(1-\mu^2)}\Delta\Phi \right]^2 \right\}^{1/2} . \tag{5.22}$$

Формула (5.22) зберігає сенс при $\Delta\Phi < 2p^* c(1-\mu^2)/E$; при $\Delta\Phi = 2p^* c(1-\mu^2)/E$ штамп повністю відривається від півпростору.

Візьмемо радіус контакту згідно з (5.22) і отримаємо розподіл контактного тиску в довільний момент розвантаження:

$$p(r) = \begin{cases} p^* - \dfrac{2p^*}{\pi} arctg\sqrt{\dfrac{c^2 - a^2}{a^2 - r^2}}, r \le a, \\ 0, r > a. \end{cases}$$

Профіль залишкового відбитка описує вираз

$$w(r) = -\Phi(r) + \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E} p^* c \mathrm{E}\left(\frac{r}{c}\right),$$

де $\mathrm{E}(...)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду.

5.6. Обернені задачі утворення мікрорельєфу заданого профілю

Використання технологій обробки металів тиском для утворення спеціального рельєфу на поверхні заготовки має низку суттєвих переваг проти інших операцій. По-перше, не втрачається матеріал заготовки у вигляді стружки за оброблення різанням або у вигляді випарів під час лазерного чи електроіскрового оброблення. По-друге, деформаційно зміцнюється поверхневий шар заготовки, що сприяє контактній міцності та стійкості до зношування. Нарешті, зменшуються технологічні та енергетичні витрати.

Принциповою проблемою у технологіях обробки тиском за малих деформацій заготовки є велика частка пружних деформацій у загальній пружно-пластичній деформації. Після зняття навантаження відбувається так зване «пружне відновлення форми», унаслідок чого залишкова форма поверхні контакту суттєво відрізняється від форми інструмента. Тому необхідно визначити форму інструмента, за дії якого поверхня заготовки після пружно-пластичного деформування та пружного відновлення набуває потрібної форми. Таку задачу природно розглядати як обернену контактну задачу теорії пластичності [3,13,19].

Нехай тіло Ω обмежене поверхнею $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_c$. На частині Γ_u воно закріплене, а на частині Γ_σ вільне від навантаження. Поверхня Γ_c перебуває під дією жорсткого інструмента (штампа). Форму поверхні штампа опишемо функцією $f(x)$, значення якої дорівнюють відстані від точки $x \in \Gamma_c$ до поверхні штампа, виміряній у момент часу $t = 0$ у напрямку нормалі $\nu(x)$ до поверхні тіла. Закон руху штампа як твердого тіла вважаємо заданим і таким, щоб при $t \le t^* - 0$ у тілі відбувалося пружно-пластичне деформування, а при $t = t^* + 0$ – тільки розвантаження або активне пружне деформування. У момент часу $t = T$ контактування між тілом і штампом повністю відсутнє.

Формулювання прямих задач визначення напружено-деформованого стану, коли задана форма штампа, наведена у підрозділі 5.1, а задача про розвантаження та залишкову форму поверхні – у підрозділі 5.5. Потрібну форму поверхні Γ_c у залишковому стані задаватимемо функцією $f_0(x), x \in \Gamma_c$, значення якої дорівнюють відстані від точок недеформованої поверхні Γ_c до точок цієї ж поверхні у залишковому стані.

Під оберненою розумітимемо задачу визначення функції $f(x)$ так, щоб після пружно-пластичного деформування та розвантаження форму поверхні Γ_c описувала функція $f_0(x)$.

Розглянемо три допоміжні задачі.

Задача 1. Використовуємо визначальні співвідношення теорії пластичності (5.1). На поверхнях Γ_u та Γ_σ задані однорідні крайові умови, а

поверхня Γ_c перебуває під дією штампа. Форму поверхні штампа задаємо так, щоб у результаті його руху за заданим законом відстань від точки поверхні Γ_c до поверхні штампу у момент часу t^* дорівнювала значенню функції $\psi(x)$. Якщо при $t = t^*$ у точці $x \in \Gamma_c$ контактування відсутнє, то ця точка отримує нормальне переміщення $\psi(x) - u_\nu(x, t^*)$. Треба знайти розподіл нормальних контактних напружень на Γ_c у момент часу t^*.

Задачу 2 формулюємо так само, як і задачу 1, лише напруження та деформації пов’язані співвідношеннями теорії пружності.

Задача 3 – це задача лінійної теорії пружності: на Γ_c задані зусилля $\sigma_\nu(x) = q(x), \sigma_{\tau i}(x) = 0$, а на Γ_u та Γ_σ – однорідні крайові умови; треба знайти нормальні переміщення точок поверхні Γ_c.

Кожна із сформульованих задач має єдиний розв’язок. Отримані розподіли нормальних переміщень $u_\nu(x)$ та контактного тиску $q(x)$ належать просторам $\left[H^{1/2}(\Gamma_c)\right]^3$ та $\left[H^{-1/2}(\Gamma_c)\right]^3$ відповідно.

Нехай $u^* \in \left[H^1(\Omega)\right]^3$ – розв’язок задачі 2. Визначимо компоненти тензора деформацій за співвідношеннями Коші і уведемо функцію густини деформацій

$$W(\varepsilon_{ij}^*) = \frac{1}{2} E_{ijkm} \varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{km}^*.$$

Тоді кожній функції $\psi \in \left[H^{1/2}(\Gamma_c)\right]$ можна поставити у відповідність енергетичну норму

$$\|\psi\| = \left[\int_\Omega W(\varepsilon_{ij}^*)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.23}$$

Отже, елементи $\psi \in \left[H^{1/2}(\Gamma_c)\right]$ утворюють банаховий простір з нормою (5.23), який позначимо через Π.

Аналогічно визначимо ε_{ij}^{**} із розв’язку задачі 3 і введемо банаховий простір Т елементів $q \in \left[H^{-1/2}(\Gamma_c)\right]^3$ з нормою

$$\|q\| = \left[\int\limits_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^{**}) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Сформулюємо обернену задачу як задачу розв'язання операторного рівняння. Оператор $Q_p : \Pi \to \mathrm{T}$ кожній функції $\psi \in \Pi$ ставить у відповідність розподіл контактного тиску $q \in \mathrm{T}$, отриманий після розв'язання задачі 1. Дія оператора $Q_e : \Pi \to \mathrm{T}$ відрізняється від дії оператора Q_p тим, що розподіл тиску $q \in \mathrm{T}$ отримано після розв'язання задачі 2. Обернений оператор $Q_e^{-1} : \mathrm{T} \to \Pi$ тиску $q \in \mathrm{T}$ ставить у відповідність розв'язок $\psi \in \Pi$ задачі 3.

Контактний тиск у момент початку розвантаження подамо за допомогою оператора Q_p:

$$q^*(x) = Q_p\left[\psi(x)\right].$$

Надамо тепер точкам поверхні Γ_c у залишковому стані нормалні переміщення $\psi(x) - f_0(x)$. Вважаємо, що при цьому виникають лише пружні деформації, і отримуємо відповідний тиск

$$q^{**}(x) = Q_e\left[\psi(x) - f_0(x)\right].$$

Ґрунтуючись на теоремі про розвантаження, робимо висновок, що

$$q^*(x) = q^{**}(x), \forall x \in \Gamma_c,$$

або

$$Q_p(x) = Q_e\left[\psi(x) - f_0(x)\right].$$

Подамо отримане операторне рівняння у канонічному вигляді:

$$\psi(x) = P\left[\psi(x)\right], \tag{5.24}$$

де $P\left[\psi\right] \equiv f_0 + Q_e^{-1} Q_p\left[\psi\right]$.

Отже, розв'язання оберненої контактної задачі теорії пластичності зведено до розв'язання операторного рівняння (5.24) відносно розподілу нормальних переміщень $\sigma_{\nu}(x) \equiv \psi(x)$ точок поверхні Γ_c у момент початку розвантаження.

Доведення коректності сформульованої оберненої задачі ґрунтується на принципі стискальних операторів [7].

Виділимо у просторі Π опуклу замкнену множину Π_0, елементи якої задовольняють нерівність

$$\left\| \psi - f_0 - Q_e^{-1} \right\| \le a \left\| f_0 \right\|, \ a < 1.$$

Очевидно, що розв'язок операторного рівняння належить множині Π_0.

Позначимо через $P'(\psi)$ похідну Фреше оператора P.

За зроблених припущень існує таке число α, що виконується нерівність

$$\sup_{\psi\in\Pi_0} \left\| P'(\psi) \right\| \le \alpha < 1 .$$

Теорема 5.3. За зроблених припущень існує єдиний розв’язок $\psi_* \in \Pi_0$ операторного рівняння (5.24), причому ψ_* можна отримати як границю послідовності за допомогою рекурентного співвідношення

$$\psi_{n+1} = P(\psi_n), \ (n = 0,1,2,...) ,$$

де ψ_0 – довільний елемент із Π_0.

Доведення. Скористаємось формулою скінченних приростів у такому вигляді[7]:

$$\left\| P(\psi^{(1)}) - P(\psi^{(2)}) \right\| \le \left\| \psi^{(1)} - \psi^{(2)} \right\| \sup_{0\le\vartheta\le1} \left\| P'(\psi^{(2)} + \vartheta(\psi^{(1)} - \psi^{(2)})) \right\| .$$

Тоді

$$\left\| P(\psi^{(1)}) - P(\psi^{(2)}) \right\| \le \alpha \left\| \psi^{(1)} - \psi^{(2)} \right\| . \tag{5.25}$$

Простір Π можна розглядати як метричний із відстанню

$$\rho(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \left\| \psi^{(1)} - \psi^{(2)} \right\| .$$

Нерівність (5.25) означає, що оператор P – стискальний. Висновки теореми випливають із принципу стискальних операторів [7].

Теорема 5.3 стосується розв’язування операторного рівняння. Ґрунтуючись на ній, повертаємося до питання про коректність формулювання оберненої задачі.

Теорема 5.4. Для дослідження питання про існування та єдиність розв’язку оберненої контактної задачі теорії пластичності та фактичного отримання потрібної форми штампа треба розв’язати операторне рівняння (5.24). Якщо для отриманого розв’язку $\psi_*(x)$ відповідні значення контактного тиску $q_*(x)$ на множині ненульової міри в Γ_c строго додатні, то обернена контактна задача не має розв’язку. Якщо $q_*(x) \le 0$ майже для всіх $x \in \Gamma_c$, то існує єдиний розв’язок оберненої контактної задачі теорії пластичності.

Зауважимо, що за допомогою принципу стискальних операторів встановлена також коректність формулювання задачі за третьою умовою Адамара.

Наслідок теореми 5.4. Обернена контактна задача із додатково заданою залишковою формою $f_{\sigma0}$ вільної поверхні не має розв’язку майже для всіх довільно заданих функцій $f_{\sigma0}$.

Дійсно, обернена контактна задача має єдиний розв’язок, якому відповідає єдина залишкова форма вільної поверхні. Зрозуміло, що така форма, взагалі кажучи, не може описуватися довільно обраною функцією $f_{\sigma 0}(x)$.

Розглянемо два приклади розв’язання задач про утворення потрібної залишкової форми смуги. Розв’язки отримано з використанням теорії малих пружно-пластичних деформацій для матеріалу з лінійним зміцненням за такого відношення дотичного та пружного модулів: $G_t / G = 0,05$ та коефіцієнта Пуасона $\mu = 0,3$. Через τ_s позначаємо границю плинності на зсув.

Розв’язок прямих задач ґрунтувався на варіаційному підході та скінченно-елементній апроксимації.

Нехай на поверхні смуги в умовах плоскої деформації треба утворити залишкове заглиблення у вигляді трапеції (рис. 5.12). Залишкова форма вільних поверхонь, згідно із наслідком теореми 5.2, не може фіксуватися і на рис. 5.12 умовно зображена штриховою лінією, Інструмент може переміщатися лише вертикально, догори та донизу. Безрозмірний параметр d характеризує глибину залишкового відбитка.

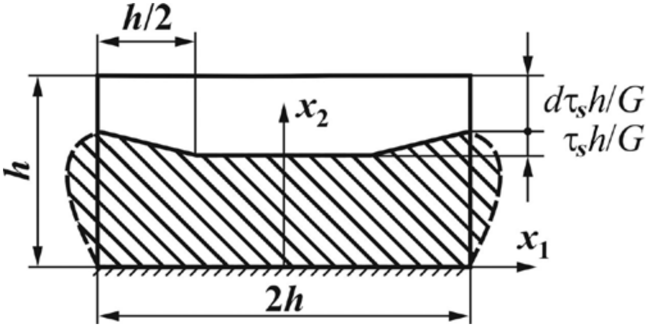


Рис. 5.12

Дискретизували прямі задачі з використанням 800 прямокутних скінченних елементів з білінійним поданням переміщень. Скінченновимірні задачі умовної оптимізації розв’язували методом послідовної верхньої релаксації.

Для визначення форми штампа з похибкою, що не перевищує $0,001\tau_s h / G$, виявилося достатньо від 4 до 7 наближень ітераційного процесу розв’язання операторного рівняння (залежно від глибини відбитка). Зауважимо, що зі збільшенням глибини відбитка кількість ітерацій зменшується.

На рис. 5.13 подано нормальні переміщення точок поверхні контакту та відповідний розподіл тиску у момент початку розвантаження за різних значень d. Переміщення та тиск наведено у безрозмірному вигляді:

$$\psi^0 = \frac{\psi_* G}{\tau_s h}, \; q_0 = \frac{q_*}{\tau_s}.$$

Штриховими лініями зображено профіль залишкового відбитка, заради зручності порівняння зміщеного уздовж осі $0x_2$.

Зауважимо, що переміщення у момент початку розвантаження, а отже, і форма штампа суттєво відрізняються від профілю відбитка.

Звернемо увагу на появу розтягувальних контактних напружень при $d < 1,5$. Це означає, що відбиток потрібного профілю можна отримати лише при $d > 1,5$. Для занурення штампів на потрібну глибину необхідно при $d = 1,5;\, 2;\, 2,5$ прикласти до штампа зусилля $5,58\tau_s h;\; 5,9\tau_s h;\; 6,22\tau_s h$ на одиницю його ширини.

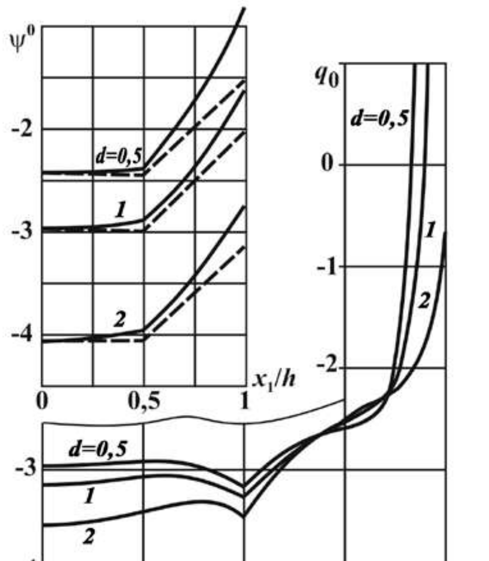


Рис. 5.13

Розглянемо тепер задачу про утворення симетричних мікронерівностей на верхній та нижній поверхнях смуги (рис. 5.14). З огляду на симетрію наведемо лише рівняння мікронерівності на верхній межі смуги:

$$x_2 = 0,5h + \frac{\tau_s h}{G}\left(\cos\frac{\pi x_1}{h} - d\right), \; |x_1| \le 0,5h.$$

Безрозмірний параметр d характеризує залишкове зменшення товщини смуги. Поза мікронерівностями слід забезпечити плоску поверхню у залишковому стані.

Мікронерівності утворюються внаслідок стиснення смуги двома штампами та розвантаження. Щоб оцінити вплив параметра d на шукану форму штампів, розраховували для таких значень цього параметра:

$$d = 0,5;\ 1;\ 1,05;\ 1,1;\ 1,2;\ 1,5;\ 2.$$

Переріз смуги розбивали на 1600 скінченних елементів з білінійною функцією форми.

Числове дослідження виявило, що при $d = 0,5$ та $d = 1$ неможливо знайти форму штампа, за якої забезпечується потрібний профіль мікронерівності.

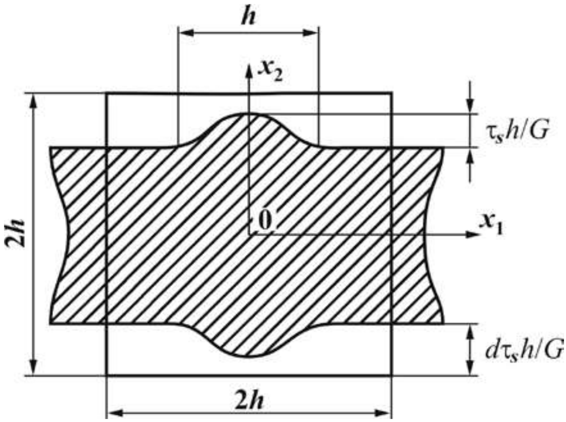


Рис. 5.14

Відмінність отриманого профілю мікронерівності від форми штампа ілюструє рис 5.15. Підкреслимо, що зі зростанням d зменшується відмінність між формою штампа та профілем мікронерівності і скорочується кількість необхідних ітерацій із розв’язання операторного рівняння. Відповідні розподіли контактних напружень подано на рис. 5.16. Відзначимо, що максимальні значення тиску на інструмент досягаються на двох симетричних ділянках і практично не залежать від значення d .

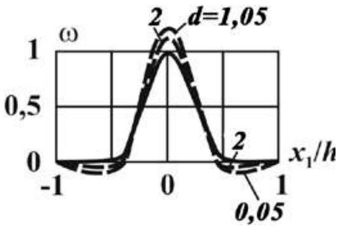


Рис. 5.15

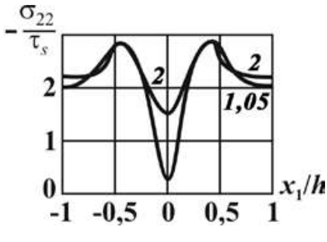


Рис. 5.16

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
2. *Гловински Р., Лионс Ж.-Д., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
3. *Данченко В.Н., Миленин А.А.,Кузьменко В.И., Гринкевич В.А.* Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением. Численные методы. – Днепропетровск: Системные технологии, 2005. – 448 с.
4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Мир, 1998. – 384 с.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: Изд-во АН СРСР, 1963. – 272 с.
6. *Ишлинский А.Ю.* Осесимметричная задача пластичности и проба Бринеля // Прикл. математика и механика. – 1944. – **8**, вып.3. – С. 201–224.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
8. *Кравчук А.С.* К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел // Прикл. математика и механика. – 1977. – **41**, вып. 6. – С. 329–337.
9. *Кузьменко В.И.* О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, вып. 5. – С. 893 – 901.
10. *Кузьменко В.И.* О контактных задачах теории пластичности при сложном нагружении // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48,** вып. 3. – С. 473 –481.
11. *Кузьменко В.И.* Контактные задачи для упругопластической полосы при сложном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1985. – №6. – С. 128–135.
12. *Кузьменко В.И.* О процессе разгрузки при контактном взаимодействии // Прикл. математика и механика. – 1985. – **49**, вып. 3. – С.445–452.
13. *Кузьменко В.И.* К обратным контактным задачам теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50,** вып. 3. – С. 475–482.
14. *Кузьменко В.И., Бондаренко В.М.* Исследование на ЭВМ процесса поверхностного пластического деформирования // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. –№ 10. – С.120–123.
15. *Кузьменко В.И.* О качении цилиндра по поверхности упругопластического тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 6. – С. 121–127.
16. *Кузьменко В.И.* О единственности решения контактных задач теории пластичности // Вопросы прочности и пластичности: сб. научн. тр. – Днепропетровск: ДГУ, 1987. – С. 13–17.
17. *Кузьменко В.И.,Балакин В.Ф.* Решение на ЭВМ задач пластического деформирования – К.: Техніка, 1990. – 136 с.

18. *Кузьменко В.І.* Про достатні умови існування розв’язку у математичних моделях контактної взаємодії // Питання прикл. математики і матем. моделювання. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2003. – С. 142–147.
19. *Кузьменко В.І., Хитрова Т.В.*Про обернені задачі механіки деформівного тіла // Вісник Дніпропетровського нац. ун-ту. Серія Механіка. – 2011. – Вип. 15. Т.2. – С. 140–146.
20. *Bharhava V., Hahn G.T., Rubin C.A.* An elastic-plastic finite element model of rolling contact. Part 1: Analisys of single contacts // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1985. – **52**, No. 1 – P. 67–74.
21. *Mervin J.E., Johhson K.L.* An analysis of plastic deformation in rolling contact // Chartered Mech. Engr. – 1963. – **10**, No.2. – P. 94.

РОЗДІЛ 6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФРИКЦІЙНОГО І БЕЗФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ ПРУЖНИХ ШОРСТКИХ ТІЛ

О.В. Приходько

Контактні задачі в класичній постанові ґрунтуються на припущенні, що поверхня взаємодіючих тіл є ідеально гладкою. Але в природі таких тіл не існує. Тому доцільно, досліджуючи процеси контактування тіл, враховувати шорсткість їхніх поверхонь. Таку спробу при формулюванні контактних задач вперше зробив І.Я. Штаєрман [14] у 1949 році. Розвивали ці дослідження І.Г. Горячева, М.М. Добичін [7], В.М. Александров [5, 6], К. Джонсон [10], Н.Б. Демкін [9], О.С. Кравчук [11] та інші. Дослідники врахували шорсткість поверхонь взаємодіючих тіл, вводячи доданки у вирази відносних зміщень протилежних поверхневих точок тіл і використовуючи уточнені відносні зміщення для формулювання крайових умов контактної задачі. Ці доданки задають зім'яття та зсув мікровиступів шорстких тіл.

Відомі чисельні методи розв'язання контактних задач теорії пружності, як з урахуванням шорсткості поверхонь взаємодіючих тіл, так і без, можна умовно розділити на дві групи: варіаційні та неваріаційні. Серед неваріаційних окремої уваги заслуговує група методів, характерною особливістю якої є те, що систему співвідношень, які описують умови взаємодії пружних тіл за класичного формулювання задачі, зводять до еквівалентних нелінійних інтегральних рівнянь відносно невідомих розподілів нормальної та дотичних компонент контактного навантаження [1–7]. Вигляд цих рівнянь не залежить від конфігурації зон поділу крайових умов задачі і для складання таких рівнянь необхідно лише вказати ділянки поверхонь взаємодіючих тіл, які після прикладення зовнішнього навантаження міститимуть невідому заздалегідь поверхню контакту. Шляхом дискретизації цих нелінійних інтегральних рівнянь контактну задачу зводять до розв'язування системи нелінійних скалярних рівнянь з багатьма невідомими, причому розв'язок цієї системи можна отримати за допомогою ітераційних методів.

У цьому розділі запропоновано спосіб урахування шорсткості поверхонь взаємодіючих тіл. Сформульовано статичні задачі про контакт пружних шорстких тіл у вигляді систем рівностей та нерівностей для невідомих розподілів контактних напружень на поверхні можливого дотику. Запропоновано алгоритм чисельного розв'язування системи нелінійних інтегральних рівнянь, для якої наведено схему дискретизації та ітераційні процеси. Розроблений алгоритм застосовано для отримання розв'язків різних контактних задач.

6.1. Моделювання нормальної і тангенціальної контактної податливості шорстких поверхонь

Розглянемо просторову статичну контактну задачу про взаємодію двох пружних шорстких тіл, кожне з яких на деякій частині своєї поверхні зчеплене з жорсткою опорою (рис. 6.1). Вважатимемо, що для цих тіл виконані такі умови:

1) тіла виготовлені з лінійно-пружного і ізотропного матеріалу;

2) пружні переміщення точок тіл є малими проти розмірів поверхні контакту;

3) геометрична поверхня кожного з тіл така, що будь-яка точка цієї поверхні, що лежить у зоні можливого контакту, є регулярною [3] (у цій точці існує єдина дотична до поверхні площина);

4) додаткові відносні пружні зміщення поверхонь тіл, обумовлені шорсткістю, залежать лише від контактного навантаження в цій точці.

Перша умова допускає, що одне з тіл є абсолютно жорстким, а інше – пружним. Друга умова виключає геометрично нелінійне формулювання контактної задачі та означає, що оператори впливу для системи взаємодіючих тіл не змінюються зі зміною конфігурації під час навантажування. Третя умова дає можливість розкласти контактне навантаження, що передається від одного тіла до іншого, на нормальну та дотичну компоненти. Четверта умова дозволяє враховувати шорсткість поверхонь тіл через внесення у відносні поверхневі зміщення тіл доданків, що залежать від контактного навантаження і відповідають зім’яттю та зсуву мікронерівностей.

Спочатку, торкаючись у точці, тіла починають контактувати, оскільки опора другого тіла здійснює прямолінійне переміщення $\overline{\Theta}$ (без обертання та в одному напрямку) в деякій зовнішній прямокутній декартовій системі координат xyz, а першого залишається нерухомою. Після переміщення тіла опиняються в рівновазі. Крайові умови задачі задаватимемо на спільній для тіл дотичній площині Π, що проходить через точку їхнього початкового дотику. На цій площині виділимо обмежену замкнену область $\overline{\Omega}$, яка містить у собі невідому заздалегідь «плоску» поверхню контакту тіл. Для кожної точки s області $\overline{\Omega}$ визначимо пару точок s_1 і s_2, що лежать на перетині прямої лінії, яка проходить крізь s перпендикулярно до площини Π, з поверхнями першого і другого тіл відповідно. Нехтуючи відносні тангенціальні зміщення точок s_1 і s_2 під час їхнього зближення, вважатимемо, що точка s_1 може контактувати лише з точкою s_2.

Для опису контактної взаємодії тіл введемо нерухому прямокутну декартову систему координат $x'y'z'$, початок якої збігається з точкою початкового дотику тіл, а вісь z' є ортогональною до площини Π і спрямована всередину другого тіла (рис. 6.1). Вважатимемо, що в позначеннях

різних величин (координат, переміщень, навантажень) осі z' відповідатиме індекс 1, осі x' – індекс 2, осі y' – індекс 3.

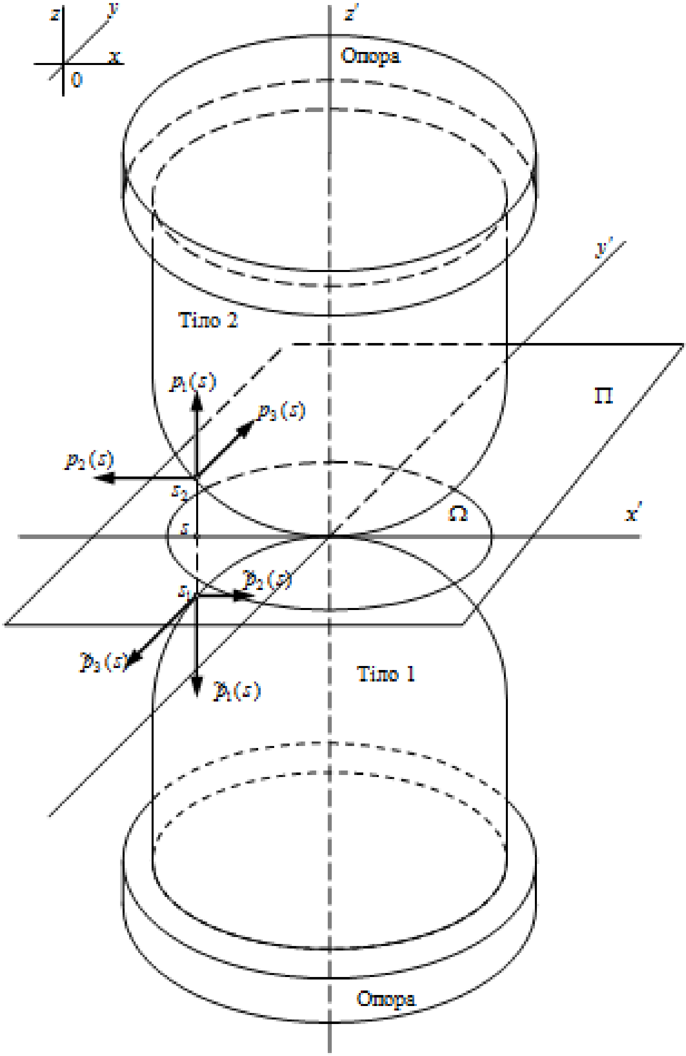


Рис. 6.1

Нехай функції $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ – це розподіли нормальних і дотичних компонент контактного навантаження. Тоді для отримання виразів доданків $f_1(p_1(s), p_2(s), p_3(s))$, $f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s))$, $f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s))$,

які задають зім'яття та зсув мікровиступів і враховують шорсткість тіл, зробимо деякі припущення.

Вважатимемо, функції $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ задовольняють співвідношення [1, 5]

$$f_1(x, y, z) = f_1(x) \quad \forall x, y, z \in R^3,$$
$$f_1(-x) = -f_1(x) \quad \forall x \in R,$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in R^1,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty,$$
$$f_1(x) \in C(R),$$
$$f_2(x, y, z) = x \cdot f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) \quad \forall (x, y, z) \in R^3 : z \geq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z,$$
$$f(\rho, z) \in C(D), \quad D = \{(\rho, z) \in R^2 \mid 0 \leq \rho \leq z\}. \tag{6.1}$$

Умови (6.1) означають, що функція $f_1(x, y, z)$ залежить лише від x, є неперервною, строго зростальною, непарною та необмеженою відносно x на всій дійсній числовій прямій R, а функція $f(\rho, z)$ є визначеною та неперервною на замкненій множині $D = \{(\rho, z) \in R^2 \mid 0 \leq \rho \leq z\}$ двовимірного евклідового простору R^2.

Ці припущення щодо функцій $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ гарантують виконання закономірностей, яким підпорядковуються діючі в точках можливої плями контакту нормальні і дотичні компоненти зовнішнього навантаження і викликані ним зім'яття і зсуви мікровиступів поверхонь взаємодіючих тіл.

Вкажемо ці закономірності:

1) зім'яття мікровиступу не залежить від прикладеного до нього дотичного контактного навантаження;

2) зім'яття мікровиступу нульове тоді і тільки тоді, коли прикладене до нього нормальне контактне навантаження дорівнює нулю;

3) напрям зім'яття мікровиступу збігається з напрямом прикладеного до нього нормального контактного навантаження;

4) зі зростанням нормального контактного навантаження, що діє на мікровиступ, зім'яття мікровиступу збільшується;

5) зім'яття мікровиступу неперервно залежить від нормального контактного навантаження, що діє на нього;

6) за необмеженого зростання нормального контактного навантаження, що діє на мікровиступ, зім'яття цього мікровиступу також необмежено зростає;

7) вектор зсуву мікровиступу неперервно залежить від вектора дотичного контактного навантаження, що діє на цей мікровиступ;

8) напрямок вектора зсуву мікровиступу збігається з напрямком дотичного контактного навантаження, діючого на цей мікровиступ.

Виведемо конкретні вирази функцій $f_1(x)$, $f_2(x, y, z)$, вважаючи, що мікровиступи мають форму напівкулі (рис. 6.2).

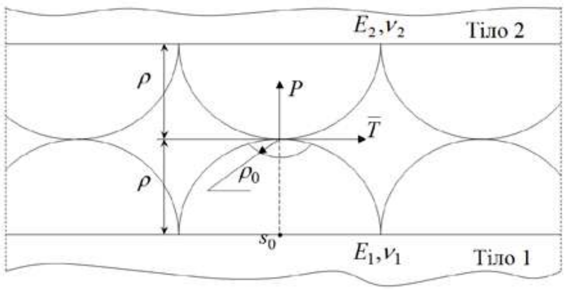


Рис. 6.2

Введемо позначення: ρ – висота мікронерівностей, P – нормальна сила, яка діє на виступи, $p_1(s_0)$ – тиск у точці s_0, $\tilde{\Delta}_1(s_0)$ – зім'яття мікровиступів у точці s_0. Тоді $p_1(s_0) = \dfrac{P}{\pi\rho^2}$ і шукана залежність матиме вигляд

$$\tilde{\Delta}_1(s_0) = f_1(p_1(s_0)).$$

Згідно з теорією Герца, жорстке зближення сферичних тіл [13]

$$\tilde{\Delta}_1(s_0) = 0.8255 \cdot \sqrt[3]{P^2 \frac{l}{\rho}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^2} =$$

$$= 0.8255 \cdot \rho \cdot \sqrt[3]{\pi^2 l \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)^2} \cdot (p_1(s_0))^{2/3}.$$

У цьому виразі E_1 і E_2 – модулі Юнга взаємодіючих тіл, ν_1 і ν_2 – їхні коефіцієнти Пуассона, параметр $l = 1$, якщо лише одне з тіл є шорстким, та $l = 2$, якщо обидва тіла шорсткі. Отриману рівність можна записати у вигляді

$$\tilde{\Delta}_1(s) = \alpha \cdot (p_1(s_0))^{2/3},$$

з якої випливає рівність

$$f_1(x) = \alpha \cdot x^{2/3} \quad \forall x \in [0, +\infty), \tag{6.2}$$

де $\alpha = 0.8255 \cdot \rho \cdot \sqrt[3]{\pi^2 l \cdot \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^2}$.

Якщо мікровиступи мають складнішу, а не сферичну форму, то вираз $f_1(x)$ матиме вигляд [14]

$$f_1(x) = \alpha \cdot x^K \quad \forall x \in [0, +\infty), \quad 0 < K \le 1, \tag{6.3}$$

де значення показника K відповідає модифікованій формі мікровиступу.

Для отримання виразу функції $f_2(x, y, z)$ припустимо, що $E_1 = E_2 = E$ і $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Введемо позначення: μ – коефіцієнт тертя Кулона, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву тіл, ρ_0 – радіус площини контакту на мікросфері, $T = (T_x, T_y)$ – дотична сила, яка діє на взаємодіючі виступи, $\tilde{\Delta}_T(s_0) = (\tilde{\Delta}_2(s_0), \tilde{\Delta}_3(s_0))$ – відносне жорстке зміщення цих мікровиступів у дотичному напрямку, $p_T(s_0) = (p_2(s_0), p_3(s_0))$ – вектор-функція питомого дотичного навантаження у точці s_0, $p_2(s_0)$, $p_3(s_0)$ – дотичні компоненти питомого контактного навантаження вздовж осей x і y у точці s_0. Тоді $p_1(s_0) = \frac{P}{\pi\rho^2}$, $p_2(s_0) = \frac{T_x}{\pi\rho^2}$, $p_3(s_0) = \frac{T_y}{\pi\rho^2}$ і відносне жорстке дотичне зміщення взаємодіючих сферичних мікровиступів має вигляд [9]

$$\left| \tilde{\Delta}_T(s_0) \right| = \frac{3(2-\nu)}{8G\rho_0} \cdot \mu \cdot P \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{|T|}{\mu \cdot P} \right)^{2/3} \right), \tag{6.4}$$

де вектори T і $\tilde{\Delta}_T(s_0)$ мають однакові напрямки.

Підставляючи радіус ρ_0, який згідно з розв’язком Герца [13] має вигляд

$$\rho_0 = 0.9086 \cdot \sqrt[3]{2P \cdot \frac{\rho}{l} \cdot \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right)},$$

у співвідношення (6.4), отримаємо рівність

$$\left| \tilde{\Delta}_T(s_0) \right| = \beta_0 \cdot \mu \cdot P^{2/3} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{|T|}{\mu \cdot P} \right)^{2/3} \right),$$

де $\beta_0 = \dfrac{3\cdot(2-\nu)\cdot\sqrt[3]{E}}{8\cdot G\cdot 0.9086\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2R}{l}\left(1-\nu^2\right)}}$.

Оскільки вектори $\tilde{\Delta}_T(s_0)$ і $p_T(s_0)$ мають однакові напрямки, то, переходячи від сил P, T до питомих контактних навантажень $p_1(s_0)$, $p_2(s_0)$, $p_3(s_0)$, одержимо співвідношення

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_2(s_0) = \beta_0\cdot\mu^{1/3}\cdot\left(\pi\rho^2\right)^{2/3}\cdot p_2(s_0)\cdot\dfrac{(\mu\cdot p_1(s_0))^{2/3}-(\mu\cdot p_1(s_0)-|p_T(s_0)|)^{2/3}}{|p_T(s_0)|}, \\ \tilde{\Delta}_3(s_0) = \beta_0\cdot\mu^{1/3}\cdot\left(\pi\rho^2\right)^{2/3}\cdot p_3(s_0)\cdot\dfrac{(\mu\cdot p_1(s_0))^{2/3}-(\mu\cdot p_1(s_0)-|p_T(s_0)|)^{2/3}}{|p_T(s_0)|}, \end{cases}$$

які можна подати з використанням функції $f_2(x,y,z)$

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_2(s_0) = f_2(p_2(s_0), p_3(s_0), \mu\cdot p_1(s_0)), \\ \tilde{\Delta}_3(s_0) = f_2(p_3(s_0), p_2(s_0), \mu\cdot p_1(s_0)), \end{cases}$$

а далі цю функцію записати у вигляді

$$f_2(x,y,z) = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо} \quad x^2+y^2=0, \\ \beta\cdot x\cdot\dfrac{z^{2/3}-\left(z-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2/3}}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{якщо} \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}\le z, \end{cases} \qquad (6.5)$$

$$\forall(x,y,z)\in D = \left\{ (x,y,z)\in R^3 \;\middle|\; z\ge 0, \sqrt{x^2+y^2}\le z \right\},$$

де $\beta = \beta_0\cdot\mu^{1/3}\cdot\left(\pi R^2\right)^{2/3}$.

Зазначимо, що під час використання дотичного закону (6.5) нормальний закон деформування шорсткості необхідно вибирати згідно зі сферичною моделлю мікровиступів, зокрема у вигляді (6.3). Для з’ясування виразів (6.3) і (6.5) встановимо зв'язок між параметрами α і β, що входять до них:

$$\beta = \frac{0.49997\cdot(2-\nu)\cdot\sqrt[3]{\mu}}{(1-\nu)}\cdot\alpha .$$

Коли взаємодіючі тіла виготовлені із різних матеріалів, можна також отримати вираз для функції $f_2(x,y,z)$. Для цього можна скористатися наближеною рівністю [10]

$$\left|\tilde{\Delta}_T(s_0)\right| = \frac{3\cdot\mu\cdot P}{16\cdot\rho_0}\cdot\left(\frac{2-\nu_1}{G_1}+\frac{2-\nu_2}{G_2}\right)\cdot\left(1-\left(1-\frac{|T|}{\mu\cdot P}\right)^{2/3}\right), \tag{6.6}$$

яка характеризує контакт двох пружно-асиметричних куль за наявності кулонового тертя між ними. Тут $G_1 = \dfrac{E_1}{2(1+\nu_1)}$, $G_2 = \dfrac{E_2}{2(1+\nu_2)}$, а всі інші величини мають той же сенс, що і для рівності (6.4).

Якщо знайти ρ_0 згідно з розв'язком Герца [13]

$$\rho_0 = 0.9086\cdot\sqrt[3]{P\cdot\frac{\rho}{l}\cdot\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}$$

і потім підставити у (6.6), то отримаємо рівність

$$\left|\tilde{\Delta}_T(s_0)\right| = \beta_0^*\cdot\mu\cdot P^{2/3}\cdot\left(1-\left(1-\frac{|T|}{\mu\cdot P}\right)^{2/3}\right),$$

де $\beta_0^* = \dfrac{3\cdot\left(\dfrac{2-\nu_1}{G_1}+\dfrac{2-\nu_2}{G_2}\right)}{16\cdot 0.9086\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\rho}{l}\left(\dfrac{1-\nu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)}}$.

Враховуючи однаковість напрямків векторів $\tilde{\Delta}_T(s_0)$ і $p_T(s_0)$, можна одержати наступні співвідношення

$$\begin{cases}\tilde{\Delta}_2(s_0) = \beta_0^*\cdot\mu^{1/3}\cdot\left(\pi\rho^2\right)^{2/3}\cdot p_2(s_0)\cdot\dfrac{(\mu\cdot p_1(s_0))^{2/3}-\left(\mu\cdot p_1(s_0)-|p_T(s_0)|\right)^{2/3}}{|p_T(s_0)|},\\[2ex] \tilde{\Delta}_3(s_0) = \beta_0^*\cdot\mu^{1/3}\cdot\left(\pi\rho^2\right)^{2/3}\cdot p_3(s_0)\cdot\dfrac{(\mu\cdot p_1(s_0))^{2/3}-\left(\mu\cdot p_1(s_0)-|p_T(s_0)|\right)^{2/3}}{|p_T(s_0)|}.\end{cases}$$

Якщо ці співвідношення записати з використанням функції $f_2(x, y, z)$ та поєднати їх з законом зім'яття мікронерівностей, то одержимо рівності

$$\begin{cases}\tilde{\Delta}_1(s_0) = f_1(p_1(s_0)),\\ \tilde{\Delta}_2(s_0) = f_2(p_2(s_0), p_3(s_0), \mu\cdot p_1(s_0)),\\ \tilde{\Delta}_3(s_0) = f_2(p_3(s_0), p_2(s_0), \mu\cdot p_1(s_0)).\end{cases} \tag{6.7}$$

Тут функцію $f_1(x)$ задаємо згідно з (6.2), а функція $f_2(x, y, z)$ має вигляд

$$f_2(x,y,z)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x^2+y^2=0,\\ \beta^*\cdot x\cdot\dfrac{z^{2/3}-\left(z-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{2/3}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{якщо} \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}\le z,\end{cases} \quad (6.8)$$

$$\forall(x,y,z)\in D=\left\{(x,\,y,\,z)\in R^3 \;\middle|\; z\ge 0, \sqrt{x^2+y^2}\le z\right\}$$

де $\beta^*=\beta_0^*\cdot\mu^{1/3}\cdot\left(\pi\rho^2\right)^{2/3}$.

Зв’язок між параметрами α і β^*, які містяться у (6.8), можна встановити так:

$$\beta^*=\frac{0.24998\cdot\sqrt[3]{\mu}\cdot\left(E_2(2+2\nu_1)(2-\nu_1)+E_1(2+2\nu_2)(2-\nu_2)\right)}{E_2\left(1-\nu_1^2\right)+E_1\left(1-\nu_2^2\right)}\cdot\alpha .$$

Отже, закон деформування мікронерівностей поверхонь взаємодіючих тіл, який отриманий у вигляді рівностей (6.7), (6.2), (6.8) з урахуванням припущень (6.1), можна використовувати за статичного контакту двох пружних шорстких тіл, коли наявне кулонове тертя між ними.

6.2. Крайові умови контактних задач для шорстких тіл

Наведемо формулювання статичних контактних задач про взаємодію пружних шорстких тіл, припускаючи, що для контактуючих тіл відомі оператори впливу поверхневого навантаження на пружні поверхневі переміщення.

Припустимо, що у момент початкового дотику тіл положення точок s_1 і s_2 у просторі визначають координати $\tilde{u}_1(s)$, $\tilde{u}_2(s)$, $\tilde{u}_3(s)$ і $u_1(s)$, $u_2(s)$, $u_3(s)$ відповідно. Після стискання тіл ці точки займуть нове положення, яке визначається координатами $\tilde{v}_1(s)$, $\tilde{v}_2(s)$, $\tilde{v}_3(s)$ для s_1 і $v_1(s)$, $v_2(s)$, $v_3(s)$ – для s_2. Величини $\tilde{u}_i(s)$, $u_i(s)$ і $\tilde{v}_i(s)$, $v_i(s)$ пов'язані співвідношеннями

$$\tilde{v}_i(s)=\tilde{u}_i(s)+\tilde{w}_i(s), \quad v_i(s)=u_i(s)+w_i(s), \quad i=1,2,3, \qquad (6.9)$$

в яких $\tilde{w}_1(s)$, $\tilde{w}_2(s)$, $\tilde{w}_3(s)$ і $w_1(s)$, $w_2(s)$, $w_3(s)$ – переміщення точок s_1 і s_2 відповідно в напрямку осей z', x', y'.

Оскільки співвідношення (6.9) виконуються для кожної точки s області $\overline{\Omega}$, то величини, що входять до них, можна вважати функціями, визначеними в цій області.

Переміщення $\tilde{w}_i(s)$ і $w_i(s)$ для $i=1,2,3$ можна знайти зі співвідношень

$$
\begin{cases}
\tilde{w}_1(s) = \tilde{g}_1(p_1(s),\, p_2(s),\, p_3(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} \tilde{B}_{1j}\left(\tilde{p}_j\right)_s, \\
\tilde{w}_2(s) = \tilde{g}_2(p_2(s),\, p_3(s),\, p_1(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} \tilde{B}_{2j}\left(\tilde{p}_j\right)_s, \\
\tilde{w}_3(s) = \tilde{g}_2(p_3(s),\, p_2(s),\, p_1(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} \tilde{B}_{3j}\left(\tilde{p}_j\right)_s, \\
w_1(s) = g_1(p_1(s),\, p_2(s),\, p_3(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} B_{1j}\left(p_j\right)_s + \Delta_1^*(s), \\
w_2(s) = g_2(p_2(s),\, p_3(s),\, p_1(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} B_{2j}\left(p_j\right)_s + \Delta_2^*(s), \\
w_3(s) = g_2(p_3(s),\, p_2(s),\, p_1(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} B_{3j}\left(p_j\right)_s + \Delta_3^*(s),
\end{cases}
$$

в яких функції $\tilde{p}_1(s)$, $\tilde{p}_2(s)$, $\tilde{p}_3(s)$ і $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ – це розподіли нормальних і дотичних компонент контактного навантаження, що діє на перше і друге тіла відповідно; B_{ij} і $\tilde{B}_{ij}$ $(\forall i, j = \overline{1,3})$ – лінійні оператори впливу поверхневих навантажень на поверхневі переміщення першого і другого тіл відповідно; доданки $\tilde{g}_1(p_1(s), p_2(s), p_3(s))$, $\tilde{g}_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s))$, $\tilde{g}_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s))$ і $g_1(p_1(s), p_2(s), p_3(s))$, $g_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s))$, $g_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s))$ задають зім'яття і зсув поверхневих мікронерівностей першого і другого тіл і враховують шорсткість; функції $\Delta_1^*(s)$, $\Delta_2^*(s)$, $\Delta_3^*(s)$ – розподіли нормальної і дотичних компонент переміщень точок s_2 другого тіла в припущенні, що воно як жорстке здійснює переміщення $\overline{\Theta}$.

Оскільки вектори контактного навантаження, що діє в точках s_1 і s_2 на перше і друге тіла відповідно, мають рівні модулі і протилежні напрями, то для всіх $s \in \overline{\Omega}$ виконуються рівності

$$\tilde{p}_i(s) = -p_i(s), \quad i = 1, 2, 3.$$

Визначаючи тепер $v_i(s) - \tilde{v}_i(s)$ для $i = 1, 2, 3$ з урахуванням очевидних рівностей $u_2(s) - \tilde{u}_2(s) = u_3(s) - \tilde{u}_3(s) = 0$, отримаємо вирази

$$\begin{cases} v_1(s)-\tilde{v}_1(s)= f_1(p_1(s),\, p_2(s),\, p_3(s))+\sum\limits_{j=1}^{3} A_{1j}(p_j)_s+\delta_0(s)+\Delta_1^*(s), \\ v_2(s)-\tilde{v}_2(s)= f_2(p_2(s),\, p_3(s),\, p_1(s))+\sum\limits_{j=1}^{3} A_{2j}(p_j)_s+\Delta_2^*(s), \\ v_3(s)-\tilde{v}_3(s)= f_2(p_3(s),\, p_2(s),\, p_1(s))+\sum\limits_{j=1}^{3} A_{3j}(p_j)_s+\Delta_3^*(s),\;\; s\in\overline{\Omega}, \end{cases} \tag{6.10}$$

в яких величина $\delta_0(s)=u_1(s)-\tilde{u}_1(s)$ – початковий зазор між тілами в напрямку осі z', а лінійні оператори впливу A_{ij} ($\forall i, j=\overline{1,3}$) визначимо зі співвідношень

$$A_{ij}=B_{ij}+\tilde{B}_{ij};\quad i, j=1,2,3\,.$$

Функції $f_1(p_1(s), p_2(s), p_3(s))$, $f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s))$, $f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s))$ задають співвідношення

$$\begin{cases} f_1(p_1(s),\, p_2(s),\, p_3(s))= g_1(p_1(s),\, p_2(s),\, p_3(s))-\tilde{g}_1(p_1(s),\, p_2(s),\, p_3(s)), \\ f_2(p_2(s),\, p_3(s),\, p_1(s))= g_2(p_2(s),\, p_3(s),\, p_1(s))-\tilde{g}_2(p_2(s),\, p_3(s),\, p_1(s)), \\ f_2(p_3(s),\, p_2(s),\, p_1(s))= g_2(p_3(s),\, p_2(s),\, p_1(s))-\tilde{g}_2(p_3(s),\, p_2(s),\, p_1(s)),\; s\in\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Співвідношення (6.10) дають можливість у простій формі записати умови контактної взаємодії тіл [2, 4, 15]. Проте їх використання доцільне лише тоді, коли оператори A_{ij} ($\forall i, j=\overline{1,3}$) задано в явному вигляді. Відзначимо, що під час апроксимації взаємодіючих тіл пружними півпросторами $z'\geq 0$ і $z'\leq 0$ (див. рис. 6.1) оператори A_{ij} ($\forall i, j=\overline{1,3}$) можна визначити згідно з розв'язками Буссінеска та Черутті [12] зі співвідношень

$$A_{ij}(p_j)_S=\int\limits_{\Omega} K_{ij}(s,s')p_j(s')ds',\quad s\in\overline{\Omega},\quad i, j=\overline{1,3}, \tag{6.11}$$

де

$$K_{11}(s,s')=\frac{c_1}{|s-s'|},\quad K_{12}(s,s')=\frac{c_2(s_x-s'_x)}{|s-s'|^2},\quad K_{13}(s,s')=\frac{c_2(s_y-s'_y)}{|s-s'|^2},$$

$$K_{23}(s,s')=\frac{c_3(s_x-s'_x)(s_y-s'_y)}{|s-s'|^3},\;\; K_{31}(s,s')=-K_{13}(s,s'),$$

$$K_{32}(s,s')=K_{23}(s,s'),\quad K_{33}(s,s')=\frac{c_1}{|s-s'|}+\frac{c_3(s_y-s'_y)^2}{|s-s'|^3},$$

$$|s-s'|=\sqrt{(s_x-s'_x)^2+(s_y-s'_y)^2}, \quad c_1=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},$$

$$c_2=\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{2\pi E_1}-\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{2\pi E_2}, \quad c_3=\frac{\nu_1(1+\nu_1)}{\pi E_1}+\frac{\nu_2(1+\nu_2)}{\pi E_2}. \quad (6.12)$$

Тут додатні параметри E_1, E_2 і ν_1, ν_2 – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона для першого і другого тіл відповідно, а s_x, s'_x і s_y, s'_y – абсциси і ординати точок s і s' відповідно в системі координат $x'y'z'$.

Визначаючи функції $\Delta_1(s)=-\delta_0(s)-\Delta_1^*(s)$, $\Delta_2(s)=-\Delta_2^*(s)$, $\Delta_3(s)=-\Delta_3^*(s)$, запишемо співвідношення (6.10) у вигляді

$$\begin{cases} v_1(s)-\tilde{v}_1(s)=f_1(p_1(s),\, p_2(s),\, p_3(s))+\sum\limits_{j=1}^{3}A_{1j}(p_j)_s-\Delta_1(s), \\ v_2(s)-\tilde{v}_2(s)=f_2(p_2(s),\, p_3(s),\, p_1(s))+\sum\limits_{j=1}^{3}A_{2j}(p_j)_s-\Delta_2(s), \\ v_3(s)-\tilde{v}_3(s)=f_2(p_3(s),\, p_2(s),\, p_1(s))+\sum\limits_{j=1}^{3}A_{3j}(p_j)_s-\Delta_3(s),\; s\in\overline{\Omega}. \end{cases} \quad (6.13)$$

У виразах (6.13) функції $\Delta_1(s)$, $\Delta_2(s)$, $\Delta_3(s)$ містять інформацію про конфігурацію взаємодіючих тіл у зоні їхнього контакту та про умови навантажування.

6.2.1. Контактні задачі без урахування тертя

Сформулюємо спочатку умови контактної взаємодії тіл за відсутності тертя [15]:

$$\begin{cases} v_1(s)-\tilde{v}_1(s)\ge 0, \quad p_1(s)\ge 0, \\ p_1(s)[v_1(s)-\tilde{v}_1(s)]=0, \quad p_2(s)=p_3(s)=0 \quad \forall s\in\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Перше зі співвідношень означає відсутність взаємного проникнення тіл. Друге означає, що нормальний контактний тиск не може бути розтягальним. Третє свідчить про відсутність контактного тиску за межами зони контакту. І, нарешті, четверте зі співвідношень означає відсутність тертя між тілами. Враховуючи рівності (6.13), можна перші три співвідношення цієї системи записати у вигляді

$$\begin{cases} f_1(p_1(s),\,0,\,0)+A_{11}(p_1)_s-\Delta_1(s)\ge 0, \quad p_1(s)\ge 0, \\ p_1(s)\left[f_1(p_1(s),\,0,\,0)+A_{11}(p_1)_s-\Delta_1(s)\right]=0, \quad s\in\overline{\Omega}. \end{cases} \quad (6.14)$$

Отже, контактну задачу про взаємодію пружних тіл без урахування тертя зведено до знаходження невідомої функції $p_1(s)$, яка визначена в області $\overline{\Omega}$ і задовольняє в кожній точці цієї області систему співвідношень (6.14). Після знаходження невідомого контактного тиску $p_1(s)$ можна визначити поверхню контакту $\Omega_0 = \{s \in \Omega \mid \ f_1(p_1(s), 0, 0) + A_{11}(p_1)_s - \Delta_1(s) = 0\}$, а також прикладені до першого тіла сили і моменти, дія яких призвела до появи цього тиску на поверхні Ω_0.

6.2.2. Контактні задачі з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування

За врахування тертя в контактних задачах з'являється дотична компонента контактного навантаження, яке діє в точках області $\overline{\Omega}$. При цьому точки s_1 і s_2 (див. рис. 6.1) після контакту можуть здійснювати відносні дотичні зміщення, що визначають зі співвідношень (6.13). Позначимо через $\overline{v}_T(s)$ вектор відносного дотичного зміщення точок s_1 і s_2, та через $\overline{p}_T(s)$ – вектор дотичної компоненти контактного навантаження, яке діє в точці s_2. Тоді $\overline{p}_T(s) = (p_2(s),\ p_3(s))$, $\overline{v}_T(s) = (v_2(s) - \widetilde{v}_2(s),\ v_3(s) - \widetilde{v}_3(s))$. Невідому область контакту Ω_0 можна розділити на зону зчеплення $\Omega_З$ і зону проковзування $\Omega_П$, які заздалегідь невідомі і які визначимо зі співвідношень

$$\Omega_З = \{s \in \Omega_0 \mid |\overline{v}_T(s)| = 0\}, \quad \Omega_П = \{s \in \Omega_0 \mid |\overline{v}_T(s)| \neq 0\}.$$

Як закон, що пов'язує вектор-функції $\overline{v}_T(s)$ і $\overline{p}_T(s)$, найчастіше беруть закон тертя Кулона, який можна виразити співвідношеннями [15]

$$\begin{cases} |\overline{p}_T(s)| \le \mu \cdot p_1(s), \quad s \in \overline{\Omega}, \\ \text{якщо } |\dot{\overline{v}}_T(s)| \neq 0, \text{ то } \overline{p}_T(s) = -\mu \cdot p_1(s)\dfrac{\dot{\overline{v}}_T(s)}{|\dot{\overline{v}}_T(s)|}, \quad s \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

У цих співвідношеннях додатна константа μ – коефіцієнт тертя, а вектор-функція $\dot{\overline{v}}_T(s)$ – швидкість відносного дотичного проковзування точок s_1 і s_2. Для статичних контактних задач [11] у цих співвідношеннях швидкість відносного проковзування $\dot{\overline{v}}_T(s)$ можна замінити відносним проковзуванням $\overline{v}_T(s)$. Тоді закон тертя Кулона матиме вигляд

$$\begin{cases} |\overline{p}_T(s)| \le \mu \cdot p_1(s), \quad s \in \overline{\Omega}, \\ \text{якщо } |\overline{v}_T(s)| \neq 0, \text{ то } \overline{p}_T(s) = -\mu \cdot p_1(s)\dfrac{\overline{v}_T(s)}{|\overline{v}_T(s)|}, \quad s \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{6.15}$$

Перше зі співвідношень (6.15) означає, що в кожній точці зони можливого контакту тіл модуль дотичного контактного навантаження не перевищує добутку коефіцієнта тертя μ і значення контактного тиску в цій точці. Зміст другої з умов (6.15) полягає у тому, що для всіх таких точок s зони можливого контакту тіл, в яких модуль відносного проковзування тіл відрізняється від нуля, існує рівність $\left|\overline{p}_T(s)\right| = \mu \cdot p_1(s)$, причому вектори $\overline{p}_T(s)$ і $\overline{v}_T(s)$ мають протилежні напрямки.

Другу з умов у системі (6.15) можна замінити еквівалентною векторною рівністю і записати в формі

$$\begin{cases} \left|p_T(s)\right| \le \mu \cdot p_1(s), \quad s \in \overline{\Omega}, \\ \left|\overline{v}_T(s)\right| \cdot \overline{p}_T(s) + \mu \cdot p_1(s) \cdot \overline{v}_T(s) = \theta, \quad s \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

де символом θ позначено нульовий двовимірний вектор.

Для формулювання контактної задачі з урахуванням кулонового тертя визначимо оператори F_1, F_2, F_3, аргументами яких є функції $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$, співвідношеннями

$$\begin{cases} F_1(p_1, p_2, p_3)_s = f_1(p_1(s), p_2(s), p_3(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{1j}(p_j)_s - \Delta_1(s), \\ F_2(p_1, p_2, p_3)_s = f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{2j}(p_j)_s - \Delta_2(s), \\ F_3(p_1, p_2, p_3)_s = f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s)) + \sum\limits_{j=1}^{3} A_{3j}(p_j)_s - \Delta_3(s), \quad s \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{6.16}$$

Тоді для вектор-функції $\overline{v}_T(s)$ виконуватиметься рівність

$$\overline{v}_T(s) = \left(F_2(p_1,\ p_2,\ p_3),\ F_3(p_1,\ p_2,\ p_3)\right)_s, \tag{6.17}$$

яка дає можливість не використовувати цю функцію під час формулювання задачі.

Розглянемо спочатку статичну контактну задачу про взаємодію тіл з урахуванням кулонового тертя, коли невідому функцію $p_1(s)$ не вдається знайти без визначення функцій $p_2(s)$ і $p_3(s)$. Умови контакту в цьому випадку такі [15]:

$$\begin{cases} v_1(s) - \tilde{v}_1(s) \ge 0, \\ p_1(s) \ge 0, \\ p_1(s) \cdot [v_1(s) - \tilde{v}_1(s)] = 0, \\ \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \le \mu \cdot p_1(s), \\ |\bar{v}_T(s)| \cdot \bar{p}_T(s) + \mu \cdot p_1(s) \cdot \bar{v}_T(s) = \theta, \quad s \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{6.18}$$

Перші три співвідношення системи (6.18) мають той же зміст, що і за розгляду контактної задачі без урахування тертя. Останні два співвідношення системи – це закон тертя Кулона (6.15).

Використовуючи співвідношення (6.13), (6.16) та (6.17), систему (6.18) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} F_1(p_1,\ p_2,\ p_3)_s \ge 0, \\ p_1(s) \ge 0, \\ p_1(s) \cdot F_1(p_1,\ p_2,\ p_3)_s = 0, \\ \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \le \mu \cdot p_1(s), \\ p_2(s) \cdot \sqrt{F_2^2(p_1,\ p_2,\ p_3)_s + F_3^2(p_1,\ p_2,\ p_3)_s} + \\ \quad + \mu \cdot p_1(s) \cdot F_2(p_1,\ p_2,\ p_3)_s = 0, \\ p_3(s) \cdot \sqrt{F_2^2(p_1,\ p_2,\ p_3)_s + F_3^2(p_1,\ p_2,\ p_3)_s} + \\ \quad + \mu \cdot p_1(s) \cdot F_3(p_1,\ p_2,\ p_3)_s = 0, \\ s \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{6.19}$$

Контактну задачу загалом зведено до знаходження невідомих функцій $p_1(s),\ p_2(s),\ p_3(s)$, які в області $\overline{\Omega}$ задовольняють систему співвідношень (6.19). При цьому оператори A_{ij} та функції $\Delta_i(s)$ ($i, j = \overline{1,3}$) вважаємо відомими.

Розглянемо тепер окремо випадок, коли лінійні оператори A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{31} у виразі (6.16) є нульовими. Це існує, наприклад, під час апроксимації взаємодіючих тіл пружними півпросторами, для яких константа c_2 у виразах (6.12) дорівнює нулю. А це можливо, коли виконано одне зі співвідношень між пружними сталими взаємодіючих тіл:

1) $E_1 = E_2, \quad \nu_1 = \nu_2$;
2) $1/E_1 = 0, \quad \nu_2 = 1/2$;
3) $1/E_2 = 0, \quad \nu_1 = 1/2$;
4) $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$.

Якщо тепер припустити, що вираз $f_1(p_1(s), p_2(s), p_3(s))$ не містить $p_2(s)$, $p_3(s)$, а залежить лише від $p_1(s)$, то у даному окремому випадку невідому функцію $p_1(s)$ можна визначити незалежно від $p_2(s)$ і $p_3(s)$ із розв'язку системи

$$\begin{cases} f_1(p_1(s)) + A_{11}(p_1)_s - \Delta_1(s) \geq 0, \quad p_1(s) \geq 0, \\ p_1(s)\left[f_1(p_1(s)) + A_{11}(p_1)_s - \Delta_1(s)\right] = 0, \quad s \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Це випливає безпосередньо зі співвідношень (6.19), оскільки перші три з них не залежать від $p_2(s)$ і $p_3(s)$. Невідомі функції $p_2(s)$ і $p_3(s)$ визначимо з системи співвідношень

$$\begin{cases} \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \leq \mu \cdot p_1(s), \\ p_2(s) \cdot \sqrt{\tilde{F}_2^2(p_2,\ p_3)_s + \tilde{F}_3^2(p_2,\ p_3)_s} + \mu \cdot p_1(s) \cdot \tilde{F}_2(p_2,\ p_3)_s = 0, \\ p_3(s) \cdot \sqrt{\tilde{F}_2^2(p_2,\ p_3)_s + \tilde{F}_3^2(p_2,\ p_3)_s} + \mu \cdot p_1(s) \cdot \tilde{F}_3(p_2,\ p_3)_s = 0, \\ s \in \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{6.20}$$

в яких функцію $p_1(s)$ вважаємо відомою, а оператори $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_3$ визначимо з рівностей:

$$\tilde{F}_2(p_2, p_3)_s = f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) + A_{22}(p_2)_s + A_{23}(p_3)_s - \Delta_2(s),$$

$$\tilde{F}_3(p_2, p_3)_s = f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s)) + A_{32}(p_2)_s + A_{33}(p_3)_s - \Delta_3(s).$$

Отже, контактну задачу у даному випадку зводимо до знаходження невідомих функцій $p_2(s)$, $p_3(s)$, які визначені в області $\overline{\Omega}$ і задовольняють систему співвідношень (6.20). При цьому оператори A_{ij} ($i, j = 2{,}3$) і функції $p_1(s)$, $\Delta_2(s)$, $\Delta_3(s)$, що входять у ці співвідношення, вважаємо відомими.

Наприкінці відмітимо, що за зроблених у цьому підрозділі припущень (6.1) для функцій $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ рівності (6.13) узагальнюють основні способи урахування шорсткості поверхонь взаємодіючих тіл під час розв'язування контактних задач [5, 6, 7, 9, 14].

6.3. Зведення контактних задач до розв'язання нелінійних інтегральних рівнянь

Щоб вивести інтегральні рівняння поставлених вище контактних задач, достатньо для кожної з них систему співвідношень, з якої визначають шуканий розподіл контактного навантаження, виразити в еквівалентній формі у вигляді

рівності або системи рівностей. Цього можна досягти, використовуючи дійсні функції $h(x)$ і $q(x, y, z)$ ($-\infty < x$, $y < +\infty$, $0 \le z < +\infty$):

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x \ge 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \end{cases} \tag{6.21}$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z, \\ x \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо} \quad \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases} \tag{6.22}$$

Сформулюємо два відомих твердження про властивості функцій h і q [5].

Теорема 6.1. Для будь-яких дійсних чисел x, y співвідношення

$$x \ge 0,$$

$$y \ge 0,$$

$$x \cdot y = 0$$

еквівалентні рівності

$$x = h(x - E \cdot y),$$

в якій E – будь-яке додатне число.

Теорема 6.2. Для будь-яких дійсних чисел x_1, x_2, y_1, y_2 і $z \ge 0$ умови

$$\begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \le z, \\ x_1 \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + z \cdot y_1 = 0, \\ x_2 \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2} + z \cdot y_2 = 0 \end{cases}$$

є еквівалентними рівностям

$$\begin{cases} x_1 = q(x_1 - Ey_1,\ x_2 - Ey_2,\ z), \\ x_2 = q(x_2 - Ey_1,\ x_1 - Ey_2,\ z), \end{cases}$$

в яких E – будь-яке додатне число.

Ці твердження дають можливість для кожної з поставлених вище контактних задач отримати таке рівняння для невідомого контактного навантаження, всі розв’язки якого (і тільки вони) будуть шуканими розв’язками відповідної контактної задачі. Для задачі про контакт пружних тіл за відсутності тертя отримаємо зі системи (6.14) рівняння

$$p_1(s) = h\big(p_1(s) - E\big(f_1(p_1(s)) + A_{11}(p_1)(s) - \Delta_1(s)\big)\big), \quad s \in \overline{\Omega}, \tag{6.23}$$

в якому E – довільна додатна константа, оператор впливу A_{11} та функція $\Delta_1(s)$ є задані (відомі), а функція $p_1(s)$ – шукана.

Вираз $f_1(p_1(s))$ у (6.23) використано для скороченого запису виразу $f_1(p_1(s), 0, 0)$ у (6.14).

Нехтуючи вплив дотичного контактного навантаження на зім'яття мікронерівностей тіл, для задачі про контакт пружних тіл з урахуванням кулонового тертя зі системи (6.19) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} p_1(s) = h\left(p_1(s) - E\left(f_1(p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{1j}(p_j)(s) - \Delta_1(s)\right)\right); \\ p_2(s) = q\left(p_2(s) - E\left(f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{2j}(p_j)(s) - \Delta_2(s)\right),\right. \\ \qquad p_3(s) - E\left(f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{3j}(p_j)(s) - \Delta_3(s)\right), \\ \qquad \left.\mu \cdot h(p_1(s))\right); \\ p_3(s) = q\left(p_3(s) - E\left(f_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{3j}(p_j)(s) - \Delta_3(s)\right),\right. \\ \qquad p_2(s) - E\left(f_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{2j}(p_j)(s) - \Delta_2(s)\right), \\ \qquad \left.\mu \cdot h(p_1(s))\right); \quad s \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{6.24}$$

Тут E – довільна додатна константа, оператори впливу A_{ij} і функції $\Delta_j(s)$ для $i, j = \overline{1,3}$ є задані, а функції $p_1(s)$, $p_2(s)$ і $p_3(s)$ – невідомі.

Для задачі про контакт двох пружних тіл з урахуванням кулонового тертя за відомого розподілу нормального контактного тиску з системи (6.20) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} p_2(s) = q\Bigg(p_2(s) - E\Bigg(f_2\big(p_2(s), p_3(s), p_1(s)\big) + \sum_{j=2}^{3} A_{2j}(p_j)(s) - \Delta_2(s)\Bigg), \\ \qquad p_3(s) - E\Bigg(f_2\big(p_3(s), p_2(s), p_1(s)\big) + \sum_{j=2}^{3} A_{3j}(p_j)(s) - \Delta_3(s)\Bigg), \\ \qquad \mu \cdot h(p_1(s))\Bigg); \\ p_3(s) = q\Bigg(p_3(s) - E\Bigg(f_2\big(p_3(s), p_2(s), p_1(s)\big) + \sum_{j=2}^{3} A_{3j}(p_j)(s) - \Delta_3(s)\Bigg), \\ \qquad p_2(s) - E\Bigg(f_2\big(p_2(s), p_3(s), p_1(s)\big) + \sum_{j=2}^{3} A_{2j}(p_j)(s) - \Delta_2(s)\Bigg), \\ \qquad \mu \cdot h(p_1(s))\Bigg); \quad s \in \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{6.25}$$

в якій оператори впливу A_{ij} для $i, j = \overline{2,3}$ і функції $p_1(s)$, $\Delta_2(s)$, $\Delta_3(s)$ є задані, а функції $p_2(s)$, $p_3(s)$ – невідомі.

Відмітимо ще дві важливі особливості отриманих рівнянь. Перша з них полягає у тому, що множина розв'язків рівняння (6.23) і кожної зі систем (6.24), (6.25) не змінюється зі зміною параметра $E > 0$, хоча праві частини цих рівнянь суттєво залежать від нього. Друга особливість у тому, що вигляд цих рівнянь не залежить ані від конфігурації контактної плями, ані від форми зон проковзування та зчеплення, і для їх складання необхідно лише визначити плоску обмежену область $\overline{\Omega}$ простої форми (круг, квадрат, прямокутник). Потрібно лише, щоб ця область $\overline{\Omega}$ містила невідому заздалегідь пляму контакту. При цьому, якщо розв'язок рівняння (6.23) і кожної зі систем рівнянь (6.24), (6.25) знайдено, то шукана пляма контакту, а також зони проковзування та зчеплення на ній можна легко визначити.

Якщо, наприклад, функції $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$ задовольняють на $\overline{\Omega}$ систему рівнянь (6.24), то пляму контакту Ω_0, зону зчеплення $\Omega_З$ та зону проковзування $\Omega_П$ можна отримати зі співвідношень

$$\Omega_0 = \{s \in \Omega \mid f_1(p_1(s)) + A_{11}(p_1)_s - \Delta_1(s) = 0\},$$

$$\Omega_З = \left\{ s \in \Omega_0 \mid \sqrt{F_2^2(p_1, p_2, p_3)_s + F_3^2(p_1, p_2, p_3)_s} = 0 \right\},$$

$$\Omega_П = \left\{ s \in \Omega_0 \mid \sqrt{F_2^2(p_1, p_2, p_3)_s + F_3^2(p_1, p_2, p_3)_s} \neq 0 \right\},$$

де вирази $F_2(p_1,\ p_2,\ p_3)_s$, $F_3(p_1,\ p_2,\ p_3)_s$ задають рівності (6.16).

6.4. Дискретизація інтегральних рівнянь контактної задачі

6.4.1. Контактні задачі без урахування тертя

Отримання точного або наближеного аналітичного розв'язку інтегрального рівняння (6.23) пов'язане зі значними труднощами, головна з яких полягає в тому, що плоска поверхня контакту тіл є заздалегідь невідомою і може мати дуже складну конфігурацію. Тому для розв’язання цього рівняння доцільно використовувати чисельні методи, засновані на його дискретизації.

Для дискретизації рівняння (6.23) введемо на площині Π декартову систему координат з центром у точці початкового дотику тіл і задамо область Ω на Π у вигляді відкритого квадрата площі d, обмеженого відрізками прямих, паралельних координатним осям цієї системи. Далі для натурального числа m розіб'ємо область Ω на m^2 квадратних областей $\omega_1^{(m)}, \omega_2^{(m)}, \ldots, \omega_{m^2}^{(m)}$ рівної площі, орієнтованих як квадрат Ω, які не перетинаються. Позначимо символом $\Omega^{(m)}$ об’єднання $\bigcup\limits_{k=1}^{m^2} \omega_k^{(m)}$.

Задамо оператор $A_{11}^{(m)}$ і елемент $\Delta_1^{(m)}(s)$ співвідношеннями

$$A_{11}^{(m)}(p)(s) = \int\limits_{\Omega} K^{(m)}(s,t)p(t)dt, \quad K^{(m)}(s,t) = \alpha_{ij}^{(m)}, \quad \text{якщо} \quad s \in \omega_i^{(m)} \quad \text{і} \quad t \in \omega_j^{(m)},$$

$$\alpha_{ij}^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{c}{\left|s_i^{(m)} - s_j^{(m)}\right|}, & \text{якщо} \quad i \neq j, \\[2ex] \dfrac{cm^2}{d} \displaystyle\int\limits_{\omega_i^{(m)}} \dfrac{dt}{\left|s_i^{(m)} - t\right|}, & \text{якщо} \quad i = j, \end{cases}$$

$$\Delta_1^{(m)}(s) = \Delta_1\left(s_i^{(m)}\right), \quad \text{якщо} \quad s \in \omega_i^{(m)}, \tag{6.26}$$

де символ $s_i^{(m)}$ тут і далі означатиме центр квадрата $\omega_i^{(m)}$.

Замінюючи в рівнянні (6.23) оператор A_{11} на $A_{11}^{(m)}$ і функцію $\Delta_1(s)$ на $\Delta_1^{(m)}(s)$, отримаємо рівняння

$$p_1(s) = h\left(p_1(s) - E\left(f_1(p_1(s)) + A_{11}^{(m)}(p_1)(s) - \Delta_1^{(m)}(s)\right)\right), \quad s \in \Omega^{(m)},$$

яке для оператора $A_{11}^{(m)}$ і елемента $\Delta_1^{(m)}$, заданих рівностями (6.26), зведемо до системи m^2 скалярних рівнянь з m^2 невідомими:

$$x_i = h\left(x_i - E\left(f_1(x_i) + \sum_{j=1}^{m^2} a_{ij} x_j - b_i\right)\right), \quad i = \overline{1, m^2}. \tag{6.27}$$

Параметри a_{ij} і b_i, що входять у систему (6.27), визначимо зі співвідношень

$$a_{ij} = \alpha_{ij}^{(m)} \frac{d}{m^2}, \quad b_i = \Delta_1\left(s_i^{(m)}\right), \quad i, j = \overline{1, m^2}. \tag{6.28}$$

Отже, чисельне розв’язування інтегрального рівняння (6.23) зведено до знаходження розв’язку системи скалярних рівнянь (6.27), для якої числові параметри a_{ij} і b_i, задають рівності (6.28).

6.4.2. Контактні задачі з урахуванням тертя

Для дискретизації інтегральних рівнянь (6.24) контактної задачі виконаємо дії, аналогічні п. 6.4.1. Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} p_1(s) = h\left(p_1(s) - E\left(g_1(p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{1j}^{(n)}(p_j)(s) - \Delta_1^{(n)}(s)\right)\right); \\ p_2(s) = q\left(p_2(s) - E\left(g_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{2j}^{(n)}(p_j)(s) - \Delta_2^{(n)}(s)\right),\right. \\ \qquad p_3(s) - E\left(g_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{3j}^{(n)}(p_j)(s) - \Delta_3^{(n)}(s)\right), \\ \qquad \left.\mu \cdot h(p_1(s))\right); \\ p_3(s) = q\left(p_3(s) - E\left(g_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{3j}^{(n)}(p_j)(s) - \Delta_3^{(n)}(s)\right),\right. \\ \qquad p_2(s) - E\left(g_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) + \sum_{j=1}^{3} A_{2j}^{(n)}(p_j)(s) - \Delta_2^{(n)}(s)\right), \\ \qquad \left.\mu \cdot h(p_1(s))\right); \quad s \in \Omega^{(n)}, \end{cases} \tag{6.29}$$

де зім’яття і зсув поверхневих мікронерівностей тіл $g_1(p_1(s))$, $g_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s))$, $g_2(p_3(s), p_2(s), p_1(s))$ задаються співвідношеннями, в яких функції $h(x)$ та $q(x, y, z)$ визначають рівності (6.21), (6.22)

$$\begin{cases} g_1(p_1(s)) = f_1(h(p_1(s))), \\ g_2(p_2(s), p_3(s), p_1(s)) = \\ = f_2(q(p_2(s), p_3(s), \mu \cdot h(p_1(s))), \;\; q(p_3(s), p_2(s), \mu \cdot h(p_1(s))), \;\; \mu \cdot h(p_1(s))). \end{cases} \tag{6.30}$$

Неважко переконатися, що систему інтегральних рівнянь (6.24) зведено до системи $3k$ скалярних рівнянь з $3k$ невідомими $x_1, x_2, ..., x_{3k}$

$$\begin{cases} x_{3i-2} = h\left(x_{3i-2} - E\left(g_1(x_{3i-2}) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-2\,j} x_j - b_{3i-2} \right)\right); \\ x_{3i-1} = q\left(x_{3i-1} - E\left(g_2(x_{3i-1}, x_{3i}, x_{3i-2}) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-1\,j} x_j - b_{3i-1} \right), \right. \\ \qquad \left. x_{3i} - E\left(g_2(x_{3i}, x_{3i-1}, x_{3i-2}) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i\,j} x_j - b_{3i} \right), \; \mu \cdot x_{3i-2} \right); \\ x_{3i} = q\left(x_{3i} - E\left(g_2(x_{3i}, x_{3i-1}, x_{3i-2}) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i\,j} x_j - b_{3i} \right), \right. \\ \qquad \left. x_{3i-1} - E\left(g_2(x_{3i-1}, x_{3i}, x_{3i-2}) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-1\,j} x_j - b_{3i-1} \right), \; \mu \cdot x_{3i-2} \right); \\ i = \overline{1, k}, \end{cases} \tag{6.31}$$

в якій $k = n^2$, а параметри a_{ij} і b_i визначено зі співвідношень

$$b_{3i-2} = \Delta_1\left(s_i^{(n)}\right), \quad b_{3i-1} = \Delta_2\left(s_i^{(n)}\right), \quad b_{3i} = \Delta_3\left(s_i^{(n)}\right), \quad i = \overline{1, k}, \tag{6.32}$$

$$a_{3i-w\;\,3j-l} = \frac{k}{d} \cdot K_{3-w\;\,3-l}^{(n)}\left(s_i^{(n)}, s_j^{(n)}\right), \;\; i, \; j = \overline{1, k}, \quad w, l = \overline{0, 2}. \tag{6.33}$$

Зв'язок між невідомими числовими параметрами $x_1, x_2, ..., x_{3n}$ системи рівнянь (6.31) і вектор-функцією $(p_1(s), p_2(s), p_3(s))$, яка задовольняє систему рівнянь (6.29), полягає в тому, що $p_1(s) = x_{3i-2}$, $p_2(s) = x_{3i-1}$, $p_3(s) = x_{3i}$ для всіх $s \in \omega_i^{(n)}$ ($i = \overline{1, k}$).

Якщо взаємодіючі тіла виготовлені з однакових матеріалів, то систему рівнянь (6.31) можна розв'язати шляхом послідовного розв'язання двох систем рівнянь

$$p_i = h\left(p_i - E\left(g_1(p_i) + \sum_{j=1}^{k} \tilde{a}_{ij} p_j - \tilde{b}_i \right)\right), \quad i = \overline{1, k}, \tag{6.34}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_{2i-1} = q\left(\tilde{x}_{2i-1} - E\left(g_2(\tilde{x}_{2i-1}, \tilde{x}_{2i}, p_i) + \sum_{j=1}^{2k} \tilde{\tilde{a}}_{2i-1\, j} \tilde{x}_j - \tilde{\tilde{b}}_{2i-1} \right), \right. \\ \qquad \left. \tilde{x}_{2i} - E\left(g_2(\tilde{x}_{2i}, \tilde{x}_{2i-1}, p_i) + \sum_{j=1}^{2k} \tilde{\tilde{a}}_{2i\, j} \tilde{x}_j - \tilde{\tilde{b}}_{2i} \right), \quad \mu \cdot p_i \right); \\ \tilde{x}_{2i} = q\left(\tilde{x}_{2i} - E\left(g_2(\tilde{x}_{2i}, \tilde{x}_{2i-1}, p_i) + \sum_{j=1}^{2k} \tilde{\tilde{a}}_{2i\, j} \tilde{x}_j - \tilde{\tilde{b}}_{2i} \right), \right. \\ \qquad \left. \tilde{x}_{2i-1} - E\left(g_2(\tilde{x}_{2i-1}, \tilde{x}_{2i}, p_i) + \sum_{j=1}^{2k} \tilde{\tilde{a}}_{2i-1\, j} \tilde{x}_j - \tilde{\tilde{b}}_{2i-1} \right), \quad \mu \cdot p_i \right); \\ i = \overline{1, k}, \end{cases} \tag{6.35}$$

в яких $p_i = x_{3i-2}$, $\tilde{x}_{2i-1} = x_{3i-1}$, $\tilde{x}_{2i} = x_{3i}$, $\tilde{a}_{i\,j} = a_{3i-2\;3j-2}$, $\tilde{\tilde{a}}_{2i\;2j} = a_{3i\;3j}$, $\tilde{\tilde{a}}_{2i-1\;2j-1} = a_{3i-1\;3j-1}$, $\tilde{\tilde{a}}_{2i\;2j-1} = a_{3i\;3j-1}$, $\tilde{\tilde{a}}_{2i-1\;2j} = a_{3i-1\;3j}$, $\tilde{b}_i = b_{3i-2}$, $\tilde{\tilde{b}}_{2i-1} = b_{3i-1}$, $\tilde{\tilde{b}}_{2i} = b_{3i}$ (для всіх $i, j = \overline{1, k}$). Очевидно, що системи скалярних рівнянь (6.34), (6.35) є дискретними аналогами системи інтегральних рівнянь (6.25).

Отже, чисельне розв'язування системи інтегральних рівнянь (6.24) зведено до знаходження розв'язку системи скалярних рівнянь (6.31), а (6.25) – до знаходження розв'язків систем скалярних рівнянь (6.34) та (6.35). При цьому числові параметри a_{ij}, b_i у системах скалярних рівнянь (6.31), (6.34) (6.35) визначають рівності (6.32), (6.33).

6.5. Ітераційні процеси для розв’язування дискретизованих рівнянь

6.5.1. Контактні задачі без урахування тертя

Запишемо систему рівнянь (6.27) у вигляді

$$x_i = h\left(x_i - E\left(f_1(x_i) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)\right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження її наближеного розв’язку можна використовувати ітераційний процес:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}, \\ x_i^{(m)} = h\left(x_i^{(m-1)} - E\left(f_1\left(x_i^{(m-1)}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(m-1)} - b_i \right)\right), \quad i = \overline{1, n}, \\ m = 1, 2, \ldots \ . \end{cases} \tag{6.36}$$

Для забезпечення збіжності цього процесу необхідно параметр E вибирати так

$$0 < E \le \left(L + \max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| \right)\right)^{-1}, \tag{6.37}$$

де значення невід’ємної константи L залежить від вигляду функції $f_1(x)$.

У праці [8] наведено теореми, які доводять збіжність цього процесу.

6.5.2. Контактні задачі з урахуванням тертя

Для отримання наближеного розв’язку системи (6.31) використовуватимемо ітераційний процес

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = 0 \quad \forall i = \overline{1, 3k}, \\ x_{3i-2}^{(m+1)} = h\left(\gamma_i^{(m)}\right), \\ x_{3i-1}^{(m+1)} = q\left(\alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}, \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)}\right), \\ x_{3i}^{(m+1)} = q\left(\beta_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)}\right), \quad i = \overline{1, k}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{6.38}$$

для якого величини $\alpha_i^{(m)}$, $\beta_i^{(m)}$ і $\gamma_i^{(m)}$ визначають рівності:

$$\begin{cases} \gamma_i^{(m)} = x_{3i-2}^{(m)} - E\left(g_1\left(x_{3i-2}^{(m)}\right) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-2\ j} x_j^{(m)} - b_{3i-2} \right), \\ \alpha_i^{(m)} = x_{3i-1}^{(m)} - E\left(g_2\left(x_{3i-1}^{(m)},\ x_{3i}^{(m)},\ x_{3i-2}^{(m)}\right) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i-1\ j} x_j^{(m)} - b_{3i-1} \right), \\ \beta_i^{(m)} = x_{3i}^{(m)} - E\left(g_2\left(x_{3i}^{(m)},\ x_{3i-1}^{(m)},\ x_{3i-2}^{(m)}\right) + \sum\limits_{j=1}^{3k} a_{3i\ j} x_j^{(m)} - b_{3i} \right), \quad i = \overline{1,\ k}. \end{cases} \tag{6.39}$$

Вважатимемо, що константа E у виразах (6.39) задовольняє нерівності

$$0 < E \le \left(L + \max_{1 \le i \le 3k} \left(\sum_{j=1}^{3k} \left| a_{ij} \right| \right) \right)^{-1}, \tag{6.40}$$

в якій невід'ємне число L залежить від властивостей функцій $f_1(x)$ та $f_2(x,\ y,\ z)$.

Для отримання наближеного розв'язку системи (6.35) використовуватимемо ітераційний процес

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = 0 \quad \forall i = \overline{1,\ 2k}, \\ x_{2i-1}^{(m+1)} = q\left(\tilde{\alpha}_i^{(m)},\ \tilde{\beta}_i^{(m)},\ \mu \cdot p_i\right), \\ x_{2i}^{(m+1)} = q\left(\tilde{\beta}_i^{(m)},\ \tilde{\alpha}_i^{(m)},\ \mu \cdot p_i\right), \quad i = \overline{1,\ k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{6.41}$$

в якому величини $\tilde{\alpha}_i^{(m)}$ і $\tilde{\beta}_i^{(m)}$ визначають рівності:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_i^{(m)} = x_{2i-1}^{(m)} - E\left(g_2\left(x_{2i-1}^{(m)},\ x_{2i}^{(m)},\ p_i\right) + \sum\limits_{j=1}^{2k} \tilde{\tilde{a}}_{2i-1\ j} x_j^{(m)} - \tilde{\tilde{b}}_{2i-1} \right), \\ \tilde{\beta}_i^{(m)} = x_{2i}^{(m)} - E\left(g_2\left(x_{2i}^{(m)},\ x_{2i-1}^{(m)},\ p_i\right) + \sum\limits_{j=1}^{2k} \tilde{\tilde{a}}_{2i\ j} x_j^{(m)} - \tilde{\tilde{b}}_{2i} \right), \quad i = \overline{1,\ k}. \end{cases} \tag{6.42}$$

Вважатимемо, що константа E, яка входить у рівності (6.42), задовольняє умову

$$0 < E \le \left(L + \max_{1 \le i \le 2k} \left(\sum_{j=1}^{2k} \left| \tilde{\tilde{a}}_{ij} \right| \right) \right)^{-1}, \tag{6.43}$$

де число L залежить від властивостей функцій $f_1(x)$ та $f_2(x,\ y,\ z)$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров А.И., Грабко Е.В.* Решение задач о контакте упругих шероховатых тел с использованием нелинейных интегральных уравнений // Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 14–21.
2. *Александров А.И.* Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения статических задач о контакте упругих тел при отсутствии трения // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 1. – С. 5–12.
3. *Александров А.И.* Регуляризирующий алгоритм для нелинейных интегральных уравнений контактной задачи о взаимодействии упругих тел при налички кулонова трения // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 1. – С. 5–9.
4. *Александров А.И.* Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений. – Днепропетровск, 1989. – 74 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т технической механики; 89–2).
5. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 3. – С. 516–527.
6. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1986. – 176 с.
7. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. – 253 с.
8. *Грабко О.В.* Ітераційні процеси для розв’язання статичної задачі про контакт пружних шорстких тіл // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2013. – **27**. – С. 104–112.
9. *Демкин Н.Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 228 с.
10. *Джонсон К.Л.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
11. *Кравчук А.С.* К постановке краевых задач теории упругости с трением на границе // Механика деформируемого твёрдого тела. – Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, 1976. – С. 102–105.
12. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
13. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
14. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
15. *Kalker J.J.* A survey of the mechanics of contact between solid bodies // ZAAM. – 1977. – **57**, No. 5. – P. 3–17.

РОЗДІЛ 7

ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ ПРУЖНИХ ШОРСТКИХ ТІЛ БЕЗ ТЕРТЯ ТА ЗІ ЗЧЕПЛЕННЯМ І ПРОКОВЗУВАННЯМ

О.В. Приходько

Розроблений у попередньому розділі алгоритм застосовано для отримання розв'язків різних контактних задач без тертя та зі зчепленням і проковзуванням. Зокрема, за відсутності тертя розв'язано задачу про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір, задачу про контакт пружних куль та задачу про стискування пружних циліндрів. А з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування отримано розв'язок задачі про контакт пружної кулі з пружним півпростором, а також задач про вдавлювання циліндричного та прямокутного штампів у шорсткий півпростір.

7.1. Розв'язування контактних задач без урахування тертя

7.1.1. Задача про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір

Розглянемо задачу про вдавлювання силою P циліндричного штампа з плоскою основою радіусом R_1 у пружний шорсткий півпростір. Обчислювали для півпростору з пружними сталими $\nu_2 = 0.3$ і $E_2 = 210000$ МПа та абсолютно жорсткого штампа ($E_1 = +\infty$). Функція $f_1(x)$, за допомогою якої враховували шорсткість, задана співвідношенням (6.3).

Числовий розв'язок задачі отримано на сітці, яка складається з $51 \times 51 = 2601$ квадратного граничного елемента, площа d_1 кожного з яких дорівнює $156.25 \cdot 10^{-8}$ м^2 ($n = 51$, $d = 4064.0625 \cdot 10^{-6}$ м^2). Числові параметри a_{ij} і b_i обчислювали за формулами (6.28). Щоб одержати результати, використовували ітераційний процес (6.36), в якому значення E обирали найбільшим з усіх можливих, що задає співвідношення (6.37). При цьому у (6.37) значення $L = f_1(a)/a$ та $a = 1500$ МПа .

Числовий розв'язок розглянутої задачі отримали для $P = 50$ кН , $R_1 = 0.025$ м , $K = 2/3$, $L = 8\alpha(x_0)^{-1/3}/3$, $x_0 = 0.1$ МПа (значення $K = 2/3$ відповідає сферичній моделі мікровиступів шорсткості [6]). Коефіцієнти α приймали рівними 0, $0.1 \cdot 10^{-32/3}$ і $1 \cdot 10^{-32/3}$ м $\cdot$ (Па)$^{-2/3}$ (що відповідає висоті мікровиступів $\rho = 0$ м , $\rho = 17.16 \cdot 10^{-6}$ м , $\rho = 171.6 \cdot 10^{-6}$ м).

Для кожного зі значень коефіцієнта α знаходили значення безрозмірного параметра $\gamma = f_1(p_{1\max}) / \left(\Delta_1^* - f_1(p_{1\max})\right)$, який характеризує частку нелінійної нормальної деформації мікронерівностей відносно лінійної нормальної деформації тіл у найнапруженішій зоні і може служити мірою фізичної нелінійності задачі (тут символ $p_{1\max}$ позначає найбільше значення контактного тиску). Отримали такі значення γ: для $\alpha = 0$ м$\cdot(\text{Па})^{-2/3}$ $\gamma = 0$, для $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-32/3}$ м$\cdot(\text{Па})^{-2/3}$ $\gamma = 0.027$, для $\alpha = 1 \cdot 10^{-32/3}$ м$\cdot(\text{Па})^{-2/3}$ $\gamma = 0.303$. Ці значення дають можливість вважати задачу фізично лінійною, якщо $\alpha = 0$ м$\cdot(\text{Па})^{-2/3}$, квазілінійною, якщо $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-32/3}$ м$\cdot(\text{Па})^{-2/3}$ та істотно нелінійною, якщо $\alpha = 1 \cdot 10^{-32/3}$ м$\cdot(\text{Па})^{-2/3}$. Отриманий розв'язок задачі наведено на рис. 7.1.

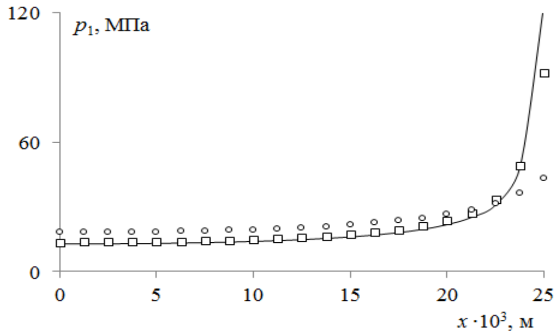


Рис. 7.1

На цьому рисунку подано розподіл нормальних тисків p_1, які діють на поверхні півпростору вздовж осі x декартової системи координат xoy, розташованої на межі півпростору з початком у центрі основи штампа (суцільна лінія – без врахування шорсткості, квадратики – квазілінійний і кільця – суттєво нелінійний випадки). Як і очікували, на межі площини контакту функція розподілу тиску при $\gamma = 0$ є необмеженою. Але з урахуванням шорсткості вона перетворюється на обмежену і зі зростанням γ зменшується найбільше значення контактного тиску (для суттєво нелінійного випадку воно приблизно вдвічі менше, ніж для квазілінійного).

7.1.2. Задача про контакт пружних куль зі шорсткими поверхнями

Розглянемо просторову статичну задачу про контакт двох лінійно-пружних куль зі шорсткими поверхнями за відсутності тертя між ними. Форму взаємодіючих тіл визначили співвідношенням

$$\delta_0(s) = \delta_0(x, y) = R_1 + R_2 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2} \ ,$$

де R_1, R_2 – радіуси куль. Закон урахування деформацій поверхневих мікронерівностей тіл заданий співвідношенням (6.3) [6]. Кулі апроксимували пружними півпросторами і для визначення елементів матриці впливу використовували формулу (6.28). Для розв'язання задачі застосовували ітераційний процес (6.36), (6.37), в якому $L = \alpha \cdot K \cdot x_0^{K-1}$, $x_0 = 0.1$ МПа, $c = \left(1 - \nu_1^2\right) \cdot (\pi E_1)^{-1} + \left(1 - \nu_2^2\right) \cdot (\pi E_2)^{-1}$.

Щоб дослідити вплив шорсткості поверхонь куль на розміри площини контакту та контактні тиски виконали числовий експеримент, в якому здійснили 234 варіанти розрахунку. У всіх розрахунках квадратну область Ω розбили на 2500 квадратних граничних елементів рівної площі. Значення параметрів ν_1, ν_2, E_1, E_2, R_1, R_2, P задавали відповідно до обмежень:

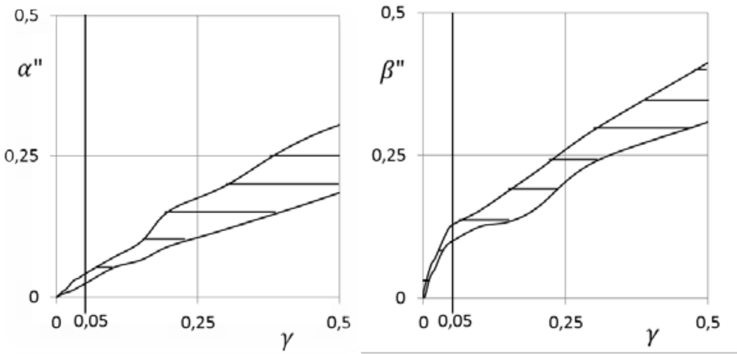
$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3,$$
$$E_1 = 210000 \text{ МПа}, \quad 210000 \text{ МПа} \le E_2 \le \infty,$$
$$0.1 \text{ м} \le R_1 \le \infty, \quad R_2 = 0.1 \text{ м},$$
$$24 \text{ кН} \le P \le 2307.4 \text{ кН}.$$

Для різних значень K відповідні значення α змінювали так:

$$K = 0.4: \quad 0.02 \times 10^{-7.8} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.4} \le \alpha \le 45 \times 10^{-7.8} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.4},$$
$$K = 0.5: \quad 0.007 \times 10^{-8.5} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.5} \le \alpha \le 16 \times 10^{-8.5} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.5},$$
$$K = 1: \quad 0.027 \times 10^{-15} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-1} \le \alpha \le 80 \times 10^{-15} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-1}.$$

За результатами числового експерименту знайшли значення безрозмірних параметрів $\alpha'' = \left(\tilde{p}_1(0, 0) - p_1(0, 0)\right) / \tilde{p}_1(0, 0)$ і $\beta'' = \left|\tilde{a} - a\right| / \tilde{a}$, які характеризують взаємне відносне відхилення наближених розв'язків рівняння (6.23) без та з урахуванням шорсткості, отриманих за одного й того ж значення стискальної сили P (тут $(0, 0)$ – точка початкового дотику куль, в якій діє найбільший контактний тиск; a і $\tilde{a}$ – радіуси площини контакту в задачі з урахуванням шорсткості та без). При цьому проаналізували залежність параметрів α'' і β'' від безрозмірного параметра $\gamma = f_1(p_1(0, 0)) / \left(\Delta_1^* - f_1(p_1(0, 0))\right)$, який характеризує відношення найбільшого зім'яття мікронерівностей до сумарного лінійно-пружного переміщення точок куль, в яких діє найбільший контактний тиск. Очевидно, γ характеризує ступінь фізичної нелінійності контактної задачі.

Всі точки (γ, α''), знайдені за результатами розрахунків, займають заштриховану область на рис. 7.2 *а*, а всі точки (γ, β'') – заштриховану область на рис. 7.2 *б*.



а *б*

Рис. 7.2

Рис. 7.2 *а* свідчить про те, що при $\gamma \le 0.1$ виконується наближена рівність $\alpha'' \approx 0.8 \cdot \gamma$ (незалежно від значень ν_1, ν_2, E_1, E_2, R_1, R_2, P, α, K, що забезпечують нерівність $\gamma \le 0.1$). З рис. 7.2 *б* випливає, що при $\gamma \le 0.05$ виконується наближена рівність $\beta'' \approx 2 \cdot \gamma$. Тобто вплив параметра γ на відхилення розміру площинки контакту від значення цього розміру за теорією Герца в два з половиною рази більший, ніж на відхилення найбільшого контактного тиску від значення цього тиску за теорією Герца.

Припустимо, що найбільше зминання $f_1(p_1(0, 0))$ мікровиступів не перевищує їх висоту ρ. З виконаного числового експерименту видно, що жорстке зближення тіл без урахування шорсткості не перевищує цього зближення з урахуванням за однакової стискальної сили P. Отже, можна зробити висновок про те, що якщо відношення висоти мікронерівностей ρ до жорсткого зближення тіл $\tilde{\Delta}_1^*$ менше 0.05, то враховувати шорсткість недоцільно; якщо ж це відношення більше 0.1, то це слід робити. Щоб застосувати сформульовані умови на практиці, необхідно знати лише жорстке зближення тіл без урахування шорсткості $\tilde{\Delta}_1^*$ та висоту мікронерівностей ρ їхніх поверхонь. Ці параметри можна знайти в довідковій літературі, не розв'язуючи контактну задачу.

Наведемо розв'язок задачі про вдавлювання сферичного штампа ($E_2 = \infty$) у шорсткий пружний півпростір ($E_1 = 210000$ МПа) для $\gamma = 0$ (штрихова лінія), $\gamma = 0.03$ (кільця) і $\gamma = 0.1$ (суцільна лінія). Стискальна сила $P = 500$ кН.

Рис. 7.3 повністю ілюструє вище вказане припущення: якщо $\gamma \le 0.05$, то врахування шорсткості недоцільне.

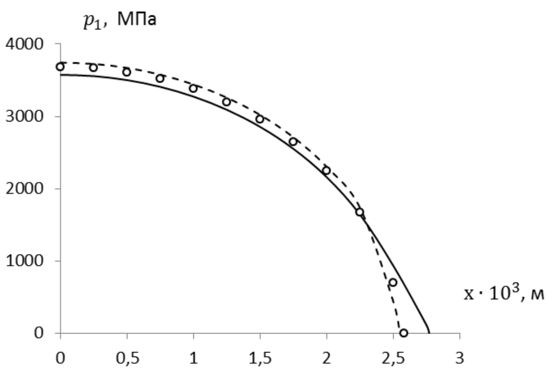


Рис. 7.3

7.1.3. Задача про стискування пружних циліндрів

Розглянемо задачу про стискування двох циліндрів з ортогональними осями. Стискальна сила $P_1 = 110$ кН і $P_2 = 150$ кН направлена вздовж спільної нормалі до поверхонь тіл, яка проходить через точку їхнього початкового дотику. Матеріали циліндрів мають однакові модулі пружності $E_1 = E_2 = 210 \cdot 10^9$ Па та коефіцієнти Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; радіус верхнього циліндра складає 0.475 м, а нижнього 0.3 м. Закон урахування деформацій поверхневих мікронерівностей нижнього тіла заданий співвідношенням (6.3) [6], в якому $K = 0.5$, а $\alpha = 4.2 \cdot 10^{-10.5} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.5}$ для незначної шорсткості і $\alpha = 42 \cdot 10^{-10.5} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.5}$ – для істотної. Циліндри апроксимували пружними півпросторами і для визначення елементів матриці впливу використовували формули (6.28). Для розв'язання задачі застосували ітераційний процес (6.36). Розв'язок отримали на сітці розмірністю $51 \times 51 = 2601$ вузлів. На рис. 7.4 *а*, *в* подано розміри і форму контактної плями, а також розподіл нормальних контактних тисків на лінії $y = z = 0$ (суцільна лінія відповідає розв'язку без урахування шорсткості, штрихова – з врахуванням незначної шорсткості, штрихпунктир – з урахуванням суттєвої шорсткості) для стискальної сили P_1, а на рис. 7.4 *б, г* – для стискальної сили P_2.

Наведені дані свідчать про те, що за врахування шорсткості поверхонь тіл в даній контактній задачі помітно зростає розмір зони контакту і зменшується максимальне значення контактних тисків порівняно з лінійним випадком. Відмітимо, що для суттєво нелінійного випадку найбільше значення тисків знижується порівняно з лінійним випадком на $17.5\,\%$, а піввісь зони контакту зростає на $34.5\,\%$.

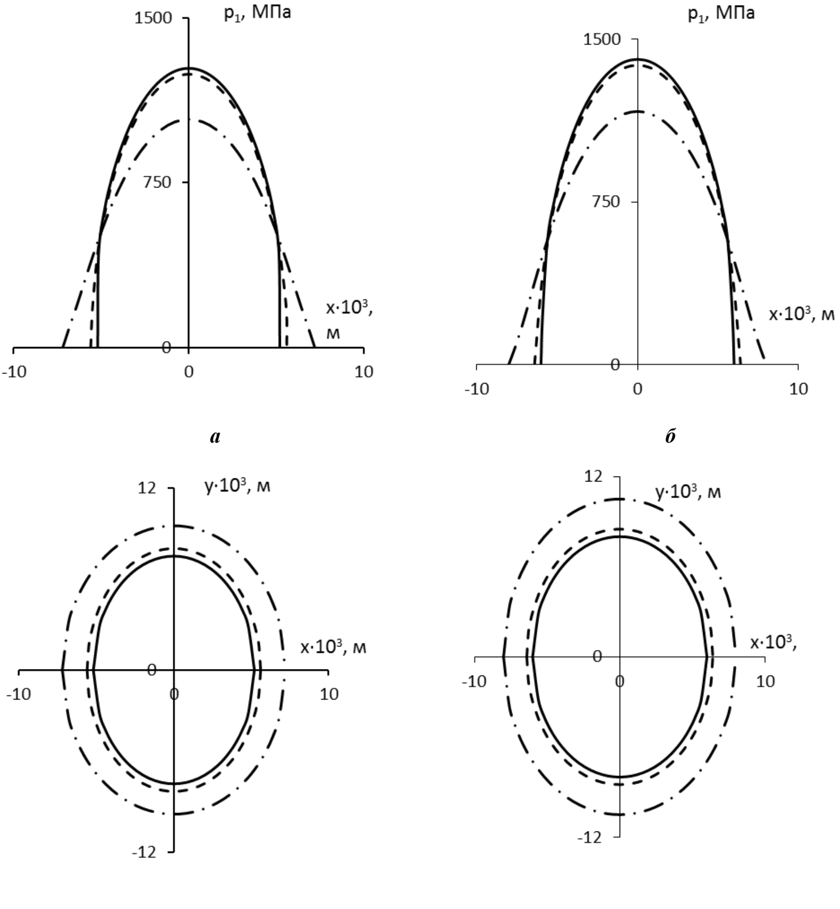


Рис. 7.4

7.2. Розв’язування контактних задач з урахуванням зчеплення і фрикційного проковзування

7.2.1. Задача про вдавлювання пружної кулі в шорсткий пружний півпростір

Розглянемо просторову контактну задачу про вдавлювання пружної кулі радіусом 0.3 м у шорсткий пружний півпростір за дії на кулю стискальної P_z і зсувної P_x сил [3]. Тіла, які контактують, мають однакові модулі пружності

$E_1 = E_2 = 210 \cdot 10^3$ МПа та коефіцієнти Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$. Коефіцієнт тертя $\mu = 0.3$. Значення стискальної сили P_z прийнято рівним 50 кН, а для зсувної сили P_x задавали різні значення: 3.75, 7.5, 11.2 кН.

Враховували деформації мікронерівностей шорсткості за допомогою сферичної моделі виступів [4–6], використовуючи співвідношення (6.30), (6.2), (6.5), де значення коефіцієнта α приймали рівними 0, $0.8 \cdot 10^{-35/3}$, $8 \cdot 10^{-35/3}$ м$\cdot$(Па)$^{-2/3}$, а значення β – 0, $0.8128 \cdot \alpha$.

Числовий розв'язок задачі отримали на сітці, яка складається з $41 \times 41 = 1681$ квадратного граничного елемента, площа кожного з яких $16 \cdot 10^{-8}$ м ($n = 41, d = 2.6896 \cdot 10^{-4}$ м^2). Контактні тиски p_i визначали за допомогою ітераційного процесу (6.36), а невідомі значення питомого дотичного контактного навантаження $x_1, x_2, ..., x_{3362}$ – використовуючи ітераційний процес (6.41), (6.42), в якому значення параметра E вибирали найбільшим з усіх можливих його значень, що задає співвідношення (6.43) при $L = \frac{8}{3}\alpha(x_0)^{-1/3}$, $x_0 = 0.1$ МПа.

Для кожного зі значень коефіцієнта α знаходили значення безрозмірного параметра $\gamma = f_1(p_{1\max}) / (\Delta_1 - f_1(p_{1\max}))$, який залежить від найбільшого значення контактного тиску $p_{1\max}$ і жорсткого зближення тіл Δ_1. Значення γ характеризує частку нелінійної нормальної деформації мікронерівностей відносно лінійної у найнапруженішій області і служить мірою фізичної нелінійності задачі. Отримали такі значення γ: для $\alpha = 0$ м$\cdot$(Па)$^{-2/3}$ $\gamma = 0$, для $\alpha = 0.8 \cdot 10^{-35/3}$ м$\cdot$(Па)$^{-2/3}$ $\gamma = 0.0265$, для $\alpha = 8 \cdot 10^{-35/3}$ м$\cdot$(Па)$^{-2/3}$ $\gamma = 0.2621$. Ці значення дають можливість вважати задачу фізично лінійною, якщо $\alpha = 0$ м$\cdot$(Па)$^{-2/3}$, квазілінійною, якщо $\alpha = 0.8 \cdot 10^{-35/3}$ м$\cdot$(Па)$^{-2/3}$ та суттєво нелінійною, якщо $\alpha = 8 \cdot 10^{-35/3}$ м$\cdot$(Па)$^{-2/3}$. Отримані результати наведені на рис. 7.5–7.6 для $P_x = 3.75$ кН, рис. 7.7–7.8 – для $P_x = 7.5$ кН і рис. 7.9–7.10 – для $P_x = 11.2$ кН.

На рис. 7.5–7.10 результати подані у вигляді розподілу дотичних напружень τ_{zx}, які діють на поверхні півпростору вздовж осі x декартової системи координат xoy, розташованої на межі півпростору з початком у точці початкового дотику тіл (зсувна сила P_x діє на шар у напрямку осі x). Рис. 7.5,

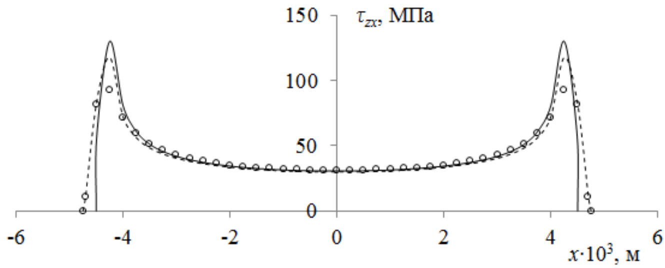


Рис. 7.5

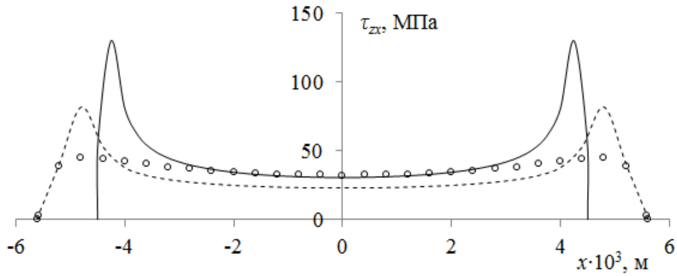


Рис. 7.6

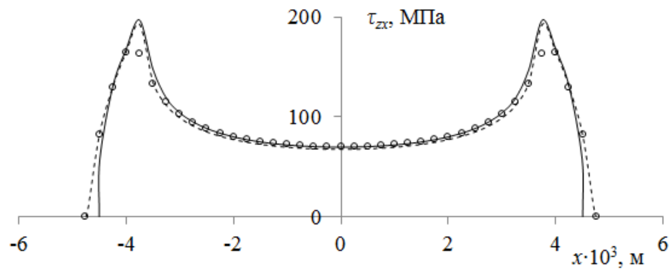


Рис. 7.7

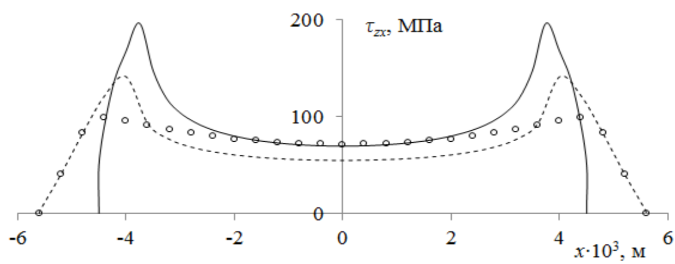


Рис. 7.8

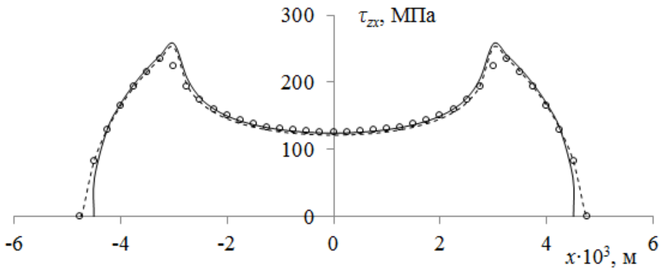


Рис. 7.9

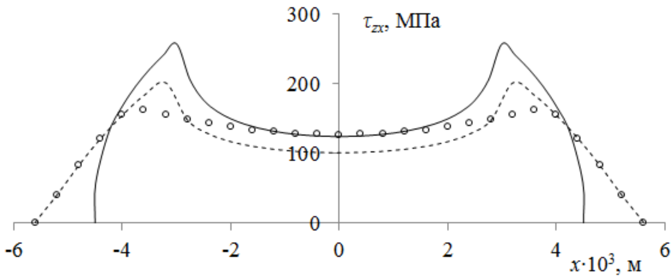


Рис. 7.10

7.7 і 7.9 відповідають квазілінійному випадку, а рис. 7.6, 7.8 і 7.10 – суттєво нелінійному. На цих рисунках суцільна лінія відповідає розв'язку контактної задачі без урахування шорсткості [7], штрихова – з урахуванням деформації поверхневих мікронерівностей тіл лише в нормальному напрямку ($\beta = 0$) і кільця – розв'язку задачі з урахуванням деформації поверхневих мікронерівностей тіл у нормальному і дотичному напрямках ($\beta = 0.8128 \cdot \alpha$).

Наведені дані свідчать про те, що за врахування шорсткості поверхонь тіл в контактній задачі маємо помітне зростання радіуса зони зчеплення і зменшення максимального значення дотичних напружень τ_{zx} у порівнянні з лінійним випадком, який характеризується розподілом τ_{zx}, що збігається з розв'язком Міндліна [7]. Відмітимо, що для суттєво нелінійного випадку найбільше значення напружень τ_{zx} помітно знижується порівняно з лінійним випадком: на 49.9 % за врахування нормальної і дотичної деформації мікронерівностей (див. на рис. 7.8, суцільна лінія і кільця) і на 28.2 % за врахування лише нормальної деформації мікронерівностей (див. на рис. 7.8, суцільна і штрихова лінії). Аналогічний показник для квазілінійного випадку становить 16.2 % (див. на рис. 7.7, суцільна лінія і кільця) та 2.1 % (див. на рис. 7.7, суцільна і штрихова лінії).

Зростання радіуса зони зчеплення на контактній плямі можна оцінити з наведених рисунків, взявши до уваги, що межа зони зчеплення відповідає точкам поверхні, де досягається найбільше значення дотичних напружень τ_{zx}. Найпомітніше зростання радіуса зони зчеплення для суттєво нелінійного випадку, коли одночасно враховують нормальну та дотичну деформації мікронерівностей, і становить $17.3\,\%$ відносно лінійного випадку (див. рис. 7.8, суцільна лінія і кільця).

7.2.2. Задача про вдавлювання циліндричного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування

Розглянемо просторову контактну задачу про вдавлювання кругового штампа з плоскою основою у шорсткий пружний півпростір за дії на штамп стискальної сили $P = 50$ кН. Радіус основи штампа $\widetilde{R} = 0.025$ м, пружні сталі півпростору $E_1 = 210 \cdot 10^3$ МПа та $\nu_1 = 0.3$. Значення коефіцієнта тертя μ змінювали від 0.05 до 1. Враховували шорсткість поверхні півпростору за допомогою виразів (6.30), (6.2), (6.8) [4–6], в яких значення параметра ρ приймали рівними 0, $13.73 \cdot 10^{-6}$ і $137.3 \cdot 10^{-6}$ м.

Числовий розв'язок задачі отримали на сітці, яка складається з $41 \times 41 = 1681$ квадратного граничного елемента, площа кожного з яких $1.5625 \cdot 10^{-6}$ м^2 ($n = 41$, $d = 2626.5625 \cdot 10^{-6}$ м^2). Невідомі значення питомого контактного навантаження $x_1, x_2, ..., x_{5043}$ обчислювали за допомогою ітераційного процеса (6.38), (6.39), в якому значення параметра E приймали найбільшим з усіх можливих, які задає співвідношення (6.40), при $L = \dfrac{2}{3}\alpha\left(x_0\right)^{-1/3}$, $x_0 = 0.1$ МПа.

За результатами числового розв'язку контактної задачі для різних значень параметрів ρ, μ обчислювали відношення радіуса зони зчеплення R_1 до радіуса основи штампа $\widetilde{R}$. Отримані дані наведені в таблиці 7.1, де перший рядок відповідає відсутності шорсткості ($\rho = 0$ м), другий – незначній шорсткості ($\rho = 13.73 \cdot 10^{-6}$ м) і третій – суттєвій ($\rho = 137.3 \cdot 10^{-6}$ м).

Таблиця 7.1

μ	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
1	0	0	0	0	0	0	0.6	0.85	0.95	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0.05	0.6	0.85	0.95	1	1	1	1	1	1
3	0	0.05	0.05	0.05	0.1	0.15	0.7	1	1	1	1	1	1	1	1

Аналіз наведених даних свідчить про те, що зі зростанням значення μ від 0 до 1 умови в зоні контакту змінюються від повного проковзування до повного зчеплення як за наявності шорсткості, так і за її відсутності (невеликі зони проковзування та зчеплення можуть бути, але вони менші за розміри граничного елемента розбиття площини контакту). За суттєвої шорсткості розміри зони зчеплення в інтервалі зміни значень μ від 0.06 до 0.4 порівняно з відсутністю шорсткості помітно зростають. Причому, якщо за відсутності шорсткості зчеплення з'являється при $\mu = 0.2$, то за незначної шорсткості – при $\mu = 0.1$, а за суттєвої – вже при $\mu = 0.06$.

Розподіл нормальних σ_z, дотичних τ_{zx} напружень та межові контури зон зчеплення для різних значень параметра ρ зображено на рис. 7.11–7.13 ($\mu = 0.1$) та 7.14–7.16 ($\mu = 0.3$).

На рис. 7.11–7.16 суцільною лінією зображено розподіл напружень без урахування шорсткості, квадратиками – за незначної шорсткості і кільцями – за суттєвої шорсткості. Відмітимо, що значення напружень за відсутності та за наявності шорсткості достатньо близькі майже на всій контактній плямі, окрім ділянок, розташованих поблизу меж цієї плями, де спостерігали значну розбіжність порівнюваних величин.

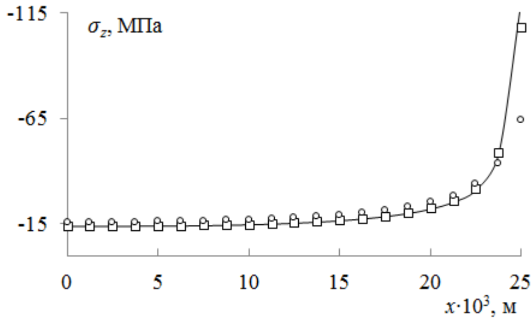


Рис. 7.11

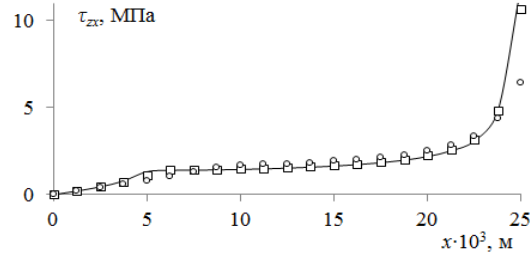


Рис. 7.12

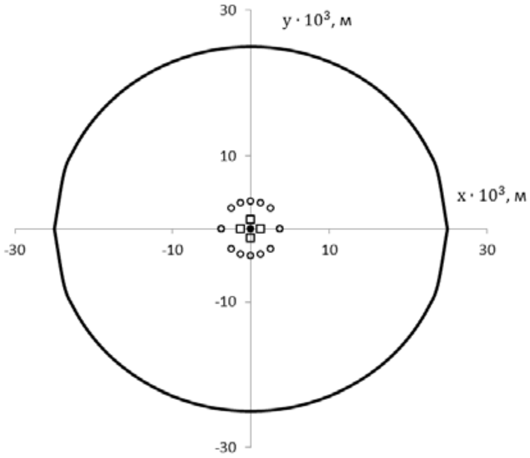


Рис. 7.13

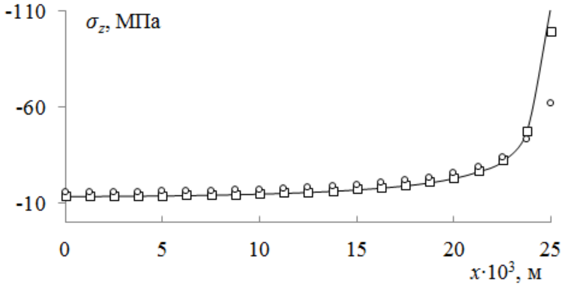


Рис. 7.14

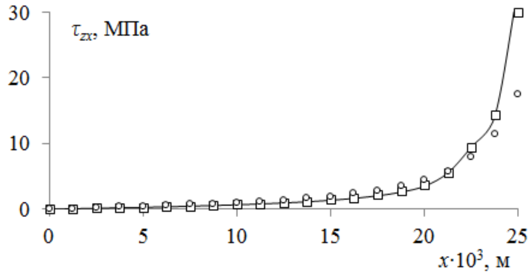


Рис. 7.15

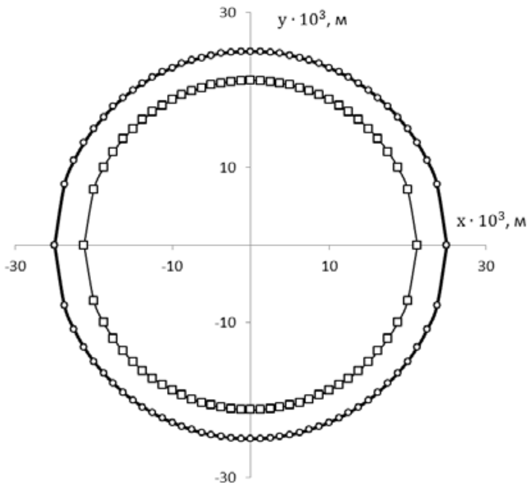


Рис. 7.16

7.2.3. Задача про вдавлювання прямокутного штампа з плоскою основою в пружний півпростір за наявності зон зчеплення та проковзування

Розглянемо просторову контактну задачу про вдавлювання прямокутного штампа з плоскою основою у шорсткий пружний півпростір за дії на штамп стискальної сили $P = 57$ кН [1]. Ширина основи штампа $2a = 0.006$ м, довжина $2b = 0.024$ м, пружні сталі півпростору $E_1 = 200 \cdot 10^3$ МПа та $\nu_1 = 0.3$. Значення коефіцієнту тертя μ змінювались від 0.05 до 1. Враховували шорсткість півпростору за допомогою виразів (6.30), (6.2), (6.8) [4–6], в яких значення параметра ρ приймали рівними 0, $13.73 \cdot 10^{-6}$ і $137.3 \cdot 10^{-6}$ м.

Числовий розв’язок задачі отримано на сітці, яка складається з $29 \times 57 = 1653$ однакових прямокутних граничних елементів (сторони цих елементів співвідносяться як 1:2), площа кожного з яких дорівнює $0.125 \cdot 10^{-6}$ м^2 ($n = 29$, $d = 206.625 \cdot 10^{-6}$ м^2). Невідомі значення питомого контактного навантаження $x_1, x_2, ..., x_{5043}$ обчислювали за допомогою ітераційного процесу (6.38), (6.39), в якому значення параметра E приймали найбільшим з усіх можливих, які задає співвідношення (6.40), при $L = \dfrac{2}{3}\alpha(x_0)^{-1/3}$, $x_0 = 0.1$ МПа.

За результатами отриманого числового розв’язку контактної задачі для різних значень параметрів ρ, μ обчислювали відношення півширини зони зчеплення a_1 при $y = 0$ до півширини основи штампа a. Одержані дані наведені в таблиці 7.2, де в першому рядку записані значення з праці [2] для відповідної плоскої контактної задачі, а у другому, третьому і четвертому – значення, знайдені за результатами числового розв’язку. Перші два рядки за відсутності шорсткості ($\rho = 0$ м), третій – за незначної ($\rho = 13.73 \cdot 10^{-6}$ м) і четвертий – за істотної ($\rho = 137.3 \cdot 10^{-6}$ м).

Таблиця 7.2

μ	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1
1	0	0	0	0	0	0.037	0.366	0.695	0.868	0.942	0.974	0.993	0.997
2	0	0	0	0	0	0	0.333	0.75	0.917	0.917	1	1	1
3	0	0	0	0	0	0.083	0.417	0.75	0.917	1	1	1	1
4	0	0.083	0.083	0.083	0.167	0.167	0.667	1	1	1	1	1	1

Аналіз наведених даних свідчить про те, що за зростанням значення μ від 0 до 1 умови в зоні контакту змінюються від повного проковзування до повного зчеплення як при наявності шорсткості, так і за її відсутності (невеликі зони проковзування та зчеплення все ж можуть бути, але вони менші за розміри граничного елемента розбиття площини контакту). За суттєвої шорсткості розміри зони зчеплення в інтервалі зміни значень μ від 0.06 до 0.5 порівняно з випадком відсутності шорсткості помітно зростають. Причому, якщо за відсутності шорсткості зчеплення виникає при $\mu = 0.2$, то за незначної – при $\mu = 0.1$, а за суттєвої – вже при $\mu = 0.06$. Як і очікували, шорсткість поверхні півпростору сприяє зростанню зони зчеплення на контактній площині. Помітна розбіжність між відповідними значеннями a_1/a у перших двох рядках табл. 7.2, вірогідно, можна пояснити неповною відповідністю граничних умов плоскої контактної задачі [2] та розглянутої у цьому підрозділі просторової контактної задачі. Очікувана близькість даних першого і другого рядків ґрунтується на відповідності значення питомої стискальної сили $P_1 = P/(2b)$ для плоскої контактної задачі [2] значенню P для просторової задачі.

Розподіл нормальних σ_z та дотичних τ_{zx} напружень на поверхні півпростору поздовж поперечної осі симетрії контактної площини, а також межові контури зон зчеплення на ній для різних значень параметра ρ зображено на рис. 7.17–7.19 ($\mu = 0.1$), 7.20–7.22 ($\mu = 0.2$) та 7.23–7.25 ($\mu = 0.3$).

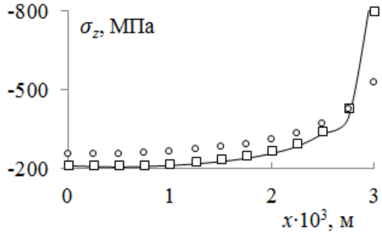


Рис. 7.17

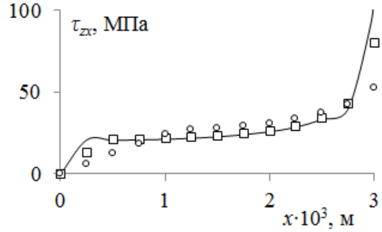


Рис. 7.18

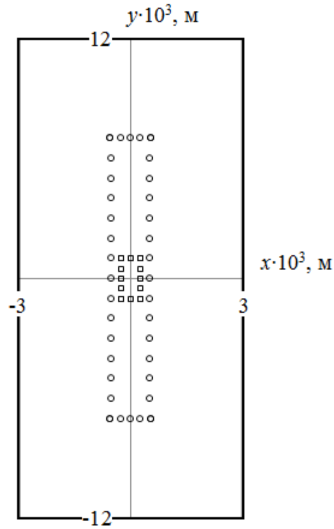


Рис. 7.19

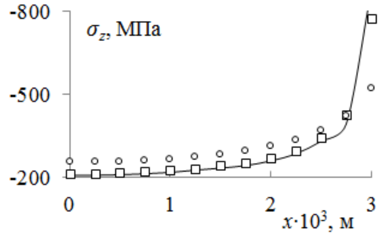


Рис. 7.20

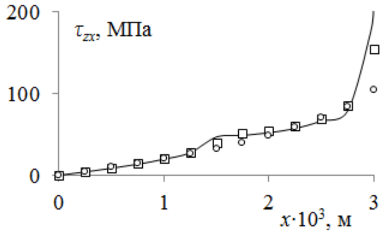


Рис. 7.21

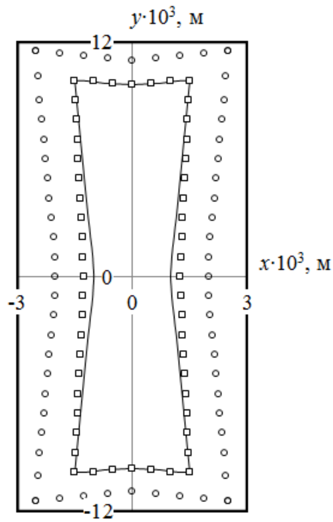


Рис. 7.22

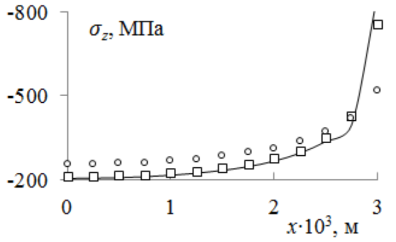


Рис. 7.23

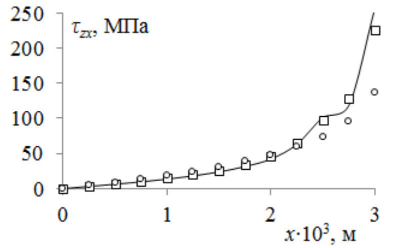


Рис. 7.24

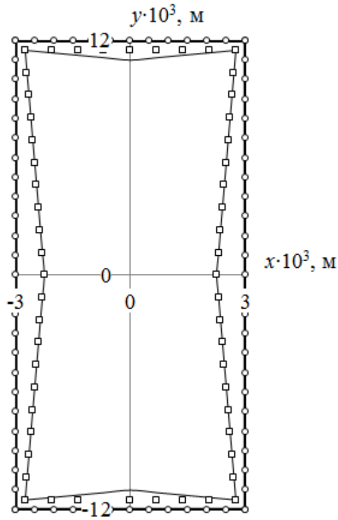


Рис. 7.25

На рис. 7.17–7.25 суцільною лінією зображено розподіл напружень та межу зони зчеплення за відсутності шорсткості, квадратиками – за незначної шорсткості і кільцями – за суттєвої.

Наведені тут результати свідчать про те, що значення напружень σ_z та τ_{zx} за відсутності шорсткості несуттєво відрізняються від значень σ_z та τ_{zx} за її наявності майже на всій площині контакту, окрім ділянок, розташованих поблизу меж цієї площини та поблизу меж між зонами зчеплення та проковзування. Слід зазначити, що розбіжність порівнюваних величин збільшується зі зростанням значення коефіцієнта тертя μ.

З рис. 7.19 та 7.22 випливає, що розміри зон зчеплення, отримані за відсутності шорсткості, можуть значно відрізнятися від одержаних за суттєвої шорсткості. Це означає, що якісні показники контактної взаємодії тіл можуть суттєво залежати від того, чи враховують шорсткість поверхонь цих тіл.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров А.И., Грабко Е.В.* Решение контактной задачи о вдавливании прямоугольного штампа в упругое шероховатое полупространство при наличии кулонова трения // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2014. – Вып. 4(37). – С. 42–52.
2. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1953. – 250 с.

3. *Грабко Е.В.* Численное решение статической задачи о контакте упругих шероховатых тел при наличии кулонова трения // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 18. – С. 39–47.
4. *Демкин Н.Б.* Контактирование шероховатых поверхностей. – М.: Наука, 1970. – 228 с.
5. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
6. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.
7. *Mindlin R.D.* Compliance of elastic bodies in contact // ASME J. Appl. Mech. – 1949. – **16**, No. 3. – P. 259–268.

РОЗДІЛ 8

ДЕЯКІ ПРОСТОРОВІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ТЕРТЯ І ШОРСТКОСТІ

Н.М. Д’яченко, Є.В. Шашкова

Розглянуто квазістатичну контактну задачу про ковзання штампа з тертям по межі пружного шорсткого півпростору і статичну задачу про вдавлювання штампа з тертям у шорсткий півпростір за наявності зони зчеплення і зони проковзування. Запропоновано задачі, поєднані загальним числовим підходом до розв’язання, заснованим на ітераційному методі разом із методом механічних квадратур, який започатковано в працях [2, 11, 12]. Особливістю розглянутих задач є невідома область контакту, яка залежить від вхідних даних. Проаналізовано вплив параметрів шорсткості і відстані прикладання горизонтальної сили від поверхні півпростору на контактні характеристики і форму невідомої площадки контакту. Матеріал розділу ґрунтується на наукових результатах, опублікованих раніше [5, 7, 10].

8.1. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору з лінійним законом деформування шорсткості

Розглянемо квазістатичну задачу про ковзання штампа з плоскою підошвою з тертям по межі пружного шорсткого півпростору з лінійним законом деформування шорсткості. Залежно від коефіцієнта шорсткості для розв’язку інтегрального рівняння задачі необхідні різні підходи.

Контактні задачі з урахуванням тертя досліджено в працях Л.О. Галіна [1], І.Г. Горячевої [3], К.М. Джонсона [4], І.Г. Горячевої, Р.М. Мартиняка [17], О.І. Александрова [13], Y.-T. Zhou, K.Y. Lee, Y.H. Jang [21] та ін. З одного боку, розрахунки свідчать про вплив шорсткості на контактні характеристики [1, 3, 4], а з іншого – урахування шорсткості призводить до регулярних інтегральних рівнянь, що дає можливість застосовувати ітераційні методи до їх розв’язання або отримувати аналітичні розв’язки. Ці дві обставини, зокрема, викликають зацікавленість науковців до контактних задач, що враховують у своїй постановці шорсткість поверхонь та, можливо, й тертя. Такі задачі розглядали В.М. Александров, Д.О. Пожарський [14], Р.М. Мартиняк, О.В. Приходько [9], Г.А. Шишканова [12], M. Paggi, A. Bemporad, J. Reinoso [18] та ін

8.1.1. Формулювання задачі

Розглянемо просторову контактну задачу про ковзання жорсткого квадратного в плані штампа з плоскою підошвою по межі пружного

півпростору. На штамп діють зовнішні сили: притискальна нормальна Q і горизонтальна T (рис. 8.1), яка прикладена на висоті d від поверхні півпростору і протилежно спрямована з віссю абсцис. Ці сили забезпечують штампу стан граничної рівноваги або рівномірного руху. Вважаємо задачу квазістатичною, що накладає певні обмеження на швидкість переміщення штампа. Введемо систему координат (x, y, z), де площина Oxy обмежує шорсткий півпростір, осі Ox і Oy є осями симетрії площадки контакту, вісь Oz спрямуємо всередину півпростору. Під дією зовнішніх сил на межі пружного півпростору $z = 0$ виникають нормальні і дотичні напруження σ_z, τ_{xz}. Припустимо, що на всій площадці контакту діє закон тертя Амонтона:

$$\tau_{xz} = -\mu\sigma_z \geq 0\,,$$

де μ – коефіцієнт тертя. Приймемо, що штамп під дією сил, прикладених до нього, може повертатися на кут α. Тоді рівнянням поверхні його основи буде:

$$f(x, y) = -\gamma x\,, \text{ де } \gamma = tg\,\alpha\,.$$

Загалом номінальною площадкою контакту є область $\Omega = \{-a \leq y \leq a; -a \leq x \leq b(y)\}$ (на рис. 8.1 її виділено сірим кольором). За повного контакту $b(y) \equiv a$; а за неповного $-a \leq b(y) \leq a$ для всіх $y \in [-a, a]$.

Таким чином, граничні умови набудуть вигляду

$$w = f(x, y) + \delta\,,\ \tau_{xz} = -\mu\sigma_z\,,\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0, \quad (x, y) \notin \Omega\,, \tag{8.1}$$

де δ – осідання штампа в точці, що відповідає початку координат.

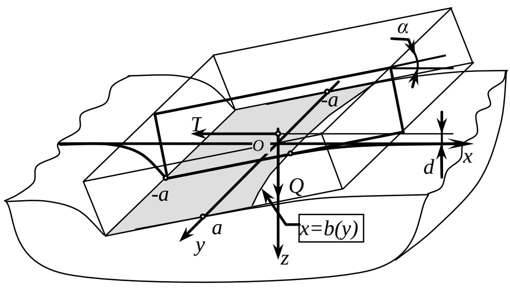


Рис. 8.1

Переміщення штампа в напрямку осі z можна подати як суперпозицію переміщення точок основи, які виникають внаслідок, по-перше, зминання мікровиступів шорсткості $W_{шор}$, по-друге, переміщення точок півпростору під дією контактного тиску W_1 і, по-третє, переміщення внаслідок дії горизонтальної сили W_2.

Розглядатимемо лінійний закон деформування шорсткості вигляду $W_{шор} = B \cdot p\left(x, y\right)$, де B – коефіцієнт шорсткості, що залежить від висоти мікровиступів [3].

Із розв'язання задачі про дію на півпростір зосередженої сили, що прикладена в початку координат і має складові T_z і T_x за осями Oz і Ox, виплаває, що вертикальні переміщення точок площини $z = 0$ визначає формула [3, 4]

$$\tilde{w} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{T_z}{R} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \cdot \frac{xT_x}{R^2}, \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8.2}$$

Переходячи до розподіленого по області Ω навантаження, зі співвідношення (8.2) і закону тертя Амонтона отримаємо:

$$W_1 = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint\limits_{\Omega} \frac{p(x', y')}{r} dx'dy' \ , \quad W_2 = \mu\lambda \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint\limits_{\Omega} \frac{p(x', y')}{r^2} (x - x')dx'dy',$$

де $\lambda = \dfrac{1-2\nu}{2-2\nu}$, $r = r(x, x', y, y') = \sqrt{\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2}$. Оскільки $w = W_{шор} + W_1 + W_2$, то з урахуванням лінійного закону деформування шорсткості і співвідношень (8.1) приходимо до такого інтегрального рівняння для визначення тиску під штампом (аналогічно [3]):

$$Bp(x, y) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint\limits_{\Omega} p(x', y') \left(\frac{1}{r} + \mu\lambda \frac{x - x'}{r^2} \right) dx'dy' = \delta - \gamma x. \tag{8.3}$$

Умови рівноваги штампа мають вигляд

$$Q = \iint\limits_{\Omega} p(x', y') \, dx'dy' \, ; \tag{8.4}$$

$$T = -\iint\limits_{\Omega} \tau_{xz}(x', y') \, dx'dy' = -\mu \iint\limits_{\Omega} p(x', y') \, dx'dy' = -\mu Q \, ; \tag{8.5}$$

$$M_y + |T| \, d = 0 \, , \quad M_y = \iint\limits_{\Omega} x' p(x', y') \, dx'dy' \, . \tag{8.6}$$

З (8.5), (8.6) отримаємо:

$$\iint\limits_{\Omega} x' p(x', y') \, dx'dy' + \mu d Q = 0 \, . \tag{8.7}$$

Якщо контакт штампа з півпростором неповний, то необхідно визначити форму площадки контакту, тобто знайти функцію $b(y)$. Для цього використовуємо додаткову граничну умову

$$p\,(b(y), y) = 0 \, . \tag{8.8}$$

Після підставлення умови (8.8) у рівняння (8.3) отримаємо:

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_{\Omega} p(x',y')\left(\frac{1}{r_0}+\mu\lambda\frac{b(y)-x'}{r_0^2}\right)dx'dy'=\delta-\gamma b(y)\,, \tag{8.9}$$

де $r_0 = r(b(y), x', y, y')$.

Таким чином, за повного контакту задані: півширина a площадки контакту, зовнішня нормальна сила Q, коефіцієнт шорсткості B_1, коефіцієнт тертя μ, пружні сталі та відстань d до точки прикладання горизонтальної сили T; при цьому необхідно розв'язати рівняння (8.3)–(8.5) і (8.7). За неповного контакту необхідно задовольнити ще й рівняння (8.9). Це дозволить знайти функцію розподілу контактного тиску $p(x, y)$, осідання штампа δ, тангенс γ кута його повороту, а за неповного контакту – ще й функцію $b(y)$.

8.1.2. Метод розв'язання

Введемо безрозмірні величини: функцію контактного тиску $p_1(x, y) = c \cdot p(x, y)$, де $c = \dfrac{1-\nu^2}{\pi E}$, коефіцієнт шорсткості $B_1 = \dfrac{B}{ca}$ та осідання штампа $\delta_1 = \dfrac{\delta}{a}$. Позначимо $\beta = \sqrt{2} + \mu\lambda\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Основне рівняння (8.3) перепишемо в операторному вигляді

$$\frac{B_1}{2\pi\beta}p_1(x,y)+\left(Lp_1\right)(x,y)=\frac{\delta_1}{2\pi\beta}-\frac{\gamma x}{2\pi\beta a}\,, \tag{8.10}$$

де

$$\left(Lp_1\right)(x,y)=\frac{1}{2\pi\beta a}\iint\limits_{\Omega} p_1(x',y')\left(\frac{1}{r}+\mu\lambda\frac{x-x'}{r^2}\right)dx'dy' \quad -$$

оператор, що переводить простір неперервних на квадраті $V = [-a, a] \times [-a, a]$ функцій $C(V)$ з нормою $\|p_1\| = \max\limits_{(x,y)\in V}|p_1(x, y)|$ в себе.

Про можливість застосування методу послідовних наближень.

Великі значення B_1. Оцінимо норму оператора L. Маємо:

$$\|Lp_1\|\le\frac{1}{2\pi\beta a}\max_{(x,y)\in\Omega}\iint\limits_{\Omega}|p_1(x',y')|\left(\frac{1}{r}+\mu\lambda\frac{|x-x'|}{r^2}\right)dx'dy' \le$$

$$\le\frac{\|p_1\|}{2\pi\beta a}\max_{(x,y)\in V}\iint\limits_{U_R[(x,y)]}\left(\frac{1}{r}+\mu\lambda\frac{|x-x'|}{r^2}\right)dx'dy'\,,$$

де $U_R[(x,y)]$ – круг радіуса $R = a\sqrt{2}$ з центром у точці (x,y) області Ω. Введемо заміну $x - x' = \rho\cos\phi,\ y - y' = \rho\sin\phi$, після чого одержимо:

$$\|Lp_1\| \le \frac{\|p_1\|}{2\pi\beta a}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(1+\mu\lambda\left|\cos\phi\right|\right) d\rho = \frac{\|p_1\|}{2\pi\beta a}\left(2\pi\sqrt{2}a + 4\sqrt{2}\mu\lambda a\right) = \|p_1\|.$$

Звідси приходимо до висновку, що $\|L\| \le 1$.

Перепишемо рівняння (8.10) у вигляді

$$p_1(x,y) = -\frac{2\pi\beta}{B_1}\left(Lp_1\right)(x,y) + \frac{\beta\delta_1}{B_1} - \frac{\beta\gamma x}{B_1 a}. \tag{8.11}$$

Тепер, згідно з принципом стискальних відображень [8] до рівняння (8.11) можна застосовувати метод послідовних наближень (метод ітерацій), якщо

$$B_1 > 2\pi\beta. \tag{8.12}$$

Коефіцієнт B_1 обмежений знизу, тому називатимемо його великим.

Малі значення B_1. Введемо параметр $\alpha = 1 - \dfrac{B_1}{2\pi\beta}$. Розглянемо оператор $\alpha I - L$ на просторі $C(V)$ неперервних на квадраті V функцій: цей оператор при

$$0 < B_1 < 2\pi\beta \tag{8.13}$$

є стискальним, оскільки

$$\left\|\left(\alpha I - L\right)(f)\right\| \le \alpha\|f\|.$$

Умова (8.13) задає обмеження зверху на коефіцієнт шорсткості. У такому випадку коефіцієнт називатимемо малим. Якщо переписати рівняння (8.10) у вигляді

$$p_1(x,y) = \alpha\, p_1(x,y) - \left(Lp_1\right)(x,y) + \frac{\delta_1}{2\pi\beta} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta a}, \tag{8.14}$$

то до нього можна застосовувати ітераційний метод.

Числове інтегрування. Під час розв'язання рівнянь (8.11) і (8.14) інтеграл обчислюватимемо числово методом механічних квадратур. Для цього розіб'ємо квадрат V на $n \times n$ рівних частин-квадратів $K_{i,j}$:

$$-a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = a; \quad -a = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < \ldots < y_n = a;$$

$$K_{i,j} = [x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j], \quad i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots n, \quad \bigcup_{i,j=1}^{n} K_{i,j} = K.$$

Інтеграл оператора $\left[Lf\right]\left(x,y\right)$ наближено замінимо інтегральною сумою

$$\left[\overline{L}f\right]\left(x,y\right) =$$

$$= \frac{1}{2\beta\pi a} \sum_{\substack{m,l:\,(x,y)\notin K_{m,l};\\ (\xi_m,\eta_l)\in\Omega}} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_m - x)^2 + (\eta_l - y)^2}} + \mu\lambda \frac{x - \xi_m}{(\xi_m - x)^2 + (\eta_l - y)^2} \right) \times$$

$$\times f(\xi_m, \eta_l) vK_{m,l},$$

де $vK_{m,l} = \Delta = \dfrac{4a^2}{n^2}$, (ξ_m, η_l) – центр квадрата $K_{m,l}$, тобто $\xi_m = (x_m + x_{m-1})/2$, $\eta_l = (y_l + y_{l-1})/2$, $m = 1, 2, ..., n;\ l = 1, 2, ...n$.

Матричні рівняння для отримання числового розв'язку. Введемо позначення:

$$\theta(x,y) = \begin{cases} 1,\ (x,y)\in\Omega \\ 0,\ (x,y)\notin\Omega \end{cases};\ p_2(x,y) = p_1(x,y)\theta(x,y);\ A = \left[a_{i,j,m,l}\right]_{i,j,m,l},$$

де $a_{i,j,m,l} = \dfrac{\Delta}{2\beta\pi a}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(\xi_m - \xi_i)^2 + (\eta_l - \eta_j)^2}} + \mu\lambda \dfrac{\xi_q - \xi_m}{(\xi_m - \xi_i)^2 + (\eta_l - \eta_j)^2} \right)$, якщо $m \neq i;\ l \neq j$, і $a_{i,j,m,l} = 0$ – у супротивному випадку.

Тут і далі рискою зверху позначатимемо наближене значення відповідної величини. Нехай $\overline{p}_1^*(x,y) = \overline{p}_1(x,y)\theta(x,y)$, тоді наближені значення невідомої функції подамо матрицею $X = \left[\overline{p}_2(\xi_i, \eta_j)\right]_{i,j}$, значення оператора $\overline{L\,p_1}$ – матрицею $A\cdot X$. Якщо позначити $Y = \dfrac{\overline{\delta}_1}{2\pi\beta}\left[\theta(\xi_i,\eta_j)\right]_{i,j} - \dfrac{\overline{\gamma}}{2\pi\beta a}\left[\xi_i\cdot\theta(\xi_i,\eta_j)\right]_{i,j}$, то рівняння (8.11) і (8.14) перетворяться у наближені матричні рівняння для невідомої матриці X. За великих B_1, що задовольняють умову (8.12), матимемо:

$$X = -\frac{2\pi\beta}{B_1} A\cdot X + \frac{2\pi\beta}{B_1} Y, \qquad (8.15)$$

у випадку малих B_1, що задовольняють (8.13), –

$$X = \alpha X + A\cdot X + Y. \qquad (8.16)$$

Введемо позначення:

$$S = \iint\limits_{\Omega} dx'dy', \quad S_1 = \iint\limits_{\Omega} x'dx'dy', \quad S_2 = \iint\limits_{\Omega} (x')^2\, dx'dy';$$

$$t = \sum_{m,l:\left(\xi_m,\eta_l\right)\in\Omega} \overline{p}_1^*\left(\xi_m,\eta_l\right)\Delta, \quad t_1 = \sum_{m,l:\left(\xi_m,\eta_l\right)\in\Omega} \xi_m \overline{p}_1^*\left(\xi_m,\eta_l\right)\Delta,$$

$$t_2 = \sum_{m,l:\left(\xi_m,\eta_l\right)\in\Omega} \left(\overline{L}\overline{p}_1^*\right)\left(\xi_m,\eta_l\right)\Delta, \quad t_3 = \sum_{m,l:\left(\xi_m,\eta_l\right)\in\Omega} \xi_m \left(\overline{L}\overline{p}_1^*\right)\left(\xi_m,\eta_l\right)\Delta.$$

Із (8.3), (8.4) і (8.7) отримаємо співвідношення, за допомогою яких визначимо значення γ і δ_1. Зокрема для великих B_1

$$\overline{\gamma} = \frac{aB_1}{S_1^2 - S\cdot S_2}\left[\left(\frac{2\pi\beta}{B_1}t_3 - \mu d Q_1\right)S - \left(\frac{2\pi\beta}{B_1}t_2 + Q_1\right)S_1\right] \ (Q_1 = Qc); \qquad (8.17)$$

$$\overline{\delta}_1 = \frac{B_1}{S_1^2 - S\cdot S_2}\left[\left(\frac{2\pi\beta}{B_1}t_3 - \mu d Q_1\right)S_1 - \left(\frac{2\pi\beta}{B_1}t_2 + Q_1\right)S_2\right]; \qquad (8.18)$$

а для малих –

$$\overline{\gamma} = \frac{2\pi\beta a}{S_1^2 - S\cdot S_2}\left[\left(\alpha t - t_2 - Q_1\right)S_1 - \left(\alpha t_1 - t_3 + \mu d Q_1\right)S\right]; \qquad (8.19)$$

$$\overline{\delta}_1 = \frac{2\pi\beta}{S_1^2 - S\cdot S_2}\left[\left(\alpha t - t_2 - Q_1\right)S_2 - \left(\alpha t_1 - t_3 + \mu d Q_1\right)S_1\right]. \qquad (8.20)$$

Якщо контакт неповний, то невідому функцію $b(y)$ наближено заміняємо вектором $\left\{\overline{b}(\eta_j)\right\}$. Для знаходження значень координат цього вектора із (8.9) одержимо рівняння:

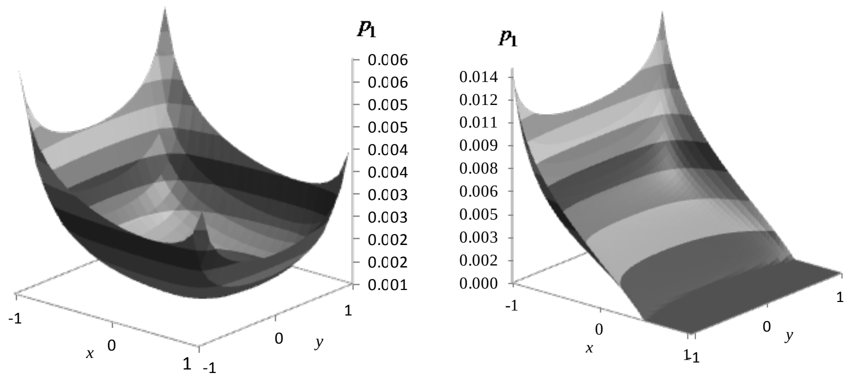
$$\overline{b}(\eta_j) = \frac{1}{\overline{\gamma}}\left[\overline{\delta}_1 a - 2\pi\beta a\left(\overline{L}\overline{p}_1^*\right)\left(\overline{b}(\eta_j),\eta_j\right)\right], \ j = \overline{1,n}. \qquad (8.21)$$

Отже, числовий розв’язок поставленої задачі шукаємо методом послідовних наближень, розв’язуючи систему рівнянь (8.15), (8.17) і (8.18) якщо B_1 великі, і (8.16), (8.19) і (8.20) – якщо B_1 малі, а за неповного контакту – ще й (8.21). При цьому всі шукані величини знаходимо в ітераційному процесі, тому разом з функцією $b(y)$ покроково змінюємо і область Ω.

Похибка обчислень містить [11]: по-перше, похибку від «ігнорування» інтеграла по квадрату розбиття з особливою точкою, яка прямо пропорційна площі такого квадрата; по-друге, похибку заміни інтеграла інтегральною сумою, яка пропорційна максимальному коливанню функції на квадратах розбиття (зазначені коливання обмежені через слабку особливість під знаком інтеграла); по-третє, похибку, обумовлену криволінійністю частини межі Γ області Ω, яка пропорційна сумі площ квадратів розбиття, що покривають межу; по-четверте, похибку методу послідовних наближень. Сумарну похибку оцінюємо як у праці [11], і при $n = 40$ за повного контакту вона становить близько 2%, а за неповного – близько 4%.

8.1.3. Аналіз результатів числових досліджень

Розрахунки виконували для $\nu = 0.3$, $a = 1$см і $Q_1 = 8.625 \cdot 10^{-3}$ см^2, де $Q_1 = Qc,\ c = \dfrac{1-\nu^2}{\pi E}$. Для коефіцієнта шорсткості $B_1 = 1$ при $\mu = 0.2$ на рис. 8.2 наведені графіки функцій контактного тиску під квадратним у плані штампом для повного контакту при $d = 0.5$ см (рис. 8.2 *а*) і неповного – при $d = 3$ см (рис. 8.2 *б*). Зі збільшенням відстані d від лінії прикладання горизонтальної сили до поверхні півпростору збільшується тиск у точках найбільшого занурення штампа в пружний півпростір, тобто в точках, де $x = -1$ см, а також до зменшення тиску в точках, де $x = 1$ см, поки тиск там не наблизиться до нульового значення, що відповідає відриву штампа.



а) *б)*

Рис. 8.2

На рис. 8.3 зображено графіки залежностей тангенса γ кута нахилу штампа (мітка 1) і осідання штампа δ_1 (мітка 2) від відстані d прикладання горизонтальної сили для $B_1 = 4$. Зі збільшенням відстані d кут зростає, а осідання штампа δ_1 зменшується. Для $B_1 = 4$ при $d = d_1 \approx 4.4 \cdot 10^{-2}$см маємо $\gamma = 0$, при $d \in [0, d_1]$ – $\gamma < 0$; при $d > d_2 \approx 1.8$ см – неповний контакт, при $d \in [0, d_2]$ – повний. Для $d > d_3 \approx 3.7$ см центр підошви штампа піднімається над півпростором і його осідання набуває від'ємного значення: $\delta_1 < 0$. Абстрактне значення $\gamma = \infty$ відповідає перекиданню штампа. Наприклад, вже при d =4.7 см кут становить близько 53^0. На жаль, розрахунки для більших значень відстані не передбачено в постановці задачі лінійної теорії пружності.

Аналіз залежностей, наведених на рис. 8.4, свідчить, що зі збільшенням коефіцієнта B_1 тангенс γ кута нахилу штампа (мітка 1) і осідання штампа δ_1 (мітка 2) збільшуються.

На рис. 8.5 побудовано графіки функцій $x = b(y)$, що визначають межу площадки за неповного контакту. Рис. 8.5 *а* відповідає фіксованому значенню $B_1 = 4$ і різним d (*1* – $2\,\text{см}$, *2* – 2.5, *3* – 3, *4* – 3.5, *5* – 4, *6* – $4.5\,\text{см}$); рис. 8.5 *б* – фіксованому $d = 2\,\text{см}$ і різним B_1 (*1* – 1, *2* – 2.5, *3* – 3.5, *4* – 4.5, *5* – 8).

Аналіз кривих, зображених на рис. 8.5 вказує на те, що зі збільшенням відстані d зменшуються розміри площадки контакту за фіксованого значення коефіцієнта шорсткості B_1 (рис. 8.5 *а*). Аналізуючи рис. 8.5 *б*, можна дійти висновку, що зі збільшенням коефіцієнта шорсткості B_1 зменшується розмір площадки контакту, а значення функції $b(y)$ зменшуються для всіх $y \in [-1,1]$, причому графік цієї функції стає пологішим.

На рис. 8.6 при $B_1 = 4$ винесено окремо графіки функцій контактного тиску в точках з ординатою $y = 0.95\,\text{см}$ для різних значень відстані d (*1* – $0.5\,\text{см}$, *2* – 1, *3* – 2, *4* – 3, 5 – $4\,\text{см}$). На рис. 8.7 зображено функції контактного тиску в точках з ординатами $y = 0.95$ і 0.05 см при $d = 3\,\text{см}$, коефіцієнтах шорсткості $B_1 = 1$ і 2 (*1* – $B_1 = 1$, $y = 0.95$ см; *2* – $B_1 = 2$, $y = 0.95$ см; *3* – $B_1 = 2$, $y = 0.05$ см; *4* – $B_1 = 1$, $y = 0.05$ см).

Зі збільшенням відстані d за фіксованого значення коефіцієнта шорсткості B_1 тиск у точках з абсцисою $x = -1\,\text{см}$ підвищується (рис. 8.6).

За фіксованого значення відстані d, збільшення коефіцієнта шорсткості B_1, що характеризує якість оброблення поверхні, призводить до підвищення тиску в точках «лівої» межі площадки контакту (точки, де $x = -1\,\text{см}$) і зменшення в точках «правої» ($x = 1\,\text{см}$) (рис. 8.7).

Розрахунки виявили, що зі зменшенням коефіцієнта тертя μ одному й тому ж куту нахилу штампа відповідають більші значення відстані d від лінії прикладання горизонтальної сили до поверхні півпростору, причому тиск у всіх точках площадки контакту зменшується.

Для повного контакту підошви квадратного штампа з межею півпростору отримані результати задовільно узгоджуються з результатами праці [12].

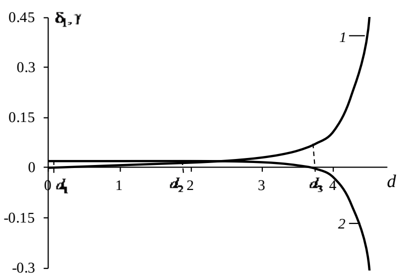


Рис. 8.3

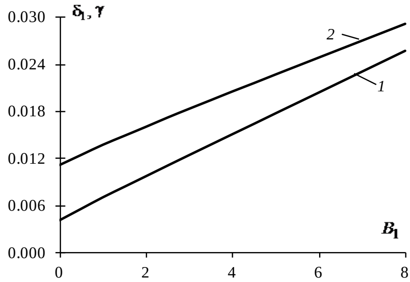
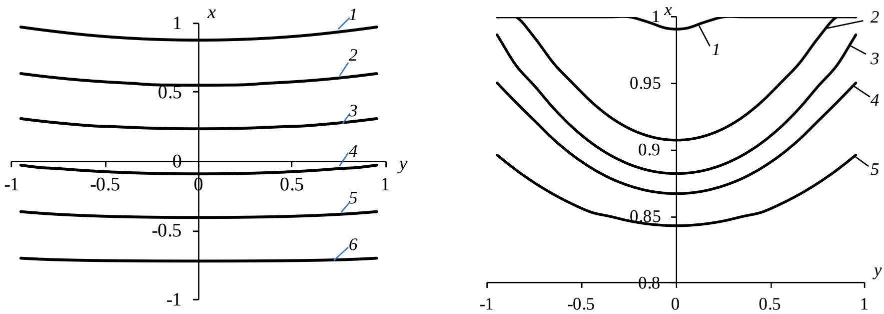
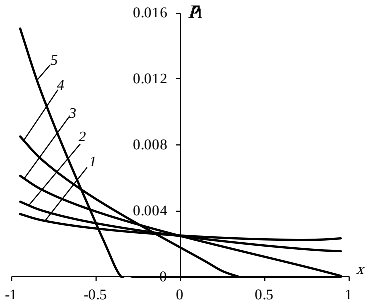


Рис. 8.4



а) *б)*

Рис. 8.5



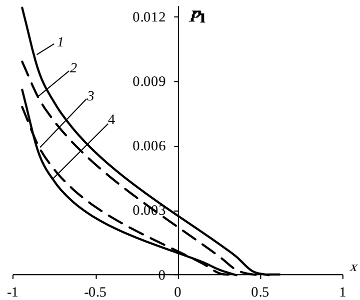


Рис. 8.6 **Рис. 8.7**

8.2. Квазістатична задача про ковзання штампа з тертям по межі шорсткого півпростору за степеневого закону деформування шорсткості

Відомо [1, 3], що залежність зминання мікровиступів шорсткості від контактного тиску може бути лінійною або нелінійною, зокрема степеневою. Контактні задачі зі степеневим законом деформування шорсткості розглянуто

в працях [1, 3, 9, 14, 19] та ін. Інтегральні рівняння, що моделюють контактну взаємодію, для лінійної залежності, є рівняннями Фредгольма другого роду, а для нелінійної дають можливість звести їх до рівнянь Гаммерштейна [1, 3]. Наслідуючи викладені вище ідеї, виділимо два випадки великих і малих коефіцієнтів шорсткості для дослідження операторів задачі.

У цьому підрозділі розглянемо задачу в формулюванні, аналогічному до п. 8.1.1, однак з припущенням про те, що залежність деформування шорсткості від контактного тиску описує степеневий закон $W_{шор} = B\left[p\left(x,y\right)\right]^K$, де B, K – коефіцієнти шорсткості, $K \in (0,1]$, $p\left(x,y\right) = -\sigma_z\left(x,y,0\right) > 0$ – тиск у зоні контакту. Зауважимо, що коефіцієнт B залежить від висоти мікровиступів шорсткості, а K – від їх форми [3].

З урахуванням зазначеного вище отримаємо таке інтегральне рівняння залежності вертикальних переміщень штампа від контактного тиску

$$B\left[p(x,y)\right]^K + \frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_{\Omega} p(x',y')\left(\frac{1}{r} + \mu\lambda\frac{x-x'}{r^2}\right)dx'dy' = \delta - \gamma x, \quad (8.22)$$

де прийняті такі ж позначення, як і в підрозділі 8.1. Крім того, маємо ті ж умови рівноваги (8.4)–(8.7).

Зауважимо, що для повного контакту з рівняння (8.22) і умов (8.4) і (8.7) можна знайти невідомі величини: функцію контактного тиску $p(x,y)$, осідання штампа δ і тангенс γ кута його нахилу. За неповного контакту для пошуку невідомої функції $b(y)$ потрібно використовувати граничну умову (8.8), після підставлення якої в інтегральне рівняння (8.22) отримаємо додаткове рівняння (8.9).

8.2.1. Метод розв'язання

Вказані системи розв'язуються, одночасно застосовуючи метод послідовних наближень і метод механічних квадратур.

Уведемо позначення $p_2(x,y) = \dfrac{p_1(x,y)}{|\gamma|}$, $\delta_2 = \dfrac{\delta_1}{|\gamma|}$, $B_1 = \dfrac{Bc^K}{a}$, $\omega = \dfrac{1}{K}$.

Великі значення B_1. За допомогою заміни, аналогічної до наведеної в праці [3],

$$\psi(x,y) = \frac{B_1}{2\pi\beta|\gamma|}|\gamma|^K\left[p_2(x,y)\right]^K + \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} - \frac{\delta_2}{2\pi\beta},$$

отримаємо $p_2(x,y) = \dfrac{1}{|\gamma|}\left[\dfrac{2\pi\beta|\gamma|}{B_1}\right]^{\omega}\left[\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\dfrac{x}{2\pi\beta a} + \dfrac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega}$, а рівняння

(8.22) зведемо до рівняння Гаммерштейна:

$$\psi(x,y) = -\frac{1}{|\gamma|}\left[\frac{2\pi\beta|\gamma|}{B_1}\right]^{\omega} L\left[\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} + \frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega}. \qquad (8.23)$$

Права його частина визначає нелінійний оператор. Позначимо його $[G\psi](x,y)$. Застосовуючи теоретичні результати праці [8], в класі неперервних недодатних на Ω функцій оцінимо:

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \le \omega\frac{1}{|\gamma|}\left[\frac{2\pi\beta|\gamma|}{B_1}\right]^{\omega}\|L\|\cdot\|\psi_1-\psi_2\|\times$$

$$\times\max_{(x,y)\in\Omega}\left[\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} + \frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega-1} \le$$

$$\le \omega\frac{1}{|\gamma|}\left[\frac{2\pi\beta|\gamma|}{B_1}\right]^{\omega}\left[\frac{\delta_1+|\gamma|}{2\pi\beta|\gamma|}\right]^{\omega-1}\|\psi_1-\psi_2\|.$$

Звідки випливає, що оператор G стискальний, якщо

$$u = \frac{2\pi\beta}{K[B_1]^{1/K}}\left[\delta_1+|\gamma|\right]^{(1-K)/K} < 1.$$

За цієї умови рівняння (8.23) має єдиний розв'язок, який можна знайти методом ітерацій. Оскільки отриману умову можна переписати у формі $B_1 > \left(\frac{2\pi\beta}{K[\delta_1+|\gamma|]}\right)^K [\delta_1+|\gamma|]$, то коефіцієнт шорсткості B_1 обмежений знизу певною функцією, залежною від іншого коефіцієнта K, тому B_1 є великим.

Малі значення B_1. Уведемо малий параметр $\alpha_2 = 1 - \frac{B_1}{2\pi\beta}$ і заміну

$$\psi(x,y) = |\gamma|^{K-1}[p_2(x,y)]^K + \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} - \frac{\delta_2}{2\pi\beta},$$

звідки виразимо $p_2(x,y) = |\gamma|^{\omega-1}\left[\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} + \frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega}$. При цьому рівняння (8.22) набуде вигляду

$$\psi(x,y) = \alpha_2\left(\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} + \frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right) -$$

$$-|\gamma|^{\omega-1} L\left[\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} + \frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega}. \qquad (8.24)$$

Нелінійний оператор у правій частині рівняння (8.24) позначимо через $\left[H\psi\right](x,y)$. Оскільки

$$\left\|H\psi_1 - H\psi_2\right\| \le \max\left\{\alpha_2; \frac{1}{K}\left[\frac{\delta_1 + |\gamma|}{2\pi\beta}\right]^{\frac{1-K}{K}}\right\}\cdot\left\|\psi_1 - \psi_2\right\|,$$

то умова його стискання і одночасно умова існування єдиного розв’язку рівняння (8.24) має вигляд

$$0 < B_1 < 2\pi\beta,\ u_2 = \frac{1}{K}\left[\frac{\delta_1 + |\gamma|}{2\pi\beta}\right]^{\frac{1-K}{K}} < 1.$$

Отримане відповідає означенню малого коефіцієнта шорсткості B_1.

Знайдемо розклад у ряд за степенями $\dfrac{2\pi\beta}{\delta_2}\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\dfrac{x}{a\delta_2}$ для функції

$$\left[\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{2\pi\beta a} + \frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega} = \left[\frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega}\left[1 + \frac{2\pi\beta}{\delta_2}\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{a\delta_2}\right]^{\omega} =$$

$$= \left[\frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\left[\frac{2\pi\beta}{\delta_2}\psi(x,y) - \operatorname{sgn}\gamma\frac{x}{a\delta_2}\right]^{k}\right),$$

$$C_k = \prod_{s=1}^{m}\frac{\omega - s + 1}{s}\ \ (k = 1,2,3,...).$$

За великих значень B_1 отриманий ряд збігається, якщо $\dfrac{B_1}{\delta_1}\left\|p_1\right\|^K < 1$, а за малих, – якщо $\dfrac{\pi\beta}{\delta_1}\left\|p_1\right\|^K < 1$. Числові розрахунки свідчать, що вирази в лівих частинах виписаних нерівностей менші за 0,2, тому для отримання точності до третього значущого знака достатньо взяти члени ряду в кількості $N = 10$.

Нелінійні матричні рівняння. Вміст деяких позначень зберігається, як і вище. Введемо нові позначення:

$$X^* = \left[\overline{\psi}\left(\xi_i, \eta_j\right)\right]_{i,j};$$

$$W(X^*) = \left[\frac{\delta_2}{2\pi\beta}\right]^{\omega}\left\{1 + \sum_{k=1}^{N} C_k\left[\frac{2\pi\beta}{\delta_2}\overline{\psi}\left(\xi_i, \eta_j\right) - \operatorname{sgn}\overline{\gamma}\frac{\xi_i}{a\overline{\delta}_2}\right]^{k}\right\}_{i,j};$$

$$Y^* = \left\{ -\frac{\operatorname{sgn}\bar{\gamma}}{2\pi\beta a}\xi_i + \frac{\bar{\delta}_2}{2\pi\beta}\theta\left(\xi_i, \eta_j\right) \right\}_{i,j} .$$

За великих значень B_1 наближені контактні характеристики можна знайти зі системи рівнянь

$$X^* = -\frac{1}{|\bar{\gamma}|}\left[\frac{2\pi\beta|\bar{\gamma}|}{B_1}\right]^{\omega} A\cdot W(X^*)\,; \quad \bar{\delta}_1 = B_1\left[\frac{Q_1}{t}\right]^K; \quad \bar{\gamma} = -\operatorname{sgn}\bar{\gamma}\ \frac{Q_1\mu d}{t_1}\,;$$

$$\bar{b}\left(\eta_j\right) = \frac{1}{\bar{\gamma}}\left[\bar{\delta}_1 a - 2\pi\beta a\left(\bar{L}\bar{p}_1^*\right)\left(\bar{b}\left(\eta_j\right), \eta_j\right)\right], \ j = \overline{1,n}\,;$$

за малих –

$$X^* = \alpha_2\left(X^* + Y^*\right) - |\bar{\gamma}|^{\omega-1} A\cdot W(X^*)\,; \quad \bar{\delta}_1 = 2\pi\left[\frac{Q_1}{t}\right]^K;$$

за тієї самої форми запису рівнянь для $\bar{\gamma}$ і $\bar{b}\left(\eta_j\right)$.

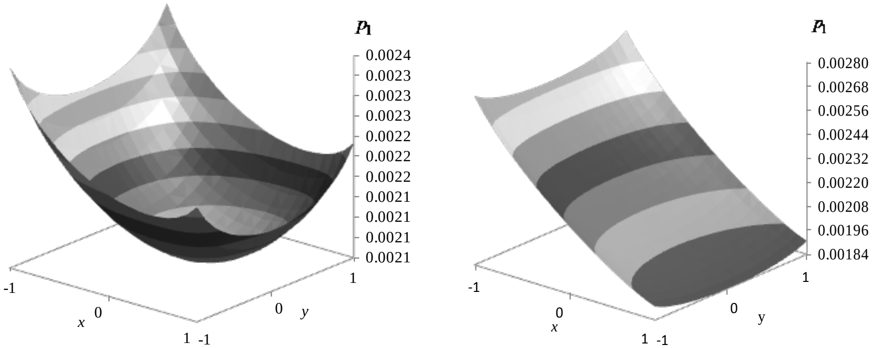
8.2.2. Числові результати

Розрахунки виконували для $\nu = 0.3$, $a = 1\,\text{см}$ і $Q_1 = 8.625\cdot 10^{-3}\,\text{см}^2$, де $Q_1 = Qc,\ c = \dfrac{1-\nu^2}{\pi E}$. Коефіцієнт, що характеризує нелінійність закону деформування шорсткості, $K = 0.4$.

На рис. 8.8 побудовано графіки функцій розподілу контактного тиску під квадратним у плані штампом, що ковзає по межі шорсткого півпростору з коефіцієнтом шорсткості $B_1 = 2$. Висота прикладання горизонтальної сили $d = 0.05\,\text{см}$ (рис. 8.8 *а*) і $3\,\text{см}$ (рис. 8.8 *б*).

На рис. 8.9 окремо винесено графіки функцій контактного тиску в точках з ординатою $y = 1$ см при $B_1 = 2$ і різних d (*1* – $0.05\,\text{см}$, *2* – 1, *3* – 2, *4* – 2.5, *5* – 3, *6* – $3.3\,\text{см}$). Для $B_1 = 2$ на рис. 8.10 побудовано залежності осідання штампа δ_1 (лінія *1*) і тангенса γ кута його нахилу (лінія *2*) від відстані d.

Графіки для функцій $x = b\left(y\right)$ побудовано на рис. 8.11, причому на рис. 8.11 *а* – за фіксованого $B_1 = 2$ і різних $d = 2.8; 2.9; 3; 3.1\,\text{см}$ (лінії *1–4* відповідно), а на рис.8.11 *б* – за фіксованого $d = 3$ см і різних $B_1 = 2; 3$ (лінії *1* і *2* відповідно).



а) *б)*

Рис. 8.8

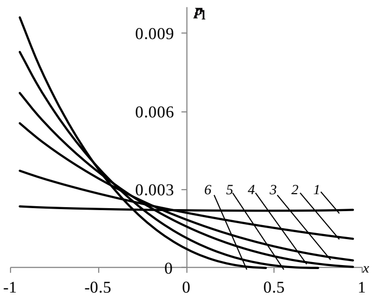


Рис. 8.9

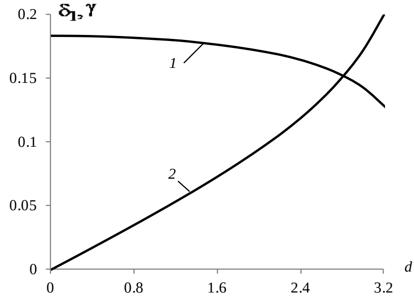
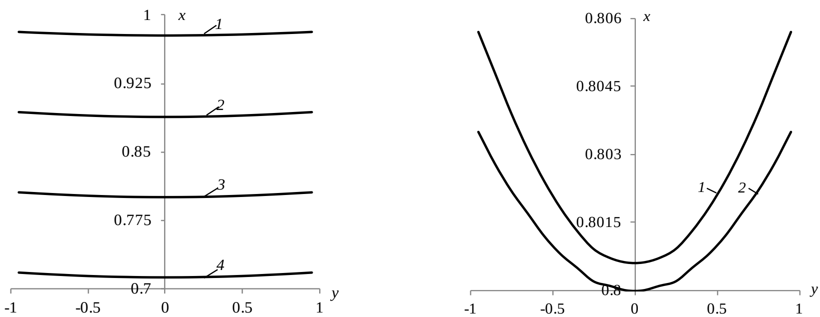


Рис. 8.10



а) *б)*

Рис. 8.11

Якісні висновки про вплив коефіцієнта шорсткості B_1 і відстані d прикладання горизонтальної сили на контактні характеристики здебільшого аналогічні, як за лінійного, так і нелінійного закону деформування шорсткості. Зупинимося на відмінностях, викликаних впливом нелінійності закону, у порівнянні з лінійним випадком: 1) одним і тим самим значенням відстані d і

показника B_1 нелінійному закону відповідають більші значення осідання штампа і кута його повороту однак, менші значення тиску в точках лівої межі площадки контакту (при $x = -1\,\text{см}$); 2) неповний контакт для степеневого закону спостерігається для більших значень відстані d (за фіксованого B_1); 3) нелінійному закону відповідають рівномірніший розподіл контактного тиску і пологіша лінія $x = b(y)$ (за однакових значень d і B_1).

8.3. Статична задача про контакт в умовах часткового проковзування

Розглянемо статичну просторову контактну задачу з частковим проковзуванням, що виникає внаслідок того, що тангенціальне навантаження, прикладене до штампа, менше, ніж граничне навантаження, здатне викликати повне ковзання на області контакту. При цьому враховуємо шорсткість півпростору. Специфіка такого роду задач пов'язана з необхідністю визначити не тільки функції нормальних і тангенціальних контактних напружень, але й розміри і форми областей зчеплення і проковзування.

Умови, що визначають стан зчеплення і проковзування, викладено в книзі К.М. Джонсона [4] з посиланням на науковців, які вперше їх дослідили. Саме ці умови застосовано в даному підрозділі.

Контактна задача за умов часткового проковзування без урахування шорсткості в плоскому формулюванні вивчена в монографіях Л.О. Галіна [1], І.Г. Горячевої [3]; з її урахуванням в осисеметричній постановці – в праці A. Brdzoza, V. Pauk [15], в просторовій – в статтях О.І. Александрова [13], Ю.М. Стреляєва, О.О. Тітової [20] та ін. В цих працях досліджено контакт тіл різної форми.

8.3.1. Формулювання задачі

Схема контактної взаємодії має вигляд, зображений на рис. 8.1 і описана в п. 8.1.1. Результатом впливу нормальної сили є поступальне переміщення штампа паралельно осі Oz на глибину δ, а тангенціальної – поворот навколо осі ординат: $\gamma_x = 0$, $\gamma_y = \gamma$ – проекції вектора повороту. Розглядатимемо наближення Гудмана (L.E.Goodman [16]), в якому знехтувано впливом дотичних напружень на розподіл контактного тиску, однак враховано вплив тиску на дотичні напруження. Такий підхід використано в працях К.М. Джонсона [4], І.Г. Горячевої [3] та ін. Згідно з ним функція розподілу тисків $p(x, y)$ під штампом, що контактує з пружним шорстким півпростором за лінійного закону деформування шорсткості, задовольняє інтегральне рівняння [3; 4]:

$$Bp(x, y) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y')}{r}\, dx'dy' = \delta - \gamma x\,, \tag{8.25}$$

де B – коефіцієнт шорсткості лінійного закону, Ω – номінальна площадка контакту, загальний вигляд якої такий самий, як і вище.

За неповного контакту для визначення функції $b(y)$ використовуємо граничну умову $p(b(y), y) = 0$. Підставимо її в (8.25) і отримаємо рівняння

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint_{\Omega} \frac{p(x', y')}{r(b(y), x', y, y')}\, dx'dy' = \delta - \gamma b(y)\,. \tag{8.26}$$

Так як взаємодіючі тіла знаходяться в умовах часткового проковзування, то $|T| \le \mu Q$, де μ – коефіцієнт тертя. Область ковзання позначимо Ω_1, а зчеплення – Ω_2, тоді $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$ (див. рис. 8.12). В області ковзання виконується закон тертя Амонтона і дотичні напруження $q(x, y) = \tau_{xz}(x, y)$ пов'язані з контактними тисками штампа співвідношенням $|q(x, y)| = -\mu p(x, y)\operatorname{sgn} s(x, y)$, де $s(x, y) = u(x, y) - \delta_x$ – відносні проковзування, $u(x, y)$ – переміщення пружного шорсткого півпростору вздовж осі Ox, δ_x – відносне зміщення в напрямку осі Ox фіксованих точок тіл, розташованих на деякій відстані від області контакту. В області зчеплення Ω_2 проковзування дорівнює нулю, тобто $u(x, y) = \delta_x$, і виконується нерівність $|q(x, y)| < \mu p(x, y)$ [1, 3, 4].

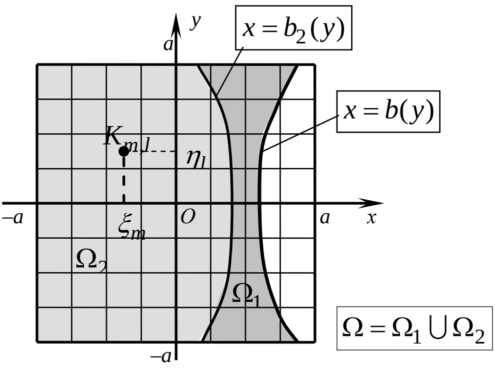


Рис. 8.12

Подамо функцію дотичних напружень $q(x, y)$ в області контакту у вигляді [1, 3, 4]

$$q(x, y) = \begin{cases} \mu p(x, y) - q^*(x, y), & (x, y) \in \Omega_2; \\ \mu p(x, y), & (x, y) \in \Omega_1. \end{cases} \tag{8.27}$$

З урахуванням (8.25), а також того факту, що при $(x, y) \in \Omega_2$ проковзування дорівнює нулю, функція $q^*(x, y)$ задовольнятиме інтегральне рівняння

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint_{\Omega_2} \frac{q^*(x', y')}{r}\, dx'dy' = \delta_x + \mu\big(\delta - \gamma x - Bp(x, y)\big)\,. \tag{8.28}$$

Загалом, область зчеплення має форму

$$\Omega_2 = \{-a \le y \le a; -a \le x \le b_2(y)\}\,.$$

За повного контакту вона може збігатися з площадкою контакту, тоді $b_2(y) \equiv a$, у загальному випадку $-a \le b_2(y) \le b(y) \le a$, якщо $y \in [-a, a]$. Для визначення функції $b_2(y)$ використовуємо граничну умову

$$q^*(b_2(y), y) = 0 .$$

Контактний тиск $p(x, y)$ і дотичне напруження $q(x, y)$ задовольняють такі рівняння рівноваги штампа:

$$Q = \iint_{\Omega} p(x', y')\, dx'dy' ; \tag{8.29}$$

$$T = \iint_{\Omega} q(x', y')\, dx'dy' ; \tag{8.30}$$

$$M_y + |T| D = 0 , \quad M_y = \iint_{\Omega} x' p(x', y')\, dx'dy' . \tag{8.31}$$

Із умов (8.29), (8.30) і подання (8.27) отримаємо рівняння

$$\mu Q - T = \iint_{\Omega_2} q^*(x', y')\, dx'dy' . \tag{8.32}$$

8.3.2. Метод розв’язання

Спочатку розглянемо *контактний тиск*. Введемо ті самі безрозмірні величини, що і в підрозділі 8.1. Позначимо $\beta^* = \sqrt{2}$. Рівняння (8.25) перепишемо в операторному вигляді:

$$\frac{B_1}{2\pi\beta^*} p_1(x, y) + \left(L^* p_1\right)(x, y) = \frac{\delta_1}{2\pi\beta^*} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta^* a} , \tag{8.33}$$

де $\left(L^* p_1\right)(x, y) = \frac{1}{2\pi\beta^* a} \iint_{\Omega} \frac{p_1(x', y')}{r}\, dx'dy'$ – оператор, що переводить простір $C(V)$ неперервних на квадраті функцій в себе. Аналогічно як і в п. 8.1.2, оцінимо норму цього оператора: $\left\| L^* \right\| \le 1$. Перепишемо рівняння (8.33) у формі

$$p_1(x, y) = -\frac{2\pi\beta^*}{B_1} \left(L^* p_1\right)(x, y) + \frac{\delta_1}{B_1} - \frac{\gamma x}{B_1 a} . \tag{8.34}$$

Тоді, згідно з принципом стискальних відображень [8], до рівняння (8.34) можна застосовувати метод послідовних наближень, якщо

$$B_1 > 2\pi\beta^* . \tag{8.35}$$

Тепер розглянемо випадок, коли коефіцієнти B_1 малі: $0 < B_1 < 2\pi\beta^*$. Введемо параметр $\alpha^* = 1 - B_1 \big/ \left(2\pi\beta^*\right)$. Аналогічно, як і в п. 8.1.2, отримаємо, що оператор $\alpha^* I - L^*$ на класі невід’ємних неперервних на квадраті V функцій стискальний. Тому, якщо переписати рівняння (8.33) у формі

$$p_1(x,y) = \alpha\, p_1(x,y) - \left(L^* p_1\right)(x,y) + \frac{\delta_1}{2\pi\beta^*} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta^* a}, \qquad (8.36)$$

то до останнього можна застосовувати метод ітерацій.

Для розв’язання рівнянь (8.34) і (8.36) застосовуватимемо метод механічних квадратур. Розбиття площадки контакту схематично зображено на рис. 8.12. У тих же позначеннях, що і вище, інтеграл $\left[L^* f\right](x,y)$ наближено замінимо інтегральною сумою:

$$\left[\overline{L}^* f\right](x,y) = \frac{1}{2\beta^* \pi a} \sum_{\substack{m,l:\,(x,y)\notin K_{m,l};\\ (\xi_m,\eta_l)\in\Omega}} \frac{f(\xi_m,\eta_l)\,\mu K_{m,l}}{\sqrt{(\xi_m - x)^2 + (\eta_l - y)^2}}.$$

У даному випадку тензор четвертого порядку $A^* = \left[a^*_{i,j,m,l}\right]_{i,j,m,l}$ утворюється із елементів

$$a^*_{i,j,m,l} = \begin{cases} \dfrac{\Delta}{2\beta^*\pi a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(\xi_m-\xi_i)^2+(\eta_l-\eta_j)^2}} & \text{при } m\neq i,\, l\neq j; \\ 0 \ - \ \text{у супротивному випадку.} \end{cases}$$

Якщо позначити $Y^* = \dfrac{\overline{\delta}_1}{2\pi\beta^*}\left[\theta(\xi_i,\eta_j)\right]_{i,j} - \dfrac{\overline{\gamma}}{2\pi\beta^* a}\left[\xi_i\cdot\theta(\xi_i,\eta_j)\right]_{i,j}$, то матричні рівняння для визначення числових розв’язків (8.34) набудуть вигляду

$$X = -\frac{2\pi\beta^*}{B_1} A^*\cdot X + \frac{2\pi\beta^*}{B_1} Y^*,$$

а для (8.36) –

$$X = \alpha X - A^*\cdot X + Y^*.$$

Форма запису для інших контактних характеристик така ж, як співвідношень (8.17)–(8.21), з тією відмінністю, що у відповідних місцях потребує підставлення величин, позначених як «*».

Тепер розглянемо *дотичні контактні напруження*. Нехай $\delta_2 = \mu\delta_1 + \delta_x/a$, $q_1^*(x,y) = c\cdot q(x,y)$, $T_1 = Tc$. Тоді інтегральне рівняння (8.28) набуде вигляду

$$\frac{1}{2\pi\beta^* a}\iint_{\Omega_2} \frac{q_1^*(x',y')}{r}\,dx'dy' = \frac{1}{2\pi\beta^*}\left[\delta_2 - \mu\gamma\frac{x}{a} - \mu B_1 p_1(x,y)\right].$$

Для отримання наближеного розв’язку $\overline{q}_1^*(x,y)$ рівняння першого роду застосуємо метод регуляризації: введемо малий параметр $h \ll 1$ і, враховуючи граничну умову і рівняння рівноваги (8.32), приходимо до системи

$$h\overline{q}_1^*(x,y)+\left(L^*\overline{q}_1^*\right)(x,y)=\frac{1}{2\pi\beta^*}\left[\delta_2-\mu\gamma\frac{x}{a}-\mu B_1 p_1(x,y)\right]; \qquad (8.37)$$

$$\iint_{\Omega_2}\frac{\overline{q}_1^*(x',y')}{r(b_2(y),x',y,y')}\,dx'dy'=\delta_2-\frac{\mu\gamma}{a}b_2(y)-\mu B_1 p_1(b_2(y),y); \qquad (8.38)$$

$$\mu Q_1-T_1=\iint_{\Omega_2}\overline{q}_1^*(x',y')\,dx'dy'. \qquad (8.39)$$

Аналогічно, як і за контактного тиску, отримуємо: при $h\in\left(0,2\pi\beta^*\right)$ (зокрема, для $h<<1$) існує єдиний розв’язок рівняння (8.37), який можна знайти методом послідовних наближень.

Для розв’язання рівняння (8.37) придатний метод механічних квадратур (відповідне розбиття див. на рис. 8.12), для чого вводимо функцію $\overline{q}_2^*\left(x,y\right)=\overline{q}_1^*\left(x,y\right)\theta(x,y)$, матриці $X^{**}=\left[\overline{\overline{q}}_2^*\left(\xi_i,\eta_j\right)\right]_{i,j}$ і

$$Y=\frac{\overline{\delta}_2}{2\pi\beta^*}\left[\theta\left(\xi_i,\eta_j\right)\right]_{i,j}-\frac{\mu\overline{\gamma}}{2\pi\beta^* a}\left[\xi_i\cdot\theta\left(\xi_i,\eta_j\right)\right]_{i,j}-\frac{\mu B_1}{2\pi\beta^*}\left[\overline{p}_2\left(\xi_i,\eta_j\right)\right]_{i,j}.$$

Тоді числовий розв’язок рівняння (8.37) отримаємо із матричного рівняння

$$X=\varepsilon X-A^*\cdot X+Y^*,\quad \varepsilon=1-h\Big/\left(2\pi\beta^*\right).$$

Із (8.38) і (8.39) знайдемо:

$$\overline{\delta}_2=\frac{2\pi\beta^*}{S}\left[\mu Q_1-T_1-\varepsilon t_4+t_5+\frac{\mu}{2\pi\beta^* a}\overline{\gamma}S_1+\frac{\mu}{2\pi\beta^*}B_1Q_1\right];$$

$$t_4=\sum_{m,l:\left(\xi_m,\eta_l\right)\in\Omega}\overline{\overline{q}}_2^*\left(\xi_m,\eta_l\right)\Delta,\quad t_5=\sum_{m,l:\left(\xi_m,\eta_l\right)\in\Omega}\left(\overline{L}\overline{\overline{q}}_2^*\right)\left(\xi_m,\eta_l\right)\Delta;$$

$$\overline{b}_2(\eta_j)=\frac{1}{\mu\overline{\gamma}}\left[\overline{\delta}_2 a-\mu B_1 a\overline{p}_2\left(\xi_{i_0},\eta_j\right)-2\pi\beta^* a\left(\overline{L}\overline{p}_2\right)\left(\overline{b}_2(\eta_j),\eta_j\right)\right],$$

де $0\le\xi_{i_0}-\overline{b}_2(\eta_j)\le 2a/n$, $j=1,2,...n$.

При $n=40$ за повного контакту похибка обчислень становить близько 2%, а за неповного контакту – 4%.

8.3.3. Аналіз числових результатів

Розрахунки виконували для $a=1$ см, $Q_1=8,625\cdot10^{-3}$ см^2, $T_1=0,1Q_1$, $\mu=0,2$.

На рис. 8.13 наведено графіки для функцій контактного тиску (рис. 8.13 *а*) і дотичних напружень (рис. 8.13 *б*) при $B_1=2$, $d=5$ см.

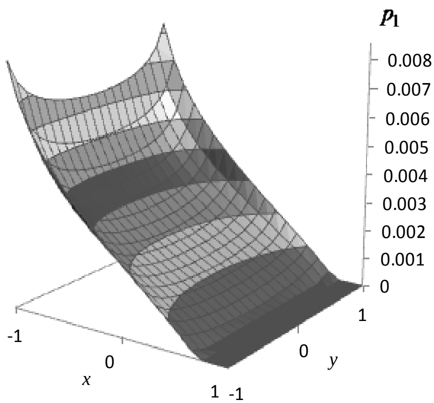
Числовий експеримент засвідчив аналогічний, як і в п. 8.1.3, вплив на функцію тиску коефіцієнта шорсткості B_1 і відстані d від лінії прикладання дотичної сили до поверхні півпростору. Це саме стосується дотичних напружень.

На рис. 8.14 зображені графіки залежностей осідання штампа δ_1 (лінія *1*) і тангенса γ кута його нахилу (лінія *2*) від відстані d прикладання горизонтальної сили, а на рис. 8.15 – від коефіцієнта шорсткості B_1 (*1* – δ_1, *2* – γ).

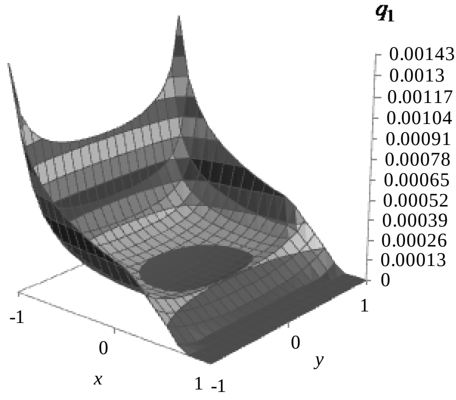
Зі збільшенням відстані d зростає γ і зменшується δ_1 (рис.8.14). Для $B_1 = 3$ при $d > d_1 \approx 2{,}8$ см маємо неповний контакт, при $d \in [0, d_1]$ – повний. При $d > d_2 \approx 7{,}5$ см центр підошви штампа піднімається над півпростором, а його осідання стає від'ємним, тобто $\delta_1 < 0$.

Зі збільшенням B_1 зростає як значення γ, так і δ_1 (рис. 8.15).

На рис. 8.16 наведено графіки функцій $x = b(y)$ (штрихові лінії) і $x = b_2(y)$ (суцільні): на рис. 8.16 *а* – за фіксованого $B_1 = 3$ і різних d (*1* – 1 см, *2* – 4, *3* – 5, *4* – 7 см); на рис. 8.16 *б* – при фіксованому $d = 4$ см і різних B_1 (*1* – 0.5, *2* – 1, *3* – 2, *4* – 10). З рис. 8.16 можна зробити висновки щодо форм як областей зчеплення Ω_1 та проковзування Ω_2, так і всієї площадки контакту Ω ($\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$). Область Ω_1 обмежена зверху кривою $x = b_2(y)$, а область Ω_2 – зверху кривою $x = b(y)$, а знизу – $x = b_2(y)$.



а)



б)

Рис. 8.13

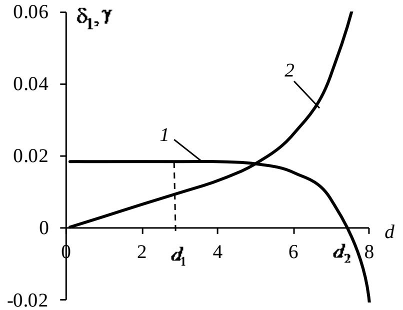


Рис. 8.14

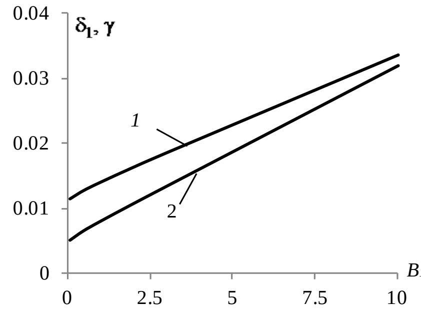
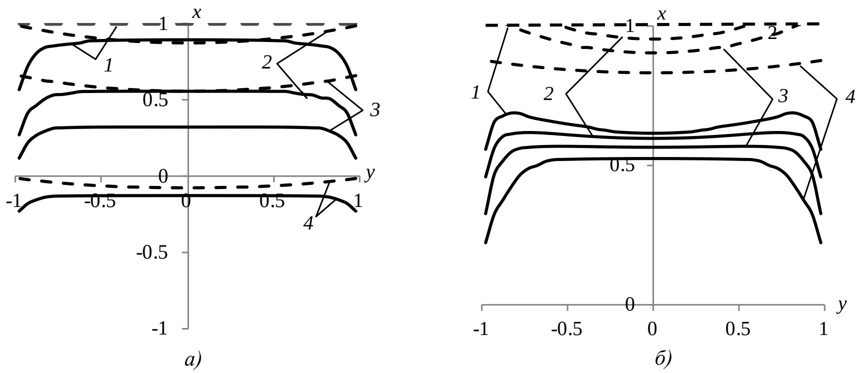


Рис. 8.15

З рис. 8.16 *а* випливає, що зона проковзування з'являється ще за повного контакту, наприклад, якщо $B_1 = 3$ для $d = 1\,\text{см}$. За неповного з ростом відстані d праві межі площадки контакту $x = b(y)$ і області зчеплення $x = b_2(y)$ переміщаються в бік їх лівої межі, що призводить до зменшення площадки контакту і зони зчеплення. При цьому відстань між лініями $x = b_2(y)$ і $x = b(y)$ скорочується, що означає зменшення розміру зони проковзування.



а) *б)*

Рис. 8.16

З рис. 8.16 *б* випливає, що зі збільшенням коефіцієнта шорсткості B_1 зменшуються розміри площадки контакту і зони зчеплення. Окрім того виявлено, що зростання цього коефіцієнта сприяє стабілізації форм площадки контакту, зон зчеплення і проковзування.

Розрахунки засвідчили, що зі зменшенням коефіцієнта тертя μ (за інших рівних вихідних даних) розмір площадки контакту, функція контактного тиску, осідання і кут повороту штампа залишаються незмінними, а водночас область зчеплення збільшується, а проковзування – зменшується, причому

найбільше дотичне напруження (в точках лівої межі площадки контакту) зменшується.

У результаті числового експерименту встановили, що зі зменшенням тангенціальної сили T_1 збільшується осідання штампа, зменшується кут його нахилу, зростають розміри площадки контакту і зони зчеплення і зменшуються зони проковзування. При цьому максимальний тиск і дотичні контактні напруження знижуються.

Зазначимо, що розглянутий підхід до розв'язання через комбінацію методу механічних квадратур та ітераційного методу застосовано в праці [6] для штампа у формі еліптичного параболоїда.

Результати, наведені в розділі, можна застосувати у розрахунках інженерних споруд на контактну міцність та передбачити зони можливих руйнувань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 302 с.
2. *Гоменюк С.И., Дьяченко Н.Н., Шашкова Е.В., Шашков К.В.* Решение контактной задачи о штампе в плане, имеющем форму квадратного кольца // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 54–62.
3. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
4. *Джонсон К.М.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
5. *Дьяченко Н.Н., Манько Н.И.-В., Шашкова Е.В.* Задача контакта квадратного в плане штампа с шероховатым полупространством в условиях частичного проскальзывания // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 159–168.
6. *Дьяченко Н.Н., Шашкова Е.В.* Контакт параболоидного штампа с упругим шероховатым полупространством в условиях частичного проскальзывания // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2010. – №2. – С. 29–37.
7. *Дьяченко Н.Н., Шашкова Е.В.* Решение задачи о скольжении штампа с трением по границе шероховатого полупространства с линейным законом деформирования шероховатости // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2006. – №1. – С. 25–33.
8. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1976. – 304 с.
9. *Мартиняк Р.М., Приходько О.В.* Задача про вдавлювання близького до плоского штампу в пружний шорсткий півпростір // Проблеми

обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – Вип. 31. – С. 66–77.

10. *Шашкова Є.В., Д'яченко Н.М.* Ковзання з тертям квадратного у плані штампа по межі пружного шорсткого півпростору // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи: Матеріали відкритої наук.-техн. конф. молодих науковців і спеціалістів Фіз.-мех. ін-ту ім. Г.В. Карпенка НАН України. «КНМ – 2005». – Львів, 2005.– С. 294–297.
11. *Шашкова Е.В., Дьяченко Н.Н.* Численное решение контактной задачи о плоском квадратном штампе, вдавливаемом в шероховатое полупространство // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. – 2004. – Вып. 4. – С. 255–261.
12. *Шишканова А.А.* О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95–102.
13. *Aleksandrov A.I.* A Method for the Solution of a Three-Dimensional Contact Problem of Interaction of Two Elastic Bodies in the Presence of Friction // J. of Mathematical Sci. – 2015. – **205**, No. 7. – P. 518–534.
14. *Aleksandrov V.M, Pozharskii D.A.* Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account // J. of Appl. Mathematics and Mech. – 2004. – **68**, No 3. – P. 463–472.
15. *Brdzoza A., Pauk V.* Axially symmetric contact involving friction and boundary roughness // J. of Theoretical and Appl. Mech. – 2007. – **45**, No. 2. – P. 277–288.
16. *Goodman L.E.* Contact stress analysis of normally loaded rough spheres // ASME J. Appl. Mech. – 1962. – **29**. – P. 515-522.
17. *Goryacheva I.G., Martynyak R.M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // Proc. IMechE, Part J: J. Eng. Tribology. – 2014. – **228**, No. 7. – P. 707–716.
18. *Paggi M., Bemporad A., Reinoso J.* Computational Methods for Contact Problems with Roughness // CISM Int. Centre for Mech. Sci. – 2019. – **593**. – P. 131–178.
19. *Shashkova Ye., Dyachenko N., Shashkov K.* The solution of a contact problem of square punch with rough half-space at the sedate law of deformation of a roughness // Mechanika-2005. Proc. of the Int. Sci. Conf. – 2005. – P. 95–102.
20. *Streliaiev Y., Titova O.* Indentation of a Circular Cylindrical Punch with a Curved Base into an Elastic Half-Space in the Presence of Coulomb Friction // Mechanika-2019. Proc. of the 24th Int. Sci. Conf. – 2019. – P. 136–140.
21. *Zhou Y.-T., Lee K.Y., Jang Y.H.* Explicit solution of the frictional contact problem of anisotropic materials indented by a moving stamp with a triangular or parabolic profile // Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik. – 2012. – **64**, No. 3. – P. 831–861.

РОЗДІЛ 9

НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ В ТРАНСТРОПНИХ ТІЛАХ ІЗ ЗАЛІКОВАНИМИ ТРІЩИНАМИ

В.П. Силованюк

Побудові математичних моделей для визначення гранично-рівноважного стану твердих деформівних тіл із залікованими тріщинами (тонкими включеннями) присвячено чимало досліджень [1-3, 5-13]. Загальний підхід до розв'язання цієї проблеми полягає в тому, що включення умовно вилучають із тіла, і окремо розглядають задачі про рівновагу включення і тіла з порожниною, що утворилася на місці неоднорідності. До поверхні порожнини прикладені напруження, взагалі кажучи, невідомі. Для визначення цих напружень будують умови взаємодії тонкого включення із зовнішнім середовищем.

У розділі побудовано модель деформування та руйнування трансверсально-ізотропних (транстропних) тіл, що містять заліковані ін'єктуванням тріщини. В основу моделі покладені умови взаємодії матеріалу заповнювача із основним матеріалом, що враховують фізичну нелінійність деформування ін'єкційних матеріалів. В результаті проблема зведена до розв'язування системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь відносно переміщень поверхонь тріщини. Отримані замкнуті аналітичні розв'язки рівнянь для залікованих тріщин нормального відриву. Аналіз отриманих результатів показує, що врахування деформації ін'єкційного матеріалу за межами лінійної пружності вносить суттєві корективи в розрахунки залишкової міцності тіл із залікованими дефектами. Розбіжність результатів стає особливо значною у випадках тріщини малих розмірів та зростанні жорсткості наповнювача. Неврахування нелінійності в деформуванні тонких прошарків ін'єкційного матеріалу веде до завищених оцінок залишкової міцності відновлених елементів конструкцій.

9.1. Основні співвідношення теорії пружності транстропного тіла

За відсутності об'ємних сил розв'язок задач лінійної теорії пружності трансверсально-ізотропного (транстропного) тіла зводиться до знаходження компонент вектора переміщення u_x, u_y, u_z з рівнянь рівноваги

$$A_{11}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+A_{44}\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\cdot\frac{\partial u_y}{\partial y}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=0,$$

$$\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u_y}{\partial x}+A_{11}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y}+A_{44}\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\cdot\frac{\partial u_x}{\partial x}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]=0,$$

$$A_{44}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u_z+A_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=0 \quad (9.1)$$

та крайових умов у вигляді заданих переміщень і напружень.

Тут $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{33}, A_{44}$ – модулі пружності транстропного тіла; x, y, z – система декартових координат.

У працях [15, 16] показано, що співвідношення

$$u_x=\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1+\phi_2)-\frac{\partial\phi_3}{\partial y},$$

$$u_y=\frac{\partial}{\partial y}(\phi_1+\phi_2)+\frac{\partial\phi_3}{\partial x},$$

$$u_z=\frac{\partial}{\partial z}(m_1\phi_1+m_2\phi_2) \quad (9.2)$$

будуть розв’язком рівнянь рівноваги (9.1) за умови, що функції ϕ_j $(j=1,2,3)$ задовольняють рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu_j\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_j=0. \quad (9.3)$$

Тут

$$m_i=\frac{A_{11}\nu_i-A_{44}}{A_{13}+A_{44}}=\frac{(A_{13}+A_{44})\nu_i}{A_{33}-A_{44}\nu_i}, \qquad i=1,2;$$

ν_i є коренями рівняння

$$A_{11}A_{44}\nu^2+\left[A_{13}(A_{13}+2A_{44})-A_{11}A_{33}\right]\nu+A_{33}A_{44}=0, \quad (9.4)$$

а $\nu_3=\dfrac{2A_{44}}{A_{11}-A_{12}}$.

Компоненти тензора напружень виражаються через переміщення такими формулами:

$$\sigma_{xx} = A_{11}\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{yy} = A_{12}\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11}\frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{zz} = A_{13}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + A_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{yz} = A_{44}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right),$$

$$\sigma_{zx} = A_{44}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{A_{11} - A_{12}}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right). \qquad (9.5)$$

На основі співвідношень (9.2), (9.5) можуть бути отримані компоненти тензора напружень у площині $z = \mathrm{const}$, виражені через функції ϕ_j:

$$\sigma_{zz} = A_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(1+m_1)\nu_1 n_1\phi_1 + (1+m_2)\nu_2 n_2\phi_2\right],$$

$$\sigma_{yz} = A_{44}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial y}[(1+m_1)\phi_1 + (1+m_2)\phi_2] + \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\right\},$$

$$\sigma_{xz} = A_{44}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[(1+m_1)\phi_1 + (1+m_2)\phi_2] - \frac{\partial\phi_3}{\partial y}\right\}. \qquad (9.6)$$

Отже, розв'язування задач теорії пружності транстропного тіла зводиться до визначення функцій φ_j, гармонічних у різних системах координат, виходячи з крайових умов та умов симетрії.

9.2. Задача про поверхню розриву переміщень і напружень в транстропному тілі

Розглянемо однорідне транстропне необмежене тіло. Припускаємо, що в площині ізотропії такого тіла міститься поверхня розриву переміщень і напружень S (рис. 9.1). Віднесемо тіло до декартової системи координат *x*, *y*, *z*, розмістивши початок координат в якійсь точці області S, а площину $z = 0$ сумістимо з площиною ізотропії. Крайові умови задачі мають такий вигляд:

$$\left[u_j\right]\Big|_S = g_j,$$
$$\left[\sigma_{3j}\right]\Big|_S = f_j, \quad j = 1,2,3. \tag{9.7}$$

Тут g_j, f_j – задані стрибки переміщень і напружень; $\left[u\right] = u\left(x, y, +0\right) - u\left(x, y, -0\right)$.

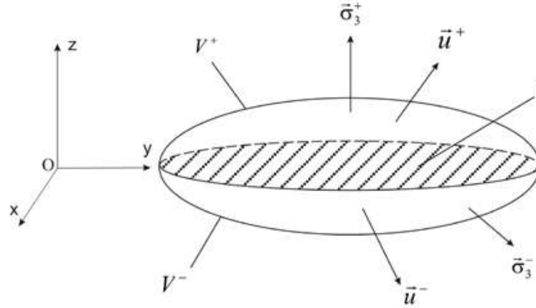


Рис. 9.1

Функції φ_j із розв'язку (9.2) подамо у вигляді інтегрального розкладу Фур'є:

$$\phi_j^{\pm} = \int\int_{-\infty}^{\infty} A_j^{\pm}(\xi_1, \xi_2)\exp\left[-z_j\sqrt{\xi_1 + \xi_2} + i(x\xi_1 + y\xi_2)\right] \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \tag{9.8}$$

де $A_j^{\pm}$ – функції, що підлягають визначенню.

Приєднавши до умов розриву переміщень і напружень (9.7) на області S очевидні умови їх неперервності поза областю S (область $\overline{\text{S}}$)

$$[u_j]\Big|_{\overline{S}} = 0, \; [\sigma_{3j}]\Big|_{\overline{S}} = 0, \tag{9.9}$$

на основі співвідношень (9.8), (9.9) та оберненого перетворення Фур'є після нескладних обчислень виразимо функції $A_j^{\pm}$ через стрибки переміщень і напружень:

$$A_j^{\pm} = \frac{\left(1 + m_k\right)\left(-1\right)^j}{2\left(m_2 - m_1\right)}\left\{ \pm i\xi_1 F(g_1) \pm i\xi_2 F(g_2) + \sqrt{\nu_j\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)}\; F\left(g_3\right) - \right.$$
$$- \frac{m_k\sqrt{\nu_j}}{A_{44}\left(1 + m_k\right)}\left[\frac{i\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} F\left(f_1\right) + \frac{i\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}} F\left(f_2\right)\right] \pm$$

$$\left.\pm\frac{1}{\left(1+m_k\right)A_{44}}F\left(f_3\right)\right\}, \quad j=1,2,$$

$$A_3^{\pm}=\pm\frac{1}{2}\left\{i\xi_2F(g_1)-i\xi_1F(g_2)\mp\frac{\sqrt{\nu_3}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}\left[i\xi_2F\left(f_1\right)-i\xi_1F\left(f_2\right)\right]\right\},$$

$$k=1, \quad j=2; \quad k=2, \quad j=1. \tag{9.10}$$

Тут $F\left(g\right)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_S g\left(x,y\right)exp\left[-i\left(x\xi_1+y\xi_2\right)\right]dxdy$.

Знаки “+” і “–” вгорі означають, що величини відносяться до півпросторів $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$ відповідно. Відмітимо, що величини m_i (i = 1, 2) визначаються співвідношеннями (9.3).

Використавши формули (9.10), запишемо вирази для функцій φ_1, φ_2, φ_3:

$$\phi_j^{\pm}=\frac{(1+m_k)(-1)^j}{8\pi^2}\times\iint\limits_{\Omega}\left\{\pm K_1(x'-x,y'-y,z_j)\times\right.$$

$$\times\frac{(x'-x)g_1+(y'-y)g_2}{(1+m_2)l_2-(1+m_1)l_1}+K(x'-x,y'-y,z_j)\frac{\sqrt{\nu_j}\,g_3}{m_2-m_1}-$$

$$-K_2(x'-x,y'-y,z_j)\frac{m_k\sqrt{\nu_j}[(x'-x)f_1+(y'-y)f_2]}{C_{44}(1+m_k)(m_2-m_1)}\mp$$

$$\left.\mp K^*(x'-x,y'-y,z_j)\frac{(-1)^j f_3}{C_{44}(1+m_k)[l_2(1+m_2)-l_1(1+m_1)]}\right\}dx'dy',$$

$$\phi_3^{\pm}=\pm\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{\Omega}\left\{K_1(x'-x,y'-y,z_3)\times[(y'-y)g_1-(x'-x)g_2]\pm\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\nu_3}K_2(x'-x,y'-y,z_3)[(y'-y)f_1-(x'-x)f_2]\right\}dx'dy',$$

$$j=1,2; \quad k=1, \quad j=2; \quad k=2, \quad j=1. \tag{9.11}$$

В отриманих співвідношеннях функції K, K_1, K_2, K^* задаються виразами

$$K(x,y,z)=\frac{2\pi}{\sqrt{z^2+x^2+y^2}},$$

$$K_1(x,y,z)=\frac{2\pi}{\sqrt{z^2+x^2+y^2}\left(|z|+\sqrt{z^2+x^2+y^2}\right)},$$

$$K_2(x,y,z)=\frac{2\pi}{\left(\ |z|+\sqrt{z^2+x^2+y^2}\right)},$$

$$K^*(x,y,z)=2\pi\int_0^\infty\frac{e^{-|z|t}}{t}J_0\left(\ t\sqrt{x^2+y^2}\ \right)dt\,. \qquad (9.12)$$

Співвідношення (9.11) разом із формулами (9.2), (9.5) дають розв’язок задачі про плоску область розриву переміщень і напружень у трансверсально-ізотропному тілі. Зокрема, переміщення у будь-якій точці тіла

$$u_j=\frac{1}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\iint_S\left\{\frac{(x'-x)g_1+(y'-y)g_2}{m_2-m_1}\times\right.$$

$$\times\left[-\operatorname{sign}z_1(1+m_2)K_1(x'-x,y'-y,z_2)+\operatorname{sign}z_2(1+m_2)K_1(x'-x,y'-y,z_2)\right]+$$

$$+\frac{g_3}{m_2-m_1}\left[-\sqrt{\nu_1}(1+m_2)K(x'-x,y'-y,z_2)+\sqrt{\nu_2}(1+m_1)K(x'-x,y'-y,z_2)\right]-$$

$$-\frac{(x'-x)f_1+(y'-y)f_2}{A_{44}(m_2-m_1)}\left[-m_2\sqrt{\nu_1}K_2(x'-x,y'-y,z_1)+m_1\sqrt{\nu_2}K_2(x'-x,y'-y,z_2)\right]-$$

$$-\frac{f_3}{A_{44}(m_2-m_1)}\left[\operatorname{sign}\ z_1m_2\sqrt{n_1}K^*(x'-x,y'-y,z_1)+\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{sign}\ z_2m_1\sqrt{\nu_2}K^*(x'-x,y'-y,z_2)\right]\ \right\}dx'dy'+$$

$$+\frac{(-1)^j\,sign\,z_3}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial x_k}\iint_S\left\{\left[(x_2'-x_2)g_1-(x_1'-x_1)g_2\right]K_1(x'-x,y'-y,z_3)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sign}\ z_3\sqrt{\nu_3}\left[(y'-y)f_1-(x'-x)f_2\right]K_2\left(x'-x,y'-y,z_3\right)\right\}dx'dy',$$

$$u_z=\frac{1}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\frac{m_j(1+m_k)(-1)^j}{\sqrt{\nu_j}}\frac{\partial}{\partial z_j}\times$$

$$\times\iint_S\left\{\frac{sign\,z_j\left[(x'-x)g_1+(y'-y)g_2\right]}{m_2-m_1}K_1(x'-x,y'-y,z_j)+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{\nu_j}\,g_3}{m_2-m_1}K_1(x'-x,y'-y,z_j)-$$

$$-\frac{m_k\sqrt{\nu_j}\,[(x'-x)\,f_1+(y'-y)\,f_2]}{A_{44}(1+m_k)\,(m_2-m_1)}\,K_2\left(x'-x,y'-y,z_j\right)+$$

$$\left.+\frac{\mathrm{sign}\;z_j\sqrt{\nu_j}\,f_3}{A_{44}\left(1+m_k\right)m_2-m_1}\,K^*(x'-x,y'-y,z_j)\right\}-dx'\,dy',$$

$$j=1,\,2;\quad k=1,\quad j=2;\quad k=2,\quad j=1. \tag{9.13}$$

Напруження у трансверсально-ізотропному тілі з областю розриву S переміщень і напружень на основі співвідношень (9.5), (9.11) набувають вигляду

$$\sigma_{3j}=\frac{A_{44}}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\frac{(1+m_i)(1+m_k)(-1)^i}{\sqrt{\nu_i}}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial z_i}\times$$

$$\times\iint_S\left\{\frac{sign\,z_i\left[(x'-x)g_1+(y'-y)g_2\right]}{m_2-m_1}K_1(x'-x,y'-y,z_j)+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{\nu_i}\,g_3}{m_2-m_1}K(x'-x,y'-y,z_j)-$$

$$-\frac{m_k\sqrt{\nu_i}\,[(x'-x)\,f_1+(y'-y)\,f_2]}{A_{44}(1+m_k)(m_2-m_1)}K_2\left(x'-x,y'-y,z_i\right)-$$

$$\left.-\frac{\mathrm{signz}_i\left(-1\right)^i\,f_3}{A_{44}\left(1+m_k\right)m_2-m_1}K^*\left(x'-x,\;y'-y,\;z_j\right)\right\}dx'dy'-$$

$$-\frac{A_{44}sign\,z_3}{8\pi^2\sqrt{\nu_3}}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial z_3}\iint_S\left\{\left[\left(y'-y\right)g_1-\left(x'-x\right)g_2\right]K_1(x'-x,y'-y,z_3)+\right.$$

$$\left.+\mathrm{signz}_3\sqrt{\nu_3}\left[\left(y'-y\right)f_1-\left(x'-x\right)f_2\right]K_2\left(x'-x,y'-y,z_3\right)\right\}dx'dy',$$

$$\sigma_{33}=\frac{A_{44}}{8\pi^2}\sum_{j=1}^{2}(1+m_i)(1+m_k)(-1)^i\frac{\partial^2}{\partial z_i}\times$$

$$\times\left\{\frac{sign\,z\left[(x'-x)g+(y'-y)g\right]}{m-m}K(x'-x,y'-y,z)+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{\nu}\,g}{m-m}K(x'-x,y'-y,z)-$$

$$-\frac{m\sqrt{\nu}\,[(x'-x)f+(y'-y)f]}{A(1+m)(m-m)}K\left(x'-x,y'-y,z\right)-$$

$$\left.-\frac{\text{sign }z\left(-1\right)\,f}{A\left(1+m\right)m-m}K\left(x'-x,y'-y,z\right)\right\}dx'dy'\,,$$

$$j=1,2;\quad k=1,\quad i=2;\quad k=2,\quad i=1. \tag{9.14}$$

Із розв’язків (9.11)–(9.14) як часткові випадки можна одержати результати для ізотропного тіла. Для цього достатньо покласти

$$A_{12}=A_{13}=\lambda;\quad A_{11}=A_{33}=\lambda+2\mu;\quad A_{44}=\mu;\quad \nu_1=\nu_2=1\,. \tag{9.15}$$

Тут λ, μ – сталі Ламе ізотропного тіла, що зв’язані з технічними константами залежностями

$$\mu=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)},\quad \lambda=\frac{E\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}; \tag{9.16}$$

E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона. Співвідношення (9.11)–(9.14), окрім того, що є розв’язками крайової задачі, дозволяють побудувати інтегральні рівняння відносно стрибків переміщень або напружень для крайових задач, де ці величини є невідомими.

Якщо на протилежних поверхнях розрізу S задані напруження (у загальному випадку несамозрівноважені), то крайові умови

$$\sigma_{3j}^{\pm}\Big|_S=f_j^{\pm}\;,\quad j=1,2,3, \tag{9. 17}$$

визначають першу основну задачу. Знаки “+” і “–“ відносять величини до верхньої ($y_3 \geq 0$) та нижньої ($y_3 < 0$) частин поверхні Ω відповідно.

Інтегральні рівняння відносно невідомих стрибків переміщень $\left[u_j\right]$ на основі співвідношень (9.11), (9.13), (9.14), та крайових умов (9.17) будуть такі:

$$B_1\frac{\partial}{\partial y_j}\iint\limits_S\frac{[u_1](x-x_1)+[u_2](y-y_1)}{R^3}\,dx_1dy_1+$$

$$+\left(-1\right)^j B_2\frac{\partial}{\partial y_{3-i}}\iint\limits_S\frac{[u_1](y\;\;-y_1)+[u_2](x-x_1)}{R^3}\,dx_1dy_1=$$

$$=B_3\frac{\partial}{\partial y_j}\iint\limits_S\frac{f_3dx_1dy_1}{R}+2\pi f_j^*,\quad j=1,2;$$

$$B_4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_S\frac{[u_3]dx_1dy_1}{R}=$$

$$= B_5 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_S \frac{f_1(x - x_1) + f_2(y - y_1)}{R} \, dx_1 dy_1 + 2\pi f_3^*. \qquad (9.18)$$

Тут позначено

$$R = \sqrt{(y_1 - y_1')^2 + (y_2 - y_2')^2}; \quad f_j = f_j^+ - f_j^-; \quad f_j^* = f_j^+ + f_j^-;$$

$$B_1 = \frac{A_{44}(1 + m_1)(1 + m_2)}{(m_2 - m_1)\sqrt{\nu_1 \nu_2}},$$

$$B_2 = A_{44} / \sqrt{\nu_3},$$

$$B_3 = -\frac{1}{m_2 - m_1} \left(\frac{1 + m_1}{\sqrt{\nu_1}} - \frac{1 + m_2}{\sqrt{\nu_2}} \right),$$

$$B_4 = \frac{A_{44}(1 + m_1)(1 + m_2)\left(\sqrt{\nu_2} - \sqrt{\nu_1}\right)}{m_2 - m_1},$$

$$B_5 = \frac{m_2(1 + m_1)\sqrt{\nu_1} - m_2(1 + m_2)\sqrt{\nu_2}}{m_2 - m_1}. \qquad (9.19)$$

9.3. Нелінійна модель заповненої тріщини в транстропному тілі

Переважна більшість відомих в літературі досліджень з механіки руйнування проводиться в рамках лінійної теорії пружності та лінійної механіки руйнування для розрахунку міцності тіл з тріщинами [4, 10, 18]. Методи розв’язування лінійних задач достатньо добре розвинуті. Стосовно технології відновлення роботоздатності пошкоджених тріщинами елементів конструкцій в рамках лінійної теорії проведено комплекс досліджень [17]. В такому формулюванні виявлені основні чинники, що впливають на ефективність відновлення пошкоджених елементів споруд тривалої експлуатації, проаналізовані різні варіанти ін’єктування та розроблені рекомендації стосовно оптимізації даної технології.

Тут проведемо дослідження для встановлення меж застосовності лінійної теорії та умов, за яких необхідно враховувати нелінійні ефекти.

Які ж прояви нелінійності при навантаженні тіл із заповненими тріщинами?

Коли товщина ін’єкційного матеріалу в тріщині мала настільки, що співмірна з розкриттям тріщини під навантаженням, то деформація ін’єкційного матеріалу може бути великою. Теорія нескінченно малих

деформацій стосовно ін'єкційного матеріалу в таких випадках незастосовна. Таким чином, має місце геометрична нелінійність зв'язку деформацій і переміщень.

Деформація ін'єкційного матеріалу може вийти за межі дії закону Гука на діаграмі розтягу цього матеріалу. Найчастіше ін'єкційними матеріалами є полімери, діаграми розтягу яких є суттєво нелінійними (рис. 9.2). Таким чином, маємо справу з так званою, фізичною нелінійністю – нелінійністю зв'язку напружень з деформаціями. Дослідимо обидва види нелінійності.

Розглянемо транстропне необмежене тіло із заповненою ін'єкційним матеріалом тріщиною. Вважаємо, що після полімеризації (кристалізації) ін'єкційного матеріалу на межі розділу з основним матеріалом V реалізуються умови ідеального механічного контакту (неперервність переміщень).

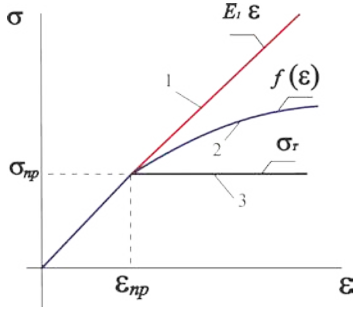


Рис. 9.2

Нехай до тіла прикладені зовнішні зусилля, які у випадку відсутності дефекту викликають тензор напружень $\widehat{\sigma}^0$, що відповідає полю пружних переміщень $\vec{u}^0$. Задача полягає у визначенні коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі «залікованої» тріщини.

Для розв'язку цієї задачі напруження в ін'єкційному матеріалі подамо у вигляді співвідношень

$$\vec{\sigma}_z^*\left\{\sigma_{xz}^*, \sigma_{yz}^*, \sigma_{zz}^*\right\} = \vec{\sigma}_z^*\left\{q\left(\left[u_x^*\right]/h\right), q\left(\left[u_y^*\right]/h\right), f\left(\left[u_z^*\right]/h\right)\right\}, \qquad (9.20)$$

які є, фактично, узагальненням лінійної моделі Вінклера на нелінійно пружні матеріали. Тут $\vec{u}^*$ – переміщення точок поверхні V; h – товщина ін'єкційного матеріалу після тверднення; q, f – функції, вид яких необхідно встановити на основі діаграм розтягу та зсуву матеріалу заповнювача тріщини. Квадратні дужки означають стрибок функції на поверхні V.

З урахуванням співвідношень (9.20) та принципу суперпозиції задача про напружено-деформований стан транстропного тіла із заповненою тріщиною може бути сформульована як наступна крайова задача:

$$\vec{\sigma}_{3j}^{\pm}\Big|_S = \vec{\sigma}_z^{*} - \vec{e}_3\hat{\sigma}^0, \tag{9.21}$$

де S – серединна область поверхні V.

На основі розглянутої раніше допоміжної задачі (9.7) для задачі (9.21) отримуємо систему інтегро-диференціальних рівнянь:

$$B_1\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{[u_1](x-x_1)+[u_2](y-y_1)}{R^3}dx_1dy_1 -$$
$$-B_2\frac{\partial}{\partial y}\iint_S \frac{[u_1](y-y_1)+[u_2](x-x_1)}{R^3}dx_1dy_1 =$$
$$=4\pi\left(q\left(\left[u_x+u_x^0\right]/h\right)-\sigma_{xz}^0\right),$$
$$B_1\frac{\partial}{\partial y}\iint_S \frac{[u_1](x-x_1)+[u_2](y-y_1)}{R^3}dx_1dy_1 +$$
$$+B_2\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{[u_1](y-y_1)+[u_2](x-x_1)}{R^3}dx_1dy_1 =$$
$$=4\pi\left(q\left(\left[u_y+u_y^0\right]/h\right)-\sigma_{yz}^0\right),$$
$$B_4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_S \frac{[u_3]dx_1dy_1}{R} = 4\pi\left(f\left(\left[u_z+u_z^0\right]/h\right)-\sigma_{zz}^0\right). \tag{9.22}$$

Після того, як розв’язок рівнянь отримано, коефіцієнти інтенсивності напружень можна розрахувати за відомими переміщеннями поверхні тріщини згідно з формулами [6]

$$K_I = B_4\lim_{n\to 0}\sqrt{-\frac{\pi}{2n}}\;u_3,$$
$$K_{II} = B_1\lim_{n\to 0}\sqrt{-\frac{\pi}{2n}}\;u_t,$$
$$K_{III} = B_2\lim_{n\to 0}\sqrt{-\frac{\pi}{2n}}\;u_n. \tag{9.23}$$

Тут u_t, u_n - переміщення точок поверхні тріщини в напрямах дотичної та нормалі до контуру тріщини.

9.4. Плоска деформація транстропного тіла із залікованою тріщиною

Розглянемо плоску деформацію транстропного тіла з тонким тріщиноподібним дефектом. Внаслідок застосування ін’єкційних технологій, тріщину заповнили ін’єкційним матеріалом. Вважаємо, що матеріали матриці і

наповнювача ідеально контактують, тобто на поверхні розділу матеріалів V виконуються умови неперервності переміщень і напружень. Введемо декартову систему координат x, y так, як зображено на рис.9.3. На нескінченності тіло розтягують у напрямку осі y зусиллями інтенсивності p.

Нехай діаграма розтягу матеріалу заповнювача нелінійна і така, як зображено на рис.9.2 (крива 2). Аналітично криву залежності напружень σ_y від деформацій описує співвідношення $\sigma_y = f(\varepsilon_y)$.

Осьову деформацію матеріалу заповнювача ε_y можна описати співвідношенням

$$\varepsilon_y = \left[u^*(x)\right] / h(x), \tag{9.24}$$

де $u^*(x)$ – переміщення точок поверхні V по осі y; квадратні дужки означають стрибок функції за переходу через поверхню V.

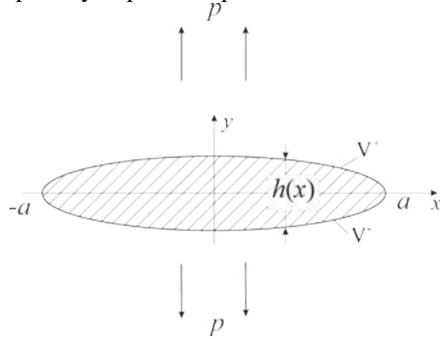


Рис. 9.3

Уявно видалимо із тіла ін’єкційний матеріал, замінивши його дію розподіленими по поверхні порожнини V напруженнями

$$\sigma_y = f\left(\left[u^*(x)\right] h^{-1}(x)\right), \qquad \sigma_{xy} = 0 .$$

Розіб’ємо задачу про розтяг-стиск тіла з порожниною V на дві: задачу про розтяг однорідного (без порожнини) тіла і задачу для тіла із розрізом вздовж відрізка $[-a, a]$, до берегів якого прикладені зусилля

$$\sigma_y = f\left(\left[u^*(x)\right] h^{-1}(x)\right) - p, \qquad \sigma_{xy} = 0 . \tag{9.25}$$

Внаслідок сплющеності поверхні V, крайові умови знесли з поверхні на розріз $[-a, a]$. Розв’язок першої задачі є тривіальним і відомим. Крайову задачу для розрізу із умовами (9.25) на основі системи рівнянь (9.22) зводимо до розв’язування нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{B_4}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{u'(t)}{t-x}dt - f\left(\frac{p}{A_{33}}+\frac{2u(x)}{h(x)}\right)-p=0, \tag{9.26}$$

де $u(x)=u^*(x)-u_0(x)$; $u_0(x)=\dfrac{ph(x)}{2A_{33}}$ – переміщення точок поверхні V^+ в однорідному тілі під дією зовнішніх зусиль.

Якщо поверхню V вважати тонким еліптичним циліндром з півосями a і b ($a >> b$) то розв'язок рівняння (9.26) можна отримати у вигляді

$$u(x)=A\sqrt{a^2-x^2}\,, \tag{9.27}$$

де A – стала, яку визначаємо із трансцендентного рівняння

$$2f\left(\frac{p}{A_{33}}+A\beta\right)+AB_4-2\;\;p=0\,,\qquad \beta=a/b\qquad. \tag{9.28}$$

Рівняння (9.28) отримуємо, підставивши подання (9.27) у вираз (9.25) та виконавши відповідні обчислення.

Матеріал заповнювача згідно зі співвідношенням (9.24) зазнає деформації

$$\varepsilon_y=\frac{p}{A_{33}}+A\beta\,. \tag{9.29}$$

Напруження у ньому обчислюємо на основі співвідношень (9.24), (9.29):

$$\sigma_y=f\left(\frac{p}{A_{33}}+A\beta\right). \tag{9.30}$$

Коефіцієнт інтенсивності напружень K_{I} розраховуємо за першою з формул (9.25)

$$K_1=B_4A\sqrt{\pi l}\,. \tag{9.31}$$

Випадок лінійної моделі отримуємо, якщо покласти $f\left(\varepsilon_y\right)=E_1\varepsilon_y$. Тоді, очевидно,

$$A=\frac{2p\left(1-E_1/A_{33}\right)}{B_4+2E_1\beta}\,,$$

деформація матеріалу наповнювача

$$\varepsilon_y = p\left(A_{33}^{-1} + \frac{2(1-\lambda)}{B_4(1+2\beta\lambda)} \right), \quad \lambda = E_1/A_{33} \tag{9.32}$$

і коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_1 = \frac{(1-\lambda)\, p\sqrt{\pi a}}{1+2\beta\lambda} .$$

Якщо $f\left(\varepsilon_{yy}\right)=\begin{cases} E_1\varepsilon_{yy}, & \varepsilon_{yy} \le \varepsilon_T \\ \sigma_T, & \varepsilon_{yy} \succ \varepsilon_T \end{cases}$, то співвідношення (9.30) описує реакцію на зовнішні зусилля ідеального пружно-пластичного матеріалу наповнювача (крива 3, рис.9.2). Тут σ_T – границя текучості ін'єкційного матеріалу; ε_T – деформація на межі текучості. Тоді

$$A = \frac{p - \sigma_T}{B_4},$$

деформація включення

$$\varepsilon_y = A_{33}^{-1} p + \frac{(p-\sigma_T)\beta}{B_4}, \tag{9.33}$$

і коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_1 = (p - \sigma_T)\sqrt{\pi a} . \tag{9.34}$$

На основі співвідношень (9.29), (9.32) побудовані криві, що відтворюють діапазон напружень у порожнинах, що заповнені лінійно пружними та нелінійними пружно-пластичними ін'єкційними матеріалами (рис.9.4). При розрахунку вважали, що $\sigma_T = p/2$.

Як бачимо, напруження у дефектах, заповнених пружно-пластичним матеріалом і пружним, можуть значно відрізнятися. Ця різниця зростає із ростом жорсткості матеріалу заповнювача та зовнішнього навантаження, що викликає течіння ін'єкційного матеріалу.

Видно, що здатність матеріалу наповнювача зміцнюватися суттєво впливає на рівень напружень у включенні (інтервал між кривими 1 і 2).

На рис. 9.5 наведені результати порівняння розрахунку граничних навантажень, отриманих на основі критерію Гріффітса–Ірвіна та лінійних і нелінійних моделей деформування матеріалу наповнювача. Параметр β покладено рівним 10. Із наведених даних випливає, що розбіжність результатів стає значною у випадках тріщин малих розмірів та зростанні жорсткості наповнювача.

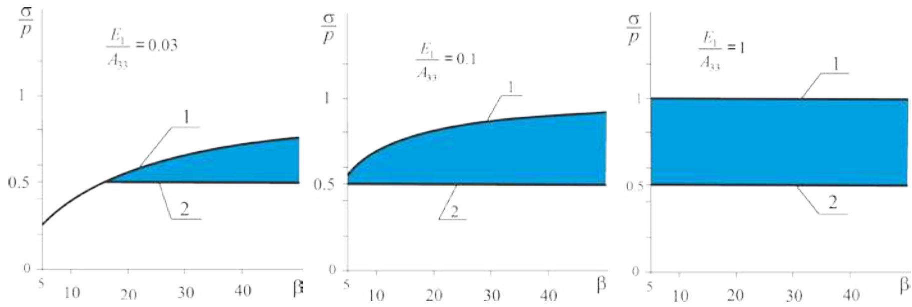


Рис. 9.4

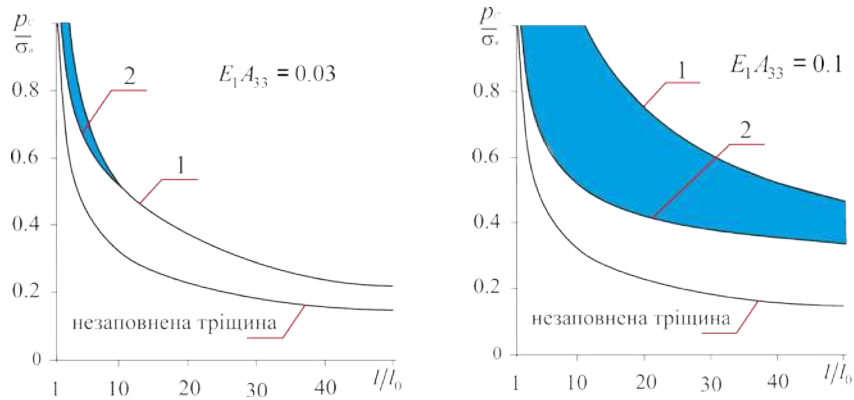


Рис. 9.5

9.5. Заліковування еліпсоїдальної тонкої порожнини-тріщини в транстропному тілі

Нехай в безмежному транстропному пружному тілі міститься тріщиноподібний дефект у вигляді тривісного еліпсоїда з півосями *a*, *в*, *c* (*a*, *в* >> *c*). З метою зміцнення тіла, дефект заповнили ін’єкційним матеріалом, який згодом твердне, заліковуючи тріщину.

На нескінченності до тіла прикладені зовнішні зусилля розтягу інтенсивністю *p*, нормальні до площини $z = 0$ прямокутної системи координат *x*, *y*, *z* (рис. 9.6). Реакцію матеріалу наповнювача на зовнішні зусилля розтягу виразимо залежністю

$$\sigma_{zz}(x,y) = f(\varepsilon_{zz}) = f\left(\left[u^*(x,y)\right]h^{-1}(x,y)\right),$$

$$\sigma_{xz}(x,y) = \sigma_{yz}(x,y) = 0, \qquad (x,y)\in S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1. \qquad (9.35)$$

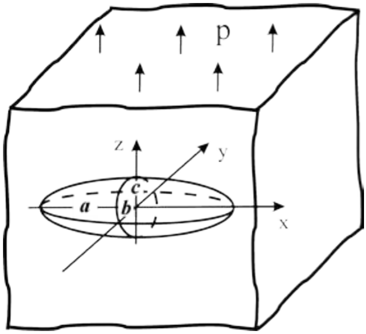


Рис. 9.6.

Тут $f(\varepsilon_z)$ - деяка неперервна функція, що описує зв'язок нормальних напружень σ_{zz} з поздовжньою деформацією ε_{zz}; $h(x,y)=2c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$; u_z^* – переміщення точок поверхні розділу матеріалів (основного та ін'єкційного).

На основі співвідношень (9.35), враховуючи симетрію задачі відносно площини z=0, малу товщину та гладкість поверхні розділу матеріалів, отримуємо крайову задачу теорії пружності для півпростору $z\geq 0$:

$$\sigma_{zz}\Big|_S = f\left(\left[u_z^*\right]h^{-1}\right),$$
$$\sigma_{xz}\Big|_{S+\overline{S}} = \sigma_{yz}\Big|_{S+\overline{S}} = 0,$$
$$u_z\Big|_{\overline{S}} = 0. \qquad (9.36)$$

Крайова задача (9.36) є частковим випадком більш загальної, розглянутої в підрозділі 9.3. На основі отриманих там рівнянь (9.24) проблема зводиться до розв'язування такого інтегро-диференціального рівняння:

$$\frac{B_4}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_S \frac{u_z d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}} - f\left(\frac{\left[u_z+u_z^0\right]}{h(x,y)}\right) = -p\,. \qquad (9.37)$$

Розв'язок рівняння (9.37) шукаємо у вигляді

$$u_z(x\,,y\,) = Ac\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,. \qquad (9.38)$$

Невідома константа A знаходиться із розв'язку трансцендентного рівняння, отриманого підставлянням виразу (9.38) у рівняння (9.37):

$$B_4 AE(k) + \beta f \left(A + \frac{p}{A_{33}} \right) - p = 0\,. \qquad (9.39)$$

Напруження в матеріалі наповнювача встановлюються на основі залежності (9.35) з врахуванням (9.38):

$$\sigma_{zz}(x, y) = f \left(A + pA_{33}^{-1} \right). \qquad (9.40)$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень K_1, що характеризують напружено-деформований стан в околі заповненої тріщини, встановлюють за формулою

$$K_1 = B_4 \lim_{n \to 0} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\, u_z(n)\,, \qquad (9.41)$$

де *n* – вісь локальної системи координат *t, n, z* на контурі області S (рис. 9.7).

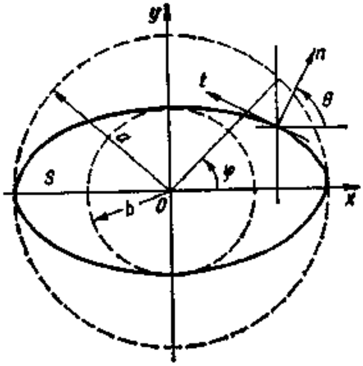


Рис. 9.7

Перехід від системи прямокутних декартових координат x, y, z до локальних t, n, z здійснено за формулами

$$x = a\cos\phi - t\sin\theta + n\cos\theta,$$
$$y = b\sin\phi + t\cos\theta + n\sin\theta, \qquad (9.42)$$

де ϕ - кут, що визначає параметричні координати точки на еліпсі $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Кут θ зв'язаний з параметричними рівняннями еліпса залежностями

$$cos\,\theta = b\,cos\,\phi \Big/ \sqrt{a^2\,sin^2\,\phi + b^2\,cos^2\,\phi}\,,$$
$$sin\,\theta = b\,sin\,\phi \Big/ \sqrt{a^2\,sin^2\,\phi + b^2\,cos^2\,\phi}\,. \qquad (9.43)$$

На основі співвідношень (9.42), (9.43) переходу до локальної системи координат, асимптотичний вираз для переміщень поверхні тріщини в малому околі межі еліпса запишемо у вигляді

$$u_z = Ac\sqrt{2}(\,a^2\,sin^2\,\phi + b^2\,cos^2\,\phi\,)^{1/4}(\,ab\,)^{-1/2}\sqrt{n} + 0(\,n\,)\,. \qquad (9.44)$$

Звідси та формули (9.41) отримуємо залежність для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi}AB_4c(\,a^2\,sin^2\,\phi + b^2\,cos^2\,\phi\,)^{1/4}}{\sqrt{ab}}\,. \qquad (9.45)$$

З отриманої залежності видно, що максимальними по контуру тріщини коефіцієнти інтенсивності напружень будуть в околі малої осі еліпса, тобто при $\phi = \pi/2$. І, очевидно, саме тут за умови $K_1 = K_{IC}$ розпочнеться ріст тріщини. У випадку круглої тріщини ($a = b$) співвідношення (9.45) набуває вигляду

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi}AB_4c}{\sqrt{a}}\,. \qquad (9.46)$$

Коли відношення $a/b \to \infty$, отримуємо випадок заповненої тріщини Гріффітса завдовжки $2b$:

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi}AB_4c}{\sqrt{b}}\,. \qquad (9.47)$$

9.6. Ефект розклинювання, що супроводжує заліковування тріщини ін’єктуванням

Розглянемо безмежне транстропне пружне тіло, що містить плоску тріщину S в площині $z = 0$ прямокутної декартової системи координат x, y, z. В тріщину поміщено з натягом тонке пружне включення, обмежене гладкою випуклою поверхнею V. На практиці така схема реалізовується при заповненні під тиском тріщини в масивному елементі будівельної конструкції рідким матеріалом, який згодом твердне, полімеризуючись або

кристалізуючись. Приймаємо, що поверхні розділу матеріалів контактують без тертя.

Напруження стиску, що виникають у включенні, подамо у вигляді залежності

$$\sigma_{zz}\left(x,y\right)=E_1\,ln\frac{u_z\left(x,y\right)}{h\left(x,y\right)}. \tag{9.48}$$

Тут E_1 - модуль Юнга матеріалу включення; $u_z(x,y)$ - переміщення берегів тріщини, $2h(x,y)$ - товщина включення. Співвідношення (9.48) означає, що допускаються великі деформації матеріалу включення та лінійна залежність між напруженнями σ_{zz} та деформацією ε_{zz}.

З урахуванням симетрії задачі відносно площини $z=0$ та малої товщини включення отримуємо крайову задачу для півпростору $z\geq 0$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{zz}\big|_S=E_1\,ln\frac{u_z\left(x,y\right)}{h\left(x,y\right)},\\
&\sigma_{zx}\big|_{S+\overline{S}}=\sigma_{zy}\big|_{S+\overline{S}}=0,\\
&u_z\big|_{\overline{S}}=0.
\end{aligned} \tag{9.49}$$

На основі загального розв’язку рівнянь рівноваги пружного транстропного тіла, вираженого через гармонічні в різних системах координат функції, та апарату інтегральних перетворень Фур’є крайову задачу (9.49) зводимо до інтегрального рівняння відносно переміщень u_z (див. (9.26))

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_S\frac{u_z d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}-\frac{2\pi}{B_4}E_1\ln\frac{u_z(x,y)}{h(x,y)}=0. \tag{9.50}$$

Двовимірний варіант даної задачі про розклинювання тріщини Гріффітса за умови плоскої деформації отримуємо наступним чином. Вважаючи функцію $u_z\left(x,y\right)$ незалежною від змінної y та інтегруючи по η в межах від $-\infty$ до $+\infty$, рівняння (9.50) після деяких перетворень трансформуємо в наступне нелінійне сингулярне інтегро-диференційне рівняння:

$$\int\limits_{-a}^{a}\frac{u_z'(\xi)d\xi}{\xi-x}-\frac{\pi}{B_4}E_1\ln\frac{u_z(x)}{h(x)}=0. \tag{9.51}$$

Нехай область S – еліпс з півосями a і b, а поверхня включення – еліпсоїд з півосями a, b, c ($a > b >> c$). В цьому випадку можна отримати розв’язок нелінійного інтегрального рівняння (9.51) у вигляді

$$u_z(x,y) = Ac\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \tag{9.52}$$

де A - невідома константа.

Підставивши вираз (9.52) у інтегральне рівняння (9.50), після деяких обчислень отримаємо трансцендентне рівняння для визначення константи A:

$$AE(k) + \frac{\beta E_1}{B_4}\ln A = 0. \tag{9.53}$$

Тут $\beta = b/c$; $E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k_2 \sin^2 \alpha}\, d\alpha$ - повний еліптичний інтеграл другого роду.

Розв’язок цього рівняння має вигляд

$$A = \frac{\beta\varepsilon LambertW\left(\frac{E(k)}{\beta\varepsilon}\right)}{E(k)}, \qquad \varepsilon = \frac{E_1}{B_4}, \tag{9.54}$$

де $LambertW(x)$ – функція Ламберта [19].

У випадку малих деформацій включення, коли $u_z(x,y) \approx h(x,y)$ і відповідно $\varepsilon_z = \ln\frac{u_z(x,y)}{h(x,y)} \approx \frac{u_z(x,y)}{h(x,y)} - 1$,

$$A = \frac{\varepsilon\beta}{E(k) + \beta\varepsilon}.$$

Напруження у включенні згідно з формулою (9.48) будуть такими:

$$\sigma_z(x,y) = E_1 \ln A. \tag{9.55}$$

Як бачимо, напруження у включенні не залежать від координат x та y, тобто є постійними. Напруження в околі тріщини характеризують коефіцієнти інтенсивності напружень K_1, які можна встановити із формули

$$K_1 = \frac{1}{B_4}\lim_{n\to 0}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}u_z(n), \tag{9.56}$$

де n - вісь локальної системи координат t, n, z на контурі області S (рис.9.7).

На основі співвідношень (9.42), (9. 43) переходу до локальної системи координат, асимптотичний вираз для переміщень поверхні тріщини в малому околі межі еліпса запишемо у вигляді

$$u_z = Ac\sqrt{2}(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4}(ab)^{-1/2}\sqrt{n} + 0(n)\,. \qquad (9.57)$$

Звідси та формули (9.56) отримуємо залежність для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi} Ac(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/4}}{B_4\sqrt{ab}}\,. \qquad (9.58)$$

З отриманої залежності видно, що максимальними по контуру тріщини коефіцієнти інтенсивності напружень будуть в околі малої осі еліпса, тобто при $\phi = \pi/2$. І, очевидно, саме тут за умови $K_1 = K_{1c}$ розпочнеться стійкий ріст тріщини. У випадку кругової тріщини ($a = b$) співвідношення (9.58) набуває вигляду

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi} Ac}{B_4\sqrt{a}}\,. \qquad (9.59)$$

Коли відношення $a/b \to \infty$, отримуємо випадок розклинювання пружним включенням тріщини Гріффітса завдовжки $2b$, що знаходиться в умовах плоскої деформації

$$K_1 = \frac{\sqrt{\pi} Ac}{B_4\sqrt{b}}\,. \qquad (9.60)$$

На рис. 9.8. зіставлені результати розрахунків напружень у включенні, отримані на основі логарифмічних деформацій ($\varepsilon_z = \ln(u_z/h)$) у співвідношенні (1) (крива 1) та на основі деформацій, як відносного видовження включення (крива 2). Видно, що напруження починають помітно відрізнятися, коли параметр $A < 0,8$.

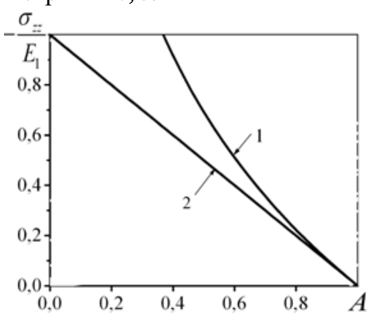


Рис. 9.8

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
2. *Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
3. *Панасюк В.В., Стадник М.М., Силованюк В.П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 214с.
4. *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
5. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344с.
6. *Силованюк В.П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Національна академія наук України. Фізико-механічний інститут ім.Г.В. Карпенка, 2000. – 300 с.
7. *Стащук Н. Г.* Задачи механики упругих тел с трещиноподобными дефектами. – К.: Наук. думка, 1993. – 358 с.
8. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. *Хай М. В.* Інтегральні рівняння задачі про визначення напружень в тілі з тонким чужорідним включенням // Доп. АН УРСР. – 1984. – № 2. – С. 43–46.
10. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
11. *Черепанов Г. П.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
12. *Чобанян К. С., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включеним // Изв. Арм. ССР. Механика. – 1967. – **20,** № 6. – С. 19–29.
13. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. – М.: Из-во иностранной литературы, 1963. – 472 с.
14. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert Function // Adv. in Comp. Math. – 1996. – **5**. – P. 329–359.
15. *Elliott H. A.* Axial symmetric stress distribution in aelotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1949. – **45.** – P. 621–630.
16. *Hu H. C.* On the Three-Dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Deta Sci. Sinica. – 1953. – **2**. – P. 145–151.
17. *Panasyuk V.V., Marukha V.I., Sylovanyuk V.P.* Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014 – 230 p.
18. *Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – **1**, No. 3. – P. 189–203.

РОЗДІЛ 10

ВТИСКУВАННЯ КРУГОВОГО ШТАМПА У ПІВНЕСКІНЧЕННИЙ ПРУЖНИЙ ШАР НА ГЛАДКІЙ ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ

Н.Д. Вайсфельд, Г.О. Фесенко

Контактні задачі теорії пружності − важливий клас задач механіки деформівного твердого тіла. Це зумовлено їх широким застосуванням для моделювання різноманітних інженерних задач. Розвиток теорії класичних контактних задач пов'язаний з іменами таких видатних учених як Л.О. Галін, Я.С. Підстригач, А.Ф. Улітко, В.А. Бабешко, G. Gladwell, M. Comninou та інші.

Контактним задачам присвятив багато досліджень Г.Я. Попов. Він розвинув новий підхід до розв'язання контактних задач, що базується на розробленій ним теорії лінійно-деформованої основи. Для математичного опису лінійно-деформованої основи у загальному випадку введено означення матриці впливу: відповідно, основна, вісесиметрична та плоска для розв'язання загальної, вісесиметричної та плоскої контактних задач. Яскравим досягненням цієї теорії є отримані ним формули переходу між матрицями впливу, які дають можливість побудувати основну матрицю впливу за допомогою більш простої вісесиметричної або плоскої матриць. Так, перша основна задача теорії пружності для лінійно-деформованої основи зводиться до більш простих двовимірних задач теорії пружності, зокрема плоскої та антиплоскої [13, 15].

Короткий огляд праць автори зосередили на задачах зі штампами кругової форми.

Задачу про дію двох кругових штампів на пружний півпростір розв'язали В.Т. Грінченко та А.Ф. Улітко [9]. Особливу увагу привернула задача про тиск на пружний півпростір кільцевого штампа. Наближені розв'язки цієї задачі різними способами отримали В.І. Моссаковський, В.С. Губенко [10], К.Е. Єгоров [11], Ю.А. Аркадьєва [2], Н.М. Бородачев, Ф.Н. Бородачева [3], В.М. Александров [1]. Г.Я. Попов наближено розв'язав контактну задачу з круговою областю контакту для пружної основи загального типу [18, 19]. У праці [4] розглянуто контактну задачу, коли сила, що діє на штамп, є позацентровою.

Багато праць присвячено розв'язанню просторових контактних задач для пружного шару. Тут запропоновано ефективні методи отримання наближених розв'язків. М.М. Лебедєв та Я.С. Уфлянд [12] контактну задачу про втискування кругового штампу у пружний шар, який лежить на жорсткій основі, розв'язали за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля та дістали інтегральне рівняння Фредгольма з симетричним ядром. І.І. Ворович та Ю.А. Устинов отримали асимптотичний розв'язок цієї задачі для товстого шару за дії плоского та параболічного штампів [7].

Пізніше В.М. Александров та І.І. Ворович розробили ефективні асимптотичні методи, що дають можливість знаходити розв'язок як для товстого,

так і для тонкого шару. Монографію І.І. Воровича, В.М. Александрова, В.А. Бабешка [6] присвячено мішаним задачам теорії пружності для смуги, шару і клина за довільних розмірів зони контакту, умовам однозначної розв'язності крайових задач та відповідних інтегральних рівнянь, поведінці розв'язків на нескінченності, в околі точок і ліній зміни крайових умов тощо.

У праці [11] досліджено контактну задачу для пружного шару за дії позацентрової вертикальної сили на круглий жорсткий штамп, де розв'язок поділено на частини, відповідно, для центральної сили і пари сил з моментом. Задачу зведено до розв'язання парних інтегральних рівнянь Фредгольма.

У праці [5] розглянуто неосесиметричну контактну задачу для кругового штампа на пружній основі. Інтегральне рівняння задачі завдяки ортогоналізації за системою косинусів зведено до незв'язаних інтегральних рівнянь для контактних напружень під штампом, які розв'язано методом ортогональних поліномів [20, 21] та зведено до нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь.

У розділі зосереджено увагу на розв'язанні контактної задачі про втискування кругового жорсткого штампа у півнескінченний пружний шар, що спирається на абсолютно жорстку основу без тертя, причому лінія зосередженої сили не збігається з віссю штампа. По бічній грані шару задано умови гладкого контакту. Потрібно відшукати силу, прикладену до штампа, що забезпечує поступальне переміщення, та величину заглиблення штампа. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння для невідомого контактного напруження. Рівняння розв'язано наближено методом ортогональних поліномів [13, 20].

10.1. Формулювання задачі

Півнескінченний пружний шар (модуль зсуву G, коефіцієнт Пуасона μ) скінченної товщини h спирається на абсолютно жорстку основу без тертя. Він займає область $0<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,\ 0<z<h.$ Під дією зовнішньої сили P на грані $z=h$ абсолютно жорсткий круговий у плані штамп втискується у шар (рис. 10.1). Тут A – радіус штампа, B – відстань від початку координат до центра штампа, причому лінія сили, що діє на штамп, не збігається з його віссю (рис. 10.2). Вважаємо, що тертя між штампом та шаром відсутнє. Бічна грань шару контактує без тертя з жорсткою вертикальною стінкою.

Розв'язок поставленої задачі можна побудувати на основі вертикального переміщення, що виникає у пружному шарі під дією зосередженної сили, яка розташована у довільній точці (a,b,h) верхньої грані шару. Бічна грань шару знаходиться в умовах гладкого контакту, нижня − спирається на жорстку основу без тертя [23].

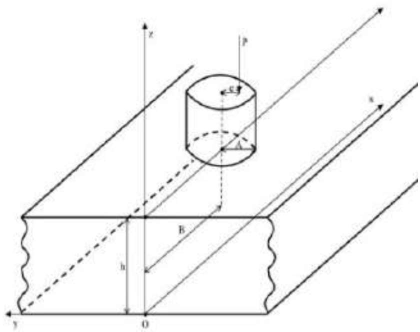


Рис. 10.1

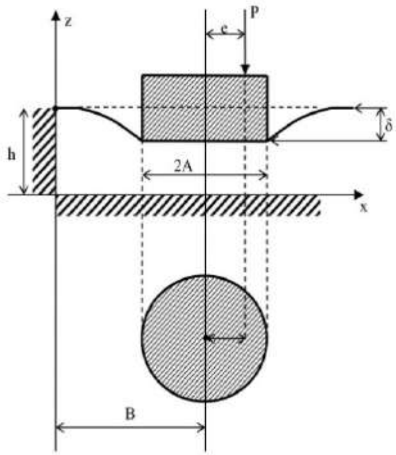


Рис. 10.2

Позначимо переміщення, що виникають у шарі під дією зосередженної сили: $u_y(x,y,z) = v(x,y,z)$, $u_x(x,y,z) = u(x,y,z)$, $u_z(x,y,z) = w(x,y,z)$. Вони повинні задовольняти систему рівнянь Ламе, записану у векторній формі:

$$\Delta(u,v,w)^T + \mu_0(\Theta', \Theta^{\bullet}, \Theta^{’})^T = 0, \tag{10.1}$$

де Δ − оператор Лапласа, $\mu_0 = (1-2\mu)^{-1}$, μ − коефіцієнт Пуасона, $\Theta = u' + v^{\bullet} + w^{’}$ − об’ємне розширення. Тут прийняті такі позначення для похідних функції $f(x,y,z)$:

$$f' = \partial f / \partial x, \quad f^{\bullet} = \partial f / \partial y, \quad f^{’} = \partial f / \partial z.$$

Вважаємо, що виконуються крайові умови

$$\sigma_z\big|_{z=h} = -\delta(x-a)\delta(y-b), \;\; \tau_{zx}\big|_{z=h} = 0, \;\; \tau_{zy}\big|_{z=h} = 0,$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \;\; \tau_{xz}\big|_{x=0} = 0, \;\; \tau_{xy}\big|_{x=0} = 0,$$

$$w\big|_{z=0} = 0, \;\; \tau_{zx}\big|_{z=0} = 0, \;\; \tau_{zy}\big|_{z=0} = 0, \tag{10.2}$$

де $\delta(x)$ − функція Дірака. Перепишемо крайові умови у термінах переміщень:

$$\mu\left[u'(x,y,h) + v^{\bullet}(x,y,h)\right] + (1-\mu)w^{’}(x,y,h) = -\delta(x-a)\delta(y-b)/(2G\mu_0),$$

$$u^{’}(x,y,h) + w'(x,y,h) = 0, \;\; v^{’}(x,y,h) + w^{\bullet}(0,y,z) = 0,$$

$$u(0,y,z) = 0, \;\; v'(0,y,z) = 0, \;\; w'(0,y,z) = 0,$$

$$w(x,y,0) = 0, \;\; u^{’}(x,y,0) + w'(x,y,0) = 0, \;\; v^{’}(x,y,0) + w^{\bullet}(x,y,0) = 0.$$

10.2. Зведення задачі до одновимірної та її розв'язання

Згідно з методом, запропонованим Г.Я. Поповим [14, 16, 17], введемо дві нові функції, пов'язані з похідними переміщень співвідношеннями

$$Z(x,y,z) = u'(x,y,z) + v^{\bullet}(x,y,z),$$

$$\widetilde{Z}(x,y,z) = v'(x,y,z) - u^{\bullet}(x,y,z). \qquad (10.3)$$

У результаті отримаємо систему рівнянь

$$\Delta Z + \mu_0 \nabla_{xy} \left(Z + w^{,} \right) = 0,$$

$$\Delta w + \mu_0 \nabla_{xy} \left(Z + w^{,} \right)^{,} = 0, \qquad (10.4)$$

де $\nabla_{xy} f = f'' + f^{\bullet\bullet}$, та диференційне рівняння для функції $\widetilde{Z}$

$$\Delta \widetilde{Z} = 0. \qquad (10.5)$$

Крайові умови також перепишемо для функцій (10.3):

$$Z'(0,y,z) = 0, \;\; w'(0,y,z) = 0, \;\; \widetilde{Z}(0,y,z) = 0\,,$$

$$\nabla_{xy} w(x,y,h) + Z^{,}(x,y,h) = 0, \;\; \widetilde{Z}^{,}(x,y,h) = 0,$$

$$\mu Z(x,y,h) + (1-\mu) w^{,}(x,y,h) = -\delta(x-a)\delta(y-b)/(2G\mu_0)\,,$$

$$Z^{,}(x,y,0) = 0, \;\; w(x,y,0) = 0, \;\; \widetilde{Z}(x,y,0) = 0. \qquad (10.6)$$

Застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за змінною y та косинус перетворення Фур'є за змінною x і запишемо задачу (10.4), (10.6) для трансформант:

$$w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1} \widetilde{N}^2 w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1} \mu_0 Z'_{\beta\alpha}(z) = 0, \;\; 0 < z < h\,,$$

$$Z''_{\beta\alpha}(z) - \widetilde{N}^2 \left[\mu_* Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0 w'_{\beta\alpha}(z) \right] = 0, \;\; \widetilde{N}^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad (10.7)$$

$$-\widetilde{N}^2 w_{\beta\alpha}(h) + Z'_{\beta\alpha}(h) = 0,$$

$$\mu Z_{\beta\alpha}(h) + (1-\mu) w'_{\beta\alpha}(h) = -(2G\mu_0)^{-1} \cos\alpha a \cdot e^{i\beta b},$$

$$w_{\beta\alpha}(0) = 0, \;\; Z'_{\beta\alpha}(0) = 0, \qquad (10.8)$$

де $\mu_* = 1 + \mu_0$.

Для функції $\widetilde{Z}$ отримана крайова задача, яка в трансформантах має вигляд:

$$\widetilde{Z}_{\beta\alpha}''(z) - \widetilde{N}^2 \widetilde{Z}_{\beta\alpha}(z) = 0, \;\; 0 < z < h, \;\; \widetilde{Z}_{\beta\alpha}'(h) = 0, \;\; \widetilde{Z}_{\beta\alpha}(0) = 0\,. \qquad (10.9)$$

Очевидно, що крайова задача (10.9) має тривіальний розв’язок $\widetilde{Z}_{\beta\alpha}(z)=0$, а отже і $\widetilde{Z}(x,y,z)=0$.

Введемо шуканий вектор трансформант $\mathbf{y}(z)$ та матриці $\mathbf{P},\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{y}(z)=\begin{pmatrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{pmatrix},\ \mathbf{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}=\begin{pmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{pmatrix},\ \mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -\widetilde{N}^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{N}^2=\alpha^2+\beta^2.$$

Тоді систему (10.7) запишемо у векторній формі

$$L_2\mathbf{y}(z)=0,\ \ 0<z<h, \tag{10.10}$$

де диференційний оператор L_2 має вигляд

$$L_2\mathbf{y}(z)\equiv \mathbf{I}\mathbf{y}''(z)+\mu_0\mathbf{Q}\mathbf{y}'(z)-\widetilde{N}^2\mathbf{P}\mathbf{y}(z).$$

Загальний розв’язок рівняння (10.10) будуємо на основі розв’язку відповідного матричного однорідного рівняння $L_2\left[\mathbf{Y}(z)\right]=0,\ \ 0<z<h$ у формі [22]

$$\mathbf{Y}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{sz}\mathbf{M}^{-1}(s)ds, \tag{10.11}$$

де матрицю $\mathbf{M}(s)$ знайшли зі співвідношення $e^s\mathbf{M}(s)=L_2(e^s\cdot\mathbf{I})$:

$$\mathbf{M}(s)=\mathbf{I}s^2+\mu_0\mathbf{Q}s-\widetilde{N}^2\mathbf{P}=\begin{pmatrix} s^2-\mu_*\widetilde{N}^2 & -\mu_0\widetilde{N}s \\ \mu_*^{-1}\mu_0\widetilde{N}s & s^2-\mu_*^{-1}\widetilde{N}^2 \end{pmatrix}.$$

Контур C охоплює усі нулі підінтегральної матриці-функції, які є нулями визначника матриці $\mathbf{M}(s)$:

$$\det\mathbf{M}(s)=\left(s^2-\widetilde{N}^2\right)^2,\ \ s=\pm\widetilde{N}.$$

Розв’язок (10.11) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{Y}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{sz}}{\left(s^2-\widetilde{N}^2\right)^2}\widetilde{\mathbf{M}}^T(s)ds,$$

де $\widetilde{\mathbf{M}}^T(s)$ − матриця алгебричних доповнень до матриці $\mathbf{M}(s)$, символ T означає транспонування. У результаті побудували лінійно незалежні розв’язки матричного однорідного диференційного рівняння

$$\mathbf{Y}_{\mp}(z)=\mu_0 e^{\mp\widetilde{N}z}\begin{pmatrix} -\widetilde{N}z\mp\kappa & \pm\mu_*^{-1}z \\ \mp\widetilde{N}^2 z & \mu_*^{-1}\left(\widetilde{N}z\mp\kappa\right)\end{pmatrix},$$

де $\kappa = 3-4\mu$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного векторного рівняння (10.10) можна побудувати у вигляді лінійної комбінації:

$$\mathbf{y}(z)=\mathbf{Y}_{-}(z)\left(C_0^0\ C_0^1\right)^T+\mathbf{Y}_{+}(z)\left(C_1^0\ C_1^1\right)^T.$$

Невідомі сталі $C_i^0,\ C_i^1,\ i=0{,}1$ знайдемо із крайових умов (10.8):

$$C_0^0=C_1^0=\frac{\cos\alpha a\cdot e^{i\beta b}}{2G\mu_0\kappa}\frac{1}{\widetilde{N}}\frac{1}{D_{\widetilde{N}}}\left(-\widetilde{N}h\cdot ch\widetilde{N}h-\mu_1^{-1}sh\widetilde{N}h\right),$$

$$C_0^1=-C_1^1=-\frac{\cos\alpha a\cdot e^{i\beta b}}{2G\mu_0\kappa}\frac{\mu_*}{D_{\widetilde{N}}}\left(\widetilde{N}h\cdot ch\widetilde{N}h-\mu_0^{-1}sh\widetilde{N}h\right),$$

$$D_{\widetilde{N}}=2sh2\widetilde{N}h+4\widetilde{N}h,$$

де $\mu_1=(2-2\mu)^{-1}$.

Шуканий вектор трансформант набуває вигляду

$$w_{\beta\alpha}(z)=\frac{\cos\alpha a\cdot e^{i\beta b}}{2GD_{\widetilde{N}}}F_1(\widetilde{N},z),\ \ Z_{\beta\alpha}(z)=\frac{\cos\alpha a\cdot e^{i\beta b}}{2GD_{\widetilde{N}}}F_2(\widetilde{N},z),$$

де

$$\tfrac{1}{2}F_1(\widetilde{N},z)=(z+h)sh\widetilde{N}(h-z)-(h-z)sh\widetilde{N}(h+z)-\mu_1^{-1}\frac{1}{\widetilde{N}}\left(ch\widetilde{N}(h+z)-sh\widetilde{N}(h-z)\right),$$

$$\tfrac{1}{2}F_2(\widetilde{N},z)=\widetilde{N}(z+h)ch\widetilde{N}(h-z)+\widetilde{N}(h-z)ch\widetilde{N}(h+z)-\mu_0^{-1}\left(sh\widetilde{N}(h+z)+sh\widetilde{N}(h-z)\right).$$

Щоб отримати оригінали переміщень, необхідно застосувати обернені інтегральні перетворення:

$$w(x,y,z)=\frac{1}{2\pi^2 G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{F_1(\widetilde{N},z)}{D_{\widetilde{N}}}e^{-i\beta(y-b)}\cos\alpha a\,\cos\alpha x\,d\beta d\alpha,$$

де w – вертикальне переміщення у шарі, що виникає під дією зосередженної одиничної сили. Використаємо формулу Ейлера, формулу (1.314(3)) з праці [8] та парність підінтегральної функції за змінною α:

$$w(x,y,z)=\frac{1}{8\pi^2 G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1(\widetilde{N},z)}{D_{\widetilde{N}}}e^{-i\beta(y-b)}\left(e^{-i\alpha(x-a)}+e^{-i\alpha(x+a)}\right)d\beta d\alpha.$$

Для переходу до одновимірного інтеграла використаємо відому формулу [13], враховуючи, що $\widetilde{N}^2=\alpha^2+\beta^2$:

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)e^{-i\alpha x-i\beta y}d\alpha d\beta=\int_0^{\infty}t\,F(t)\,J_0\left(t\sqrt{x^2+y^2}\right)dt, \quad (10.12)$$

де $J_0(t)$ – функція Бесселя.

Тоді остаточно отримаємо вертикальне переміщення в шарі у вигляді

$$w(x,y,z)=\frac{1}{4\pi G}\int_0^{\infty}t\;\frac{\widetilde{J_0}(t,x,y,a,b)}{D_t}F_1(t,z)dt\,,$$

$$D_t=4ht+2sh(2ht),$$

$$\tfrac{1}{2}F_1(t,z)=(z+h)sht(h-z)-(h-z)sht(h+z)-$$

$$-\mu_1^{-1}\frac{1}{t}\big(cht(h+z)-sht(h-z)\big),$$

$$\widetilde{J_0}(t,x,y,a,b)=J_0\left(t\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)+J_0\left(t\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right). \quad (10.13)$$

10.3. Виведення сингулярного інтегрального рівняння

Знайдемо вертикальне переміщення по верхній грані $z=h$ шару

$$w(x,y,h)=-\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G}\int_0^{\infty}\widetilde{J_0}(t,x,y,a,b)F(ht)dt,\quad F(ht)=\frac{ch(2ht)-1}{sh(2ht)+2ht}$$

та відокремимо асимптотику в підінтегральній функції, враховуючи, що $\lim\limits_{t\to 0}J_0(t)=1$, $\lim\limits_{t\to\infty}F(t)=1$, за правилом $F(t)-1+1=R(t)+1$, де

$$R(ht)=\frac{2e^{-4ht}-2e^{-2ht}-4hte^{-2ht}}{1+4hte^{-2ht}-e^{-4ht}}=\frac{e^{-2ht}-2ht-1}{sh(2ht)+2ht}.$$

Далі зручніше перейти до полярної системи координат:

$$x=B+r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad a=B+\rho\cos\psi,\quad b=\rho\sin\psi\,, \quad (10.14)$$

де B – відстань від початку координат до центра штампа. Тоді замість функції $\widetilde{J_0}(t,x,y,a,b)$ у (10.13) отримаємо:

$$\widetilde{J_0}(t,r,\rho,\varphi,\psi,B)=J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\right)+$$

$$+J_0\left(t\sqrt{4B^2+4B(r\cos\varphi+\rho\cos\psi)+r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\varphi+\psi)}\right).$$

Введемо такі позначення:

$$W(r,\rho,\varphi,\psi)=\int_0^{\infty}J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\right)\big(1+R(ht)\big)dt\,.$$

Тоді переміщення під штампом, зумовлене контактним тиском $p(\rho,\psi)$, отримаємо у вигляді

$$w_p(r,\varphi) = -\frac{\mu_1^{-1}}{4\pi G}\int_0^A\int_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\varphi,\psi)+W_B(r,\rho,\varphi,\psi)\right]p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi. \quad (10.15)$$

Контактний тиск задамо так, щоби переміщення під штампом мало описуватися лінійною функцією:

$$Ax + Cz + D = 0 \Rightarrow z = -{}^{A}\!/\!{}_{C}\,x - {}^{D}\!/\!{}_{C}\,. \quad (10.16)$$

З іншого боку, якщо δ – відстань, на яку втискається штамп, ω – кут його повороту навколо осі Oy, тоді у локальній системі координат отримаємо:

$$w = -\delta - x_* \sin\omega,\; x = x_* + B \Rightarrow x_* = x - B,$$

а отже,

$$w = -\delta - (x - B)\sin\omega = -x\sin\omega - (\delta - B\sin\omega)\,.$$

Тоді зі співвідношення (10.16), прирівнюючи коефіцієнти, маємо:

$$A/C = \sin\omega,\; D/C = \delta - B\sin\omega,\; z = -\delta - (x - B)\sin\omega\,.$$

Запишемо рівняння переміщень точок основи штампа:

$$w_0(r,\varphi) = -\delta - (x - B)\sin\omega\,.$$

З урахуванням заміни змінних (10.14) одержимо:

$$w_0(r,\varphi) = -\delta - (B + r\cos\varphi - B)\sin\omega = -\delta - r\cos\varphi\sin\omega\,. \quad (10.17)$$

Переміщення верхньої грані шару (10.15) прирівняємо до переміщень штампа (10.17) на круговій ділянці контакту. В результаті отримаємо інтегральне рівняння для невідомого контактного напруження. Запишемо його у загальній формі:

$$w_p(r,\varphi) = w_0(r,\varphi),\; 0 < r < A,\; -\pi < \varphi < \pi\,. \quad (10.18)$$

Виконаємо заміну змінних

$$r = r'A,\; r' \in [0,1],\; \rho = \rho' A,\; \rho' \in [0,1],\; d\rho = Ad\rho',$$
$$dt = dt'/A,\; s = h/A.$$

Дістанемо для (10.15) вираз

$$w_p(r'A,\varphi) =$$
$$= -\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\widetilde{J_0}(t',r',\rho',\varphi,\psi,B/A)\left(1+R(st')\right)p(\rho' A,\psi)\rho' d\rho' d\psi dt'.$$

У подальшому штрихи не пишемо. З урахуванням вигляду $\widetilde{J_0}$ можна записати:

$$w_p(r,\varphi) = -\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\varphi,\psi)+W_{B/A}(r,\rho,\varphi,\psi)\right]p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi\,.$$

Тоді інтегральне рівняння (10.18) матиме вигляд

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\varphi,\psi)+W_{B/A}(r,\rho,\varphi,\psi)\right]p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi =$$
$$=-\delta - rA\cos\varphi\sin\omega,\ \ 0<r<A,\ \ -\pi<\varphi<\pi\ . \qquad (10.19)$$

10.4. Розв’язання сингулярного інтегрального рівняння

Контактне напруження буде парною функцією відносно полярного кута ψ за рахунок того, що сила діє у площині геометричної симетрії задачі xOz . Тому подамо його у вигляді ряду:

$$p(\rho,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho)\cos n\psi\ . \qquad (10.20)$$

Підставимо (10.20) у рівняння (10.19):

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\left[W(r,\rho,\varphi,\psi)+W_{B/A}(r,\rho,\varphi,\psi)\right]\cos n\psi d\rho d\psi =$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)\cos n\varphi,\ \ 0<r<A,\ \ -\pi<\varphi<\pi\ . \qquad (10.21)$$

Тут праву частину також розклали у ряд за системою косинусів. Враховуючи вигляд правої частині рівняння (10.19), одержали

$$f_0(r)=-\delta,\ \ f_1(r)=-rA\sin\omega\,.$$

Для обґрунтування правомірності розвинення розв’язку (10.20) у ряд за системою косинусів розглянемо функцію

$$F(r,\varphi)=\int_0^A\int_0^{\infty}\Omega(st)\int_{-\pi}^{\pi}J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\right)p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi dt\ .$$

Шуканий розв’язок (10.20) є парною функцією за змінною ψ . Розглянемо інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)d\psi=\int_{-\pi}^{0}f(\psi)d\psi+\int_0^{\pi}f(\psi)d\psi$, де у першому інтегралі виконаємо заміну змінних: $\psi=-\psi',\ \ d\psi=-d\psi',\ \ 0\to 0,\ \ -\pi\to\pi.$ Отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{0}J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\right)p(\rho,\psi)d\psi =$$
$$=\int_{\pi}^{0}J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi+\psi')}\right)p(\rho,-\psi')(-d\psi'),$$

$$F(r,\varphi)=\int\limits_0^A\int\limits_0^\infty \Omega(st)\int\limits_0^\pi\Big[J_0\Big(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\Big)+$$
$$+J_0\Big(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi+\psi)}\Big)\Big]p(\rho,\psi)\rho d\rho dt d\psi.$$

Знайдемо:

$$F(r,-\varphi)=\int\limits_0^A\int\limits_0^\infty \Omega(st)\int\limits_0^\pi\Big[J_0\Big(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi+\psi)}\Big)+$$
$$+J_0\Big(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\Big)\Big]p(\rho,\psi)\rho d\rho dt d\psi.$$

Таким чином, $F(r,\varphi)=F(r,-\varphi)$. За аналогією

$$F_B(r,\varphi)=\int\limits_0^A\int\limits_0^\infty \Omega(st)\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_0\Big(t\,\widetilde{R}_\pm(r,\rho,\varphi,\psi)\Big)p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi dt\ ,$$

$$\widetilde{R}_\pm(r,\rho,\varphi,\psi)=\sqrt{4B^2+4B(r\cos\varphi+\rho\cos\psi)+r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\varphi\pm\psi)}.$$

Для інтеграла $\int\limits_{-\pi}^{0} f(\psi)d\psi$ після аналогічної заміни отримаємо:

$$F_B(r,\varphi)=\int\limits_0^A\int\limits_0^\infty \Omega(st)\int\limits_0^\pi\Big[J_0\Big(t\widetilde{R}_+(r,\rho,\varphi,\psi)\Big)+J_0\Big(t\widetilde{R}_-(r,\rho,\varphi,\psi)\Big)\Big]p(\rho,\psi)\rho d\rho dt d\psi.$$

Знайдемо:

$$F_B(r,-\varphi)=\int\limits_0^A\int\limits_0^\infty \Omega(st)\int\limits_0^\pi\Big[J_0\Big(t\widetilde{R}_-(r,\rho,\varphi,\psi)\Big)+J_0\Big(t\widetilde{R}_+(r,\rho,\varphi,\psi)\Big)\Big]p(\rho,\psi)\rho d\rho dt d\psi.$$

Звідси маємо парність функції: $F_B(r,\varphi)=F_B(r,-\varphi)$.

Таким чином, через парність отриманих функцій розвинення у ряд розв'язку за системою косинусів правомірно. Введемо позначення:

$$I_1=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1\rho p_n(\rho)\int\limits_{-\pi}^{\pi}W(r,\rho,\varphi,\psi)\cos n\psi\, d\rho d\psi=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1\rho p_n(\rho)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^\infty J_0\Big(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\Big)\big(1+R(st)\big)\cos n\psi\, d\rho d\psi dt,\quad (10.22)$$

$$I_2=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^1\rho p_n(\rho)\int\limits_{-\pi}^{\pi}W_{B/A}(r,\rho,\varphi,\psi)\cos n\psi\, d\rho d\psi.\quad (10.23)$$

Тоді інтегральне рівняння (10.21) набуває вигляду

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\left[I_1+I_2\right]=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(r)\cos n\varphi . \qquad (10.24)$$

.

Розглянемо у співвідношенні (10.22) інтеграл, який подамо у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\right)p(\rho,\psi)d\psi=\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}\left(J_0()\,p(\rho,\psi)\right)d\psi ,$$

де, виконавши у другому інтегралі заміну $\psi'=-\psi$, отримаємо:

$$\int_{0}^{\pi}\left[J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)}\right)+J_0\left(t\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi+\psi)}\right)\right]p(\rho,\psi)d\psi .$$

Після застосування теореми додавання для функції Бесселя [8], маємо:

$$\int_{0}^{\pi}\left[2J_0(tr)J_0(t\rho)+4\sum_{k=1}^{\infty}J_k(tr)J_k(t\rho)\cos k\varphi\cos k\psi\right]p(\rho,\psi)d\psi . \qquad (10.25)$$

Підставимо вираз (10.25) у вихідний інтеграл I_1 із (10.22):

$$I_1=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\rho p_n(\rho)\int_{0}^{\pi}\cos n\psi\int_{0}^{\infty}\left[2J_0(tr)J_0(t\rho)+\right.$$

$$\left.+4\sum_{k=1}^{\infty}J_k(tr)J_k(t\rho)\cos k\varphi\cos k\psi\right]\left(1+R(st)\right)d\rho d\psi dt$$

та обчислимо інтеграли за змінною ψ, враховуючи формулу (858.517) із праці [8].

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho)\int_{0}^{\pi}\cos n\psi\left[2J_0(tr)J_0(t\rho)+4\sum_{k=1}^{\infty}J_k(tr)J_k(t\rho)\cos k\varphi\cos k\psi\right]d\psi=$$

$$=2\pi p_0(\rho)J_0(tr)J_0(t\rho)+2\pi\sum_{n=1}^{\infty}p_n(\rho)J_n(tr)J_n(t\rho)\cos n\varphi=$$

$$=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho)J_n(tr)J_n(t\rho)\cos n\varphi .$$

Запишемо остаточний вигляд перетвореного інтеграла із рівняння (10.22):

$$I_1=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\rho p_n(\rho)\int_{0}^{\infty}J_n(tr)J_n(t\rho)\left(1+R(st)\right)d\rho dt\cdot\cos n\varphi . \qquad (10.26)$$

Розглянемо інтеграл I_2, визначений у співвідношенні (10.23),

$$I_2=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}W_{B/A}(r,\rho,\varphi,\psi)\cos n\psi\, d\rho d\psi ,$$

де

$$W_{B/A}(r,\rho,\varphi,\psi)=\int\limits_0^\infty J_0\left(t\cdot R(r,\rho,\varphi,\psi)\right)\left(1+R(st)\right)dt, \qquad (10.27)$$

$$R(r,\rho,\varphi,\psi)= \\ =\sqrt{4(B/A)^2+4(B/A)(r\cos\varphi+\rho\cos\psi)+r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\varphi+\psi).}\ . \qquad (10.28)$$

Розглянемо інтеграл (10.27)

$$W_{B/A}(r,\rho,\varphi,\psi)=\int\limits_0^\infty J_0\left(t\,R(r,\rho,\varphi,\psi)\right)\left(1+R(st)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{R(r,\rho,\varphi,\psi)}+\int\limits_0^\infty J_0\left(t\,R(r,\rho,\varphi,\psi)\right)R(st)dt.$$

Тут використали формулу (6.511) із праці [8]. У другому інтегралі підінтегральна функція $R(st)$ експоненційно спадає. Підставимо інтегральне подання функції Бесселя

$$J_0\left(t\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos[t(x+a)\cos\xi]\cos[t(y-b)\sin\xi]d\xi$$

в останній інтеграл, враховуючи заміну змінних (10.14):

$$W_{B/A}=\frac{1}{R(r,\rho,\varphi,\psi)}+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty R(st)\int\limits_0^{\pi/2} f(r,\rho,\varphi,\psi)d\xi dt, \qquad (10.29)$$

$$f(r,\rho,\varphi,\psi)=\cos[t(2B/A+r\cos\varphi+\rho\cos\psi)\cos\xi]\times \\ \times\cos[t(r\sin\varphi-\rho\sin\psi)\sin\xi].$$

Використавши відомі тригонометричні формули, знайдемо:

$$\cos[t_c(x+a)]\cos[t_s(y-b)]= \\ =\cos(t_cx)\cos(t_ca)\cos(t_sy)\cos(t_sb)+\cos(t_cx)\cos(t_ca)\sin(t_sy)\sin(t_sb)- \\ -\sin(t_cx)\sin(t_ca)\cos(t_sy)\cos(t_sb)-\sin(t_cx)\sin(t_ca)\sin(t_sy)\sin(t_sb).$$

Тут

$$t\cos\xi=t_c,\ \ t\sin\xi=t_s\,.$$

Підставимо вираз (10.29) в інтеграл I_2, визначений у (10.23):

$$I_2=A\int\limits_0^1\rho\sum_{n=0}^\infty p_n(\rho)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\psi\, d\rho d\psi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)}+$$

$$+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} R(st)\cos n\psi \int_0^{\pi/2} \widetilde{F} d\rho d\psi dt d\xi, \qquad (10.30)$$

де

$$\widetilde{F} = \cos\left[t_c(B/A + r\cos\varphi)\right]\cos\left[t_c(B/A + \rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s r\sin\varphi\right]\cos\left[t_s\rho\sin\psi\right] +$$
$$+\cos\left[t_c(B/A + r\cos\varphi)\right]\cos\left[t_c(B/A + \rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s r\sin\varphi\right]\sin\left[t_s\rho\sin\psi\right] -$$
$$-\sin\left[t_c(B/A + r\cos\varphi)\right]\sin\left[t_c(B/A + \rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s r\sin\varphi\right]\cos\left[t_s\rho\sin\psi\right] -$$
$$-\sin\left[t_c(B/A + r\cos\varphi)\right]\sin\left[t_c(B/A + \rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s r\sin\varphi\right]\sin\left[t_s\rho\sin\psi\right].$$

В інтегралі (10.30) використаємо парність підінтегральної функції $\widetilde{F}$ за змінною ξ : $\int_0^{\pi/2} \widetilde{F} d\xi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \widetilde{F} d\xi$ та зробимо заміну

$$\sin\xi = \tau,\;\; \cos\xi = \sqrt{1-\tau^2},\;\; d\xi = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}.$$

Застосуємо квадратурну формулу Гаусса до одержаного інтеграла:

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \widetilde{F} d\xi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \widetilde{F}(\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{N}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{F}(\tau_i^N).$$

Тут $\tau_i = \cos\frac{2i-1}{2N}\pi,\;\; i = \overline{1,N}$ − нулі полінома Чебишева першого роду.

Тоді інтеграл (10.30) перетворено до такого:

$$I_2 = A\int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\psi d\rho d\psi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)} +$$
$$+A\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \rho p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} R(st)\cos n\psi \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widetilde{F}(\tau_i^N) d\rho d\psi dt. \qquad (10.31)$$

Змінимо порядок інтегрування та розглянемо інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}\widetilde{F}(\tau_i^N)\cos n\psi d\psi =$$

$$= \cos\left(\tilde{t}_c\right)\cos\left[t_s r\sin\varphi\right]\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t_c(B/A + \rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s\rho\sin\psi\right]d\psi +$$

$$+\cos\left(\tilde{t}_c\right)\sin\left[t_s r\sin\varphi\right]\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t_c(B/A + \rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s\rho\sin\psi\right]d\psi -$$

$$-\sin\left(\tilde{t}_c\right)\cos\left[t_s r\sin\varphi\right]\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t_c(B/A+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s\rho\sin\psi\right]d\psi-$$

$$-\sin\left(\tilde{t}_c\right)\sin\left[t_s r\sin\varphi\right]\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t_c(B/A+\rho\cos\psi)\right]\sin\left[t_s\rho\sin\psi\right]d\psi\ ,$$

де $\tilde{t}_c = t_c(B/A + r\cos\varphi)$.

Видно, що у другому та четвертому інтегралах підінтегральні функції непарні, а отже, інтеграли дорівнюють нулю. У першому та третьому – парні, а тому можемо записати:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{F}(\tau_i^N)\cos n\psi d\psi=$$

$$=2\cos\left(\tilde{t}_c\right)\cos\left[t_s r\sin\varphi\right]\int_{0}^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t_c(B/A+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s\rho\sin\psi\right]d\psi-$$

$$-2\sin\left(\tilde{t}_c\right)\cos\left[t_s r\sin\varphi\right]\int_{0}^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t_c(B/A+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t_s\rho\sin\psi\right]d\psi.$$

Таким чином, для другого доданку (10.31), з урахуванням заміни $\sin\xi=\tau$, маємо:

$$2A\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\rho p_n(\rho)\int_0^{\infty}R(st)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\tilde{F}}(\tau_i^N)d\rho dt, \qquad (10.32)$$

де

$$\tilde{\tilde{F}}(\tau_i^N)=\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(B/A+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(B/A+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t\tau_i\rho\sin\psi\right]d\psi-$$

$$-\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(B/A+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(B/A+\rho\cos\psi)\right]\cos\left[t\tau_i\rho\sin\psi\right]d\psi\ .$$

Введемо позначення:

$$I_{ni}^{(1)}(\rho)=\int_0^{\pi}\cos n\psi\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,\rho\cos\psi\right]\cos\left[t\tau_i\rho\sin\psi\right]d\psi$$

$$I_{ni}^{(2)}(\rho)=\int_0^{\pi}\cos n\psi\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,\rho\cos\psi\right]\cos\left[t\tau_i\rho\sin\psi\right]d\psi. \qquad (10.33)$$

Виконавши перетворення, отримаємо вираз для доданка (10.32):

$$2A\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\rho p_n(\rho)\int_{0}^{\infty}R(st)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(2\,{}^{B}\!/\!_{A}+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]I_{ni}^{(1)}(\rho)-\right.$$
$$\left.-\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(2\,{}^{B}\!/\!_{A}+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]I_{ni}^{(2)}(\rho)\right\}d\rho dt.$$

Запишемо остаточний вираз для інтеграла I_2:

$$I_2 = A\int_{0}^{1}\rho\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\psi\, d\rho d\psi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)}+$$
$$+2A\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\rho p_n(\rho)\int_{0}^{\infty}R(st)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(2\,{}^{B}\!/\!_{A}+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]I_{ni}^{(1)}(\rho)-\right.$$
$$\left.-\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(2\,{}^{B}\!/\!_{A}+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]I_{ni}^{(2)}(\rho)\right\}d\rho dt. \qquad (10.34)$$

У результаті виконаних перетворень інтегральне рівняння (10.24), враховуючи (10.26), (10.34), запишемо у формі

$$-\frac{\mu_1^{-1}A}{4\pi G}\left[2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\rho p_n(\rho)\int_{0}^{\infty}J_n(tr)J_n(t\rho)\left(1+R(st)\right)d\rho dt\cdot\cos n\varphi+\right.$$
$$+\int_{0}^{1}\rho\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos n\psi\, d\rho d\psi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)}+$$
$$+2\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\rho p_n(\rho)\int_{0}^{\infty}R(st)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\cos\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(2\,{}^{B}\!/\!_{A}+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]I_{ni}^{(1)}(\rho)-\right.$$
$$\left.\left.-\sin\left[t\sqrt{1-\tau_i^2}\,(2\,{}^{B}\!/\!_{A}+r\cos\varphi)\right]\cos\left[t\tau_i r\sin\varphi\right]I_{ni}^{(2)}(\rho)\right\}d\rho dt\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(r)\cos n\varphi, \qquad (10.35)$$

де функцію $R(r,\rho,\varphi,\psi)$ визначено у (10.28), $I_{ni}^{(i)}(\rho),\quad i=0,1$ − у співвідношеннях (10.33), $R(st)=\dfrac{e^{-2st}-2st-1}{sh(2st)+2st}$.

Помножимо рівняння (10.35) на $\cos k\varphi,\quad k=0,1,2,...$ та проінтегрируємо на проміжку $\varphi\in[0,\pi]$, використовуючи ортогональність системи косинусів. Для першого доданку

$$I_1 = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} J_n(tr) J_n(t\rho)\big(1 + R(st)\big)\, d\rho dt \cdot \cos n\varphi$$

отримаємо:

$$I_1 = \pi^2 \tilde{\delta}_k \int_0^1 \rho p_k(\rho) \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(t\rho)\big(1 + R(st)\big)\, d\rho dt, \quad k = 0,1,2,..., \qquad (10.36)$$

де $\tilde{\delta}_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 1, & k \ge 1. \end{cases}$

Для другого матимемо:

$$I_2 = \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cdot \cos k\varphi d\rho d\psi d\varphi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)} +$$

$$+2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(st) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{nk}(r,\rho) d\rho dt, \qquad (10.37)$$

де

$$f_{nk}(r,\rho) = \cos\left[2 \tfrac{B}{A} t \sqrt{1-\tau_i^2}\right] \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) I_{ki}^{(1)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho) I_{ki}^{(2)}(r) \right\} -$$

$$- \sin\left[2 \tfrac{B}{A} t \sqrt{1-\tau_i^2}\right] \left\{ I_{ni}^{(1)}(\rho) I_{ki}^{(2)}(r) + I_{ni}^{(2)}(\rho) I_{ki}^{(1)}(r) \right\}.$$

Якщо ввести позначення

$$\tilde{F}_{nk}(r,\rho) = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \rho \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cos k\varphi d\rho d\psi d\varphi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \rho p_n(\rho) \int_0^{\infty} R(st) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{nk}(r,\rho) d\rho dt \;, \qquad (10.38)$$

інтегральне рівняння (10.35) після ортогоналізації за системою косинусів, враховуючи (10.36), (10.37), запишемо у вигляді

$$-\frac{\mu_1^{-1} A}{2\pi G} \left[\pi^2 \tilde{\delta}_k \int_0^1 \rho p_k(\rho) \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(t\rho)\big(1 + R(st)\big)\, d\rho dt + \tilde{F}_{nk}(r,\rho) \right] = f_k(r),$$

$$k = 0,1,2,..., \qquad (10.39)$$

Для правої частини рівняння (10.39) матимемо

$$f_k(r) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) \int_0^{\pi} \cos k\varphi \cos n\varphi d\varphi =$$

$$= f_0(r) \int_0^{\pi} \cos k\varphi d\varphi + f_1(r) \int_0^{\pi} \cos k\varphi \cos \varphi d\varphi = \pi \delta_{k0} f_0(r) + \tfrac{\pi}{2} \delta_{k1} f_1(r) .$$

Використаємо результат праці [19]

$$W_{\mu,\gamma}^{\nu}(x,y) = \int_0^{\infty} t^{\nu} J_{\mu}(tx) J_{\gamma}(ty) dt, \quad \operatorname{Re} \nu < 1, \quad \operatorname{Re}(\nu + \mu + \gamma) > -1,$$

де в нашому випадку інтеграл Вебера−Шафхейтліна набуває вигляду

$$W_{k,k}(r,\rho) = \int_0^{\infty} J_k(tr) J_k(t\rho) dt, \;\; \nu = 0, \;\; \mu = \gamma = k ,$$

$$2\sigma_+ = 1 - \nu + (\gamma - \mu) = 1, \;\; 2\sigma_- = 1 - \nu - (\gamma - \mu) = 1,$$

$$\sigma_{\pm} = \tfrac{1}{2}, \;\; 2\sigma = 1 + \nu + \gamma + \mu = 1 + 2k \Rightarrow \sigma = \tfrac{1}{2} + k .$$

Враховуючи співвідношення

$$\int_0^1 \frac{W_{k,k}(x,y)}{\sqrt{1-y^2}} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2) y^{k+1} dy = \sigma_{mk} x^k P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2x^2), \tag{10.40}$$

де $\sigma_{mk} = \dfrac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+k+\frac{1}{2})}{2m!\Gamma(m+k+1)}$, $P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2)$ − поліноми Якобі, розв'язок рівняння (10.39) шукатимемо у формі

$$p_k(\rho) = \frac{\rho^k}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) . \tag{10.41}$$

Підставимо розв'язок (10.41) у перший інтеграл рівняння (10.39) та використаємо співвідношення (10.40):

$$\int_0^1 \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) W_{k,k}(r,\rho) d\rho =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \frac{W_{k,k}(r,\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \rho^{k+1} d\rho =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \sigma_{mk} r^k P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2).$$

Підставивши розв'язок у другий інтеграл рівняння (10.39), отримаємо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} R(st) J_k(tr) J_k(t\rho) P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho dt \,.$$

У доданках, що залишилися, підставляли розвинення

$$p_n(\rho) = \frac{\rho^n}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)\,.$$

Після підставляння розв'язку (10.41) рівняння (10.39) матиме вигляд

$$-\frac{\mu_1^{-1} A}{2\pi G}\left[\pi^2 \tilde{\delta}_k \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \sigma_{mk} r^k P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1 \int_0^{\infty} \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} R(st) J_k(tr) J_k(t\rho) P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) d\rho dt \right\} + \tilde{\tilde{F}}_{nkl}(r,\rho) \right] =$$

$$= f_k(r), \; k = 0,1,2,..., \tag{10.42}$$

де

$$\tilde{\tilde{F}}_{nkl}(r,\rho) = \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cos k\varphi d\rho d\psi d\varphi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2) \int_0^{\infty} R(st) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_{nk}(r,\rho) d\rho dt.$$

Виконаємо ортогоналізацію за поліномами Якобі. Використаємо формулу (7.391(1)) із праці [8] з такою заміною змінних:

$$dx = -4ydy, \;\; x = 1-2y^2, \;\; x = -1 \to y = 1, \;\; x = 1 \to y = 0.$$

Врахуємо, що $\beta = -\frac{1}{2}, \;\; \alpha = k$. Тоді отримаємо формулу ортогональності:

$$\int_0^1 \frac{P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2) P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2y^2)}{\sqrt{1-y^2}} y^{2k+1} dy = \tilde{\sigma}_{jk} \delta_{jm}\,, \tag{10.43}$$

де $\tilde{\sigma}_{jk} = \dfrac{\Gamma(j+\frac{1}{2})\Gamma(k+j+1)}{2j!\Gamma(m+k+\frac{1}{2})(k+2j+\frac{1}{2})}$, δ_{jm} – символ Кронекера.

Враховуючи формулу (10.43), проінтегрируємо за змінною r на проміжку [0,1] рівняння (10.42) із ваговою функцією $r^{k+1}(1-r^2)^{-1/2} P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)$:

$$\int_0^1 \frac{P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2) P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}} r^{2k+1} dr = \tilde{\sigma}_{kj} \delta_{mj}\,,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} \int_0^1\int_0^1\int_0^{\infty} R(st) J_k(tr) J_k(t\rho) \frac{\rho^{k+1} P_m^{k,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{r^{k+1} P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}} d\rho dr dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} A_{mj}^{(k)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{r^{k+1} P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos n\psi \cos k\varphi d\rho dr d\psi d\varphi}{R(r,\rho,\varphi,\psi)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} C_{jnl}^{(k)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \int_0^1 \frac{\rho^{n+1} P_l^{n,-\frac{1}{2}}(1-2\rho^2)}{\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^1 \frac{r^{k+1} P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{\infty} R(st) \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_{nk}(r,\rho) d\rho dr dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} B_{jnl}^{(k)}.$$

Для правої частини рівняння (10.42) запишемо:

$$f_{kj} = -\int_0^1 \left[\delta_{k0}\delta + \tfrac{1}{2}\delta_{k1} r A \sin\omega\right] \frac{r^{k+1} P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}} dr .$$

Отримаємо двовимірну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\frac{\mu_1^{-1} A}{2G}\left[\delta_k \left\{\sigma_{kj}\widetilde{\sigma}_{kj} p_{kj} + \sum_{m=0}^{\infty} p_{km} A_{mj}^{(k)}\right\} + \tfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl}\left(C_{jnl}^{(k)} + B_{jnl}^{(k)}\right)\right] = f_{kj},$$

$$k, j = \overline{0,\infty}. \tag{10.44}$$

Регуляризуємо її зведенням до стандартного вигляду нескінченних двовимірних систем [21]:

$$x_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} t_{kjnl} x_{nl} = f_{kj}, \quad k, j = \overline{0,\infty},$$

де k, j – зовнішні ідекси, n, l – внутрішні. Позначимо:

$$\Lambda_{kj} = \widetilde{\sigma}_{kj} \cdot \sigma_{kj} .$$

Перетворимо доданок у співвідношенні (10.44):

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{km} A_{mj}^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} p_{kl} A_{lj}^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \delta_{nk} A_{lj}^{(k)} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} A_{lj}^{(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nk} p_{nl} = \sum_{l=0}^{\infty} p_{kl} A_{lj}^{(k)}.$$

Тоді

$$\tfrac{1}{2}\delta_k \left\{ \Lambda_{kj} p_{kj} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} A_{nl}^{(k)} \delta_{nk} \right\} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{nl} \widetilde{B}_{jnl}^{(k)} = \frac{2G\mu_1}{A} f_{kj},$$

де $\widetilde{B}_{jnl}^{(k)} = \frac{1}{\pi^2}\left(C_{jnl}^{(k)} + B_{jnl}^{(k)} \right)$.

Запишемо нескінченну систему (10.44) у вигляді

$$\Lambda_{kj} p_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \left[-A_{nl}^{(k)} \delta_{nk} - \widetilde{\delta}_k \widetilde{B}_{jnl}^{(k)} \right] p_{nl} = \widetilde{\delta}_k \frac{2G\mu_1}{A} f_{kj}, \tag{10.45}$$

де $\widetilde{\delta}_k = \begin{cases} 1, \; k = 0, \\ 2, \; k \geq 1. \end{cases}$

Для запису алебричної системи (10.45) у стандартній формі знайдемо асимптотику Λ_{kj}

$$\Lambda_{kj} = \frac{1}{4} \frac{j^{-1}}{k + 2j + \frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{j}\right)\right)\left(1 + O\left(\tfrac{1}{j+k}\right)\right),$$

оскільки асимптотичне подання напружень має вигляд

$$\sigma_{kj} = \frac{1}{2} j^{-\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{j}\right)\right) \frac{1}{(j+k)^{1/2}} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{j+k}\right)\right),$$

$$\widetilde{\sigma}_{kj} = \frac{1}{2} j^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{k + 2j + \frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{j}\right)\right) (j+k)^{1/2} \left(1 + O\left(\tfrac{1}{j+k}\right)\right).$$

Виконаємо заміну

$$\widetilde{p}_{kj} = \sqrt{\Lambda_{kj}}\, p_{kj},$$

після чого розділимо обидві частини рівняння (10.45) на $\sqrt{\Lambda_{kj}}$ та запишемо нескінченну систему у стандартній формі:

$$\widetilde{p}_{kj} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} T_{nlkj} \widetilde{p}_{nl} = \widetilde{f}_{kj}, \tag{10.46}$$

де

$$T_{nlkj} = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{kj}}\sqrt{\Lambda_{nl}}}\left[A_{lj}^{(k)}\delta_{nk} + \tilde{\delta}_k \tilde{B}_{jnl}^{(k)} \right], \tag{10.47}$$

$$\Lambda_{nl} = \left[\frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})}{2l!}\right]^2 \frac{1}{n+2l+\frac{1}{2}}, \quad \tilde{f}_{kj} = \tilde{\delta}_k \frac{2G\mu_1}{A}\frac{f_{kj}}{\sqrt{\Lambda_{kj}}}, \quad \tilde{\delta}_k = \begin{cases} 2, & k=0, \\ 1, & k \ge 1. \end{cases}$$

Вважаємо, що штамп під дією сили, прикладеної з ексцентриситетом e, рухається поступально, тобто кут повороту $\omega = 0$. Необхідно визначити ексцентриситет, що забезпечує таке переміщення. Права частина рівняння (10.46) у таких припущеннях має вигляд:

$$\tilde{f}_{kj} = \tilde{\delta}_k \cdot \delta_{k0}\frac{2G\mu_1}{A}\frac{\delta}{\sqrt{\Lambda_{kj}}}\int_0^1 \frac{r^{k+1}P_j^{k,-\frac{1}{2}}(1-2r^2)}{\sqrt{1-r^2}}dr \,.$$

Матриця коефіцієнтів має вигляд (10.47), де

$$A_{lj}^k = \int_0^1\int_0^1 \frac{\rho^{k+1}}{\sqrt{1-\rho^2}}P_l^{k,-\frac{1}{2}}\left(1-2\rho^2\right)\frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}}P_j^{k,-\frac{1}{2}}\left(1-2r^2\right)\int_0^\infty R(st)\,J_k(t\rho)\,J_k(tr)\,d\rho\, dr\, dt,$$

$$R(st) = \frac{e^{-2st}-1-2st}{sh\left(2st\right)+2st}, \quad s = \frac{h}{A},$$

$$\tilde{B}_{jnl}^k = \frac{1}{\pi^2}\left[C_{jnl}^k - B_{jnl}^k\right],$$

$$C_{jnl}^k = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}}P_l^{n,-\frac{1}{2}}\left(1-2\rho^2\right)\frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}}P_j^{k,-\frac{1}{2}}\left(1-2r^2\right)\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} F(\psi,\varphi;r,\rho)\,d\rho\, dr\, d\psi\, d\varphi,$$

$$F(\psi,\varphi;r,\rho) = \frac{\cos n\psi\cos k\varphi}{\sqrt{4b^2+4b(r\cos\varphi+\rho\cos\psi)^2+r^2+\rho^2+2r\rho\cos(\varphi+\psi)}},$$

$$B_{jnl}^k = \int_0^1\int_0^1 \frac{\rho^{n+1}}{\sqrt{1-\rho^2}}P_l^{n,-\frac{1}{2}}\left(1-2\rho^2\right)\frac{r^{k+1}}{\sqrt{1-r^2}}P_j^{k,-\frac{1}{2}}\left(1-2r^2\right)\int_0^\infty R(st)\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \tilde{F}(t,\tau_i,\rho,r)\,d\rho\, dr\, dt,$$

$$\tilde{F}(t,\tau_i,\rho,r) = \cos\left[2t\tfrac{B}{A}\sin\tau_i\right]\left\{I_{ni}^{(1)}(\rho)\,I_{ki}^{(1)}(r) - I_{ni}^{(2)}(\rho)\,I_{ki}^{(2)}(r)\right\} -$$
$$-\sin\left[2t\tfrac{B}{A}\sin\tau_i\right]\left\{I_{ni}^{(1)}(\rho)\,I_{ki}^{(2)}(r) + I_{ni}^{(2)}(\rho)\,I_{ki}^{(1)}(r)\right\},$$

$$I_{ni}^{(1)}(\rho) = \int_0^\pi \cos(n\psi)\,\cos\left[t\rho\cos\tau_i\sin\psi\right]\cos\left[t\rho\sin\tau_i\cos\psi\right]d\psi\,,$$

$$I_{ni}^{(2)}(\rho)=\int_0^{\pi}\cos(n\psi)\,\cos\left[t\,\rho\cos\tau_i\,\sin\psi\right]\,\sin\left[t\,\rho\sin\tau_i\,\cos\psi\right]d\psi\ ,$$

$$\tau_i=\frac{2i-1}{2N}\pi\,,\quad i=\overline{1,N}\,,$$

$$I_{ki}^{(1)}(r)=\int_0^{\pi}\cos k\psi\ \cos\left[t\,r\cos\tau_i\,\sin\psi\right]\cos\left[t\,r\sin\tau_i\,\cos\psi\right]d\psi\,,$$

$$I_{ki}^{(2)}(r)=\int_0^{\pi}\cos k\psi\ \cos\left[t\,r\cos\tau_i\,\sin\psi\right]\sin\left[t\,r\sin\tau_i\,\cos\psi\right]d\psi\,.$$

10.5. Встановлення моменту сили та осідання штампа

Систему (10.46) розв’язали методом редукції. У задачі присутні два невідомі параметри: δ – величина осідання штампа під дією нецентральної вертикальної сили; *M* – момент сили, що забезпечує необхідне переміщення; Шукані параметри знайдемо із умов рівноваги штампа:

1) сума проекцій усіх сил, прикладених до тіла, дорівнює нулю:

$$\int_0^{A}\int_0^{\pi}p(\rho,\psi)\rho d\rho d\psi=P;$$

2) сума моментів усіх сил, прикладених до тіла, дорівнює нулю:

$$\int_0^{A}\int_0^{\pi}p(\rho,\psi)\rho^2\sin\psi d\rho d\psi=M.$$

Отримані такі числові результати. Після переходу до безрозмірних величин переміщень та напружень у шарі, знайдені значення момента сили та осідання штампа у шар із міді (μ = 1/3, *G* = 44.7 *ГПа*) радіусом *A* = 1 для півнескінченного шару товщини *h* = 1 в залежності від відстані між бічною стінкою шару та центром штампа, тобто *B*. У таблиці наведено значення переміщень штампа та моменту сили, якщо відстані від бічної стінки шара до центру кругового штампа, рівні *B* = 1, *B* = 5, *B* = 10 відповідно.

Таблиця. Значення осідання штампа та моменту сили

B	δ	M
$B=1$	0.00291	0.51493
$B=5$	0.00235	0.51406
$B=10$	0.00290	0.51301

Таким чином, розв'язано контактну задачу про втискування кругового штампа позацентровою силою у півнескінченний пружний шар. Знайдені величина переміщення штампа та момент сили, що забезпечує поступальний рух штампа. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння для невідомого контактного тиску, яке розв'язано методом ортогональних поліномів.

Автори вдячні за підтримку проекту EffectFact number 101008140, що фінансується H2020 Programe MSC Action:Rise

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров В.М.* Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство // Инж. журн. Механика твердого тела. − 1967. − № 4. − С. 108−116.
2. *Аркадьєва Ю.О.* Задача про кільцевий штамп // Доп. АН УРСР. Сер. А. − 1962. − № 3. − С. 333−337.
3. *Бородачев Н.М., Бородачева Ф.Н.* Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство // Инж. журн. Механика твердого тела. − 1966. − № 4. − С. 158−161.
4. *Бородачева Ф.Н.* О вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство под действием вертикальной внецентренной силы // Изв. вузов. Строительство и архититектура − 1969. − № 8. − С. 15−20.
5. *Босаков С.В.* Об одном подходе в контактной задаче для круглого штампа на упругом основании // Прикл. механика. − 2008. − **44**, № 4. − С. 65−71.
6. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. − М.: Наука, 1974. − 456 с.
7. *Ворович И.И., Устинов Ю.А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // Прикл. математика и механика. − 1959. − **22**, вып. 3. − С. 445−454.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
9. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Контактная задача для двух круговых штампов на упругом полупространстве // Аннот. докл. 3-го Всесоюз. съезда по теор. и прикл. механике. − М., 1968. − С. 90−91.
10. *Губенко В.С., Моссаковский В.И.* Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство // Прикл. математика и механика. − 1960. − **24**, вып. 2. − С. 334−343.
11. *Егоров К.Е.* Контактная задача для упругого слоя при действии внецентренной вертикальной силы на круглый жесткий штамп // Докл. АН СССР. − 1960. − **133**, № 4. − С. 781−784.
12. *Лебедев Н.Н., Уфлянд Я.С.* Осесимметричная контактная задача для упругого слоя // Прикл. математика и механика. − 1958. − **22**, № 3. − С. 320−326.
13. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука,1982. – 344 с.

14. *Попов Г.Я.* О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям // Доклады РАН. – 2002. – **384**, №2. – С. 193–196.
15. *Попов Г.Я.* О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механіки // Прикл. механика. – 2003. – **39**, №12. − С. 46−73.
16. *Попов Г.Я.* Точное решение смешанной задачи теории упругости для четверти пространства // Изв. РАН. – Механика твердого тела. – 2003, №6. − С. 31 – 39.
17. *Попов Г.Я.*, *Вайсфельд Н.Д.* Смешанная краевая задача теории упругости для четверти пространства // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. − №5. − С. 68−89.
18. *Попов Г.Я.* Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе // Изв. АН Арм. ССР. Механика. − 1967. − **20**, №2. − С. 19−36.
19. *Попов Г.Я.* Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта // Прикл. математика и механика. – 1962. − **26**, вып.1. − С.152−164.
20. *Попов Г.Я.* О применении многочленов Якоби к решению интегральных уравнений // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1966. − **53**, №4. − С. 77−85.
21. *Попов Г.Я.* Основы теории двумерных бесконечных систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2010. − **53**, №2. − С.17−27.
22. *Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. – Алматы: Изд-во. Рауан, 1999. – 134 с.
23. *Попов Г.Я., Фесенко А.А.* Об одном новом методе решения пространственной задачи для упругого слоя // Проблемы машиностроения. – 2010. – **13**, №2. − С. 24–30.
24. *Фесенко А. А.* Об одном способе решения контактной задачи для упругого полуслоя // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Математика і механіка. − 2014. − **19**, вип. 3. − С. 93−105.

РОЗДІЛ 11

ЛОКАЛЬНЕ ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНИХ ПІВПРОСТОРІВ ІЗ ВИСТУПАМИ

О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк

Для поліпшення трибологічних характеристик вузлів машин і конструкцій застосовують різноманітні технології модифікування їх поверхонь, зокрема мікротекстурування [24], за якого на них формується регулярний мікрорельєф з періодично розташованими виступами чи виїмками однакового профілю. Для цього використовують лазерне текстурування, точне алмазне точіння, тиснення, гравіювання, вібропрокат, віброудар, струменеве абразивне оброблення, мікроелектроерозійне оброблення, шліфування та інші технології [22, 24, 33]. Регулярна поверхнева структура виникає також і під час дискретного зміцнення деталей (наприклад, технології електроіскрового легування), яке передбачає чергування вздовж поверхні зміцнених "острівців" або "стрічок" будь-якої конфігурації з незміцненими ділянками [11, 20]. У зв'язку з цим перед контактною механікою постає актуальна проблема розроблення методів дослідження фрикційної контактної взаємодії деформівних тіл з періодично змінними вздовж поверхні фізико-механічними, триботехнічними і геометричними характеристиками, зокрема з регулярним рельєфом.

В останні десятиліття інтенсивно розвиваються методи розв'язання зносо-контакних задач теорії пружності [1, 3–5, 10, 12, 16–19, 21, 23, 25, 26, 34]. Їхнє формулювання передбачає, що стирання відбувається по всій поверхні контакту. Водночас у реальних умовах експлуатації вузлів машин і механізмів зношування часто починається, коли фрикційні параметри досягнуть порогових значень. Для опису такого зношування в літературі запропоновано, зокрема, модель фрикційного втомного руйнування [2, 3] і термомеханічний критерій зношування [6].

У цьому розділі сформульовано контактні задачі про зношування тіл з виступами за повного налягання поверхонь тіл, використовуючи модель фрикційного втомного руйнування. Враховано, що стирання відбувається не на всій поверхні контакту, а лише на привершинних ділянках виступів, де питома сила тертя перевищує певне порогове значення. Розвинуто метод розв'язування задач цього класу, що полягає у зведенні їх до сингулярних інтегральних рівнянь на товщину зношеного матеріалу. Спочатку побудовано аналітичні розв'язки зносоконтакних задач для тіл з поодинокими виступами різної форми. Далі розв'язано зносоконтактні задачі для тіл з регулярним рельєфом, утвореним періодично розташованими виступами, та тіл з хвилястими поверхнями. Ці дослідження розпочато в працях [8, 13].

11.1. Метод дослідження локального зношування тіл з поодиноким виступом на основі моделі фрикційно-втомного руйнування

Розглянемо два пружні ізотропні півпростори з ідентичних матеріалів. Поверхня нижнього плоска, а верхній має вздовж нескінченної смуги завширшки $2c$ циліндричний виступ, форма якого задана парною функцією $r(x)$ $\left(r(\pm c)=0,\ r'(\pm c)=0\right)$ (рис. 11.1 *а*). Вважаємо, що максимальна висота виступу A мала порівняно з його основою ($A \ll c$). На нескінченності до півпросторів прикладено рівномірно розподілене навантаження P^{∞}, що зумовлює повне налягання поверхонь без просвітів між ними. В тілах реалізується стан плоскої деформації, що дає підстави [15] розглядати контакт двох півплощин D_1 та D_2 (рис. 11.1 *б*), які є перетинами відповідно нижнього та верхнього півпросторів площиною Oxy, перпендикулярною до твірної виїмки.

Одне з тіл нерухоме, а інше рухається з постійною швидкістю V в напрямі твірної виступу. Вважаємо, що сили тертя τ, які виникають на спряжених поверхнях внаслідок їхнього взаємного ковзання, підпорядковані закону Амонтона: $\tau = \tau_{y\tilde{z}} = fP$, де f – коефіцієнт тертя, P – контактний тиск. Досліджуватимемо зношування спряжених поверхонь, виходячи із моделі фрикційно-втомного руйнування, згідно з якою стирання розпочинається на тих ділянках, де питома сила тертя перевищує порогове значення τ_0. Вважаємо навантаження таким, що в початковий момент часу $t=0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується на деякій ділянці $L_0 = (-a; a)$ межі L під виступом ($a < c$), де виникає найбільший контактний тиск.

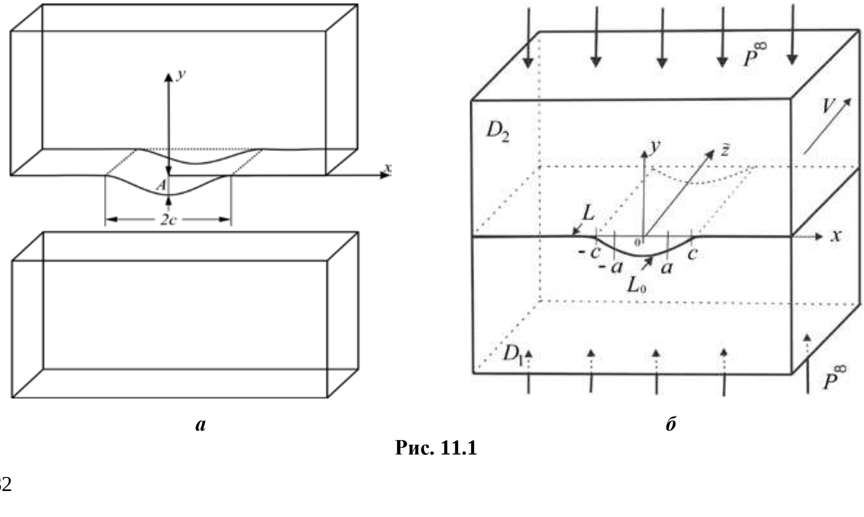


Рис. 11.1

Ділянка локального зношування L_0 розширюватиметься в часі внаслідок зменшення виступів: $L_0 = L_0(t) = (-a(t); a(t))$

Не обмежучи загальності, вважатимемо, що стирається лише тіло з виступом. Швидкість зношування описуватимемо законом [3]

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = BV\left[fP(x,t) - \tau_0 \right], \quad |x| \le a(t) \tag{11.1}$$

де $h(x,t)$ – товщина спрацьованого матеріалу; B – стала.

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд

$$\sigma_{yy}^{+} = \sigma_{yy}^{-}, \quad \tau_{xy}^{-} = \tau_{xy}^{+} = 0, \quad x \in L; \tag{11.2}$$

$$v^{+} + r(x) = v^{-}, \quad x \in L \setminus L_0; \tag{11.3}$$

$$v^{+} + r(x) + h(x,t) = v^{-}, \quad x \in L_0; \tag{11.4}$$

$$\sigma_{yy} = -P^{\infty}, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \tag{11.5}$$

Тут σ_{xx}, σ_{yy}, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – переміщення вздовж осі Oy; знаки „+” і „–” вказують на граничні значення функції на осі Ox у верхній і нижній півплощинах.

Використовуючи метод комплексних потенціалів та модифікований метод функцій міжконтактних просвітів [9, 13, 30–32], виразимо напруження і переміщення через початкову форму виступу $r(x)$ і товщину зношеного матеріалу $h(x,t)$:

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi_n(z) - \Phi_n(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} - P^{\infty}, \quad n = 1,2;$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi_n(z) + \Phi_n(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} + \frac{3-\kappa}{4}P^{\infty}, \quad z \in D_n,$$

$$\Phi_n(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{\pi K} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{h_s'(s,t)}{s - z} ds + \int_{-c}^{c} \frac{r'(s)}{s - z} ds,, \qquad z \in D_n, \tag{11.6}$$

де $z = x + iy$ – комплексна змінна; $\kappa = 3 - 4\nu$; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; $K = (\kappa + 1)/G$; $r'(s) = dr(s)/ds$; $h'(s,t) = \partial h(s,t)/\partial s$.

Використовуючи формули (11.6), для контактного тиску поверхонь $P(x,t) = -\sigma_{yy}^{\pm}(x,t)$ отримаємо:

$$P(x,t) = \frac{2}{\pi K}\left(\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{h_s'(s,t)}{s - z} ds + \int_{-c}^{c} \frac{r'(s)}{s - z} ds \right) + P^{\infty}. \tag{11.7}$$

Зауважимо, що функція товщини зношеного матеріалу $h(x,t)$ та ділянка зношення $a(t)$, які входять у співвідношення (11.6), (11.7), заздалегідь невідомі. Підставляючи контактний тиск (11.7) в закон зношування (11.1) для визначення функції $h(x,t)$ отримаємо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР):

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t}-\frac{2BfV}{\pi K}\int_{-a(t)}^{a(t)}\frac{h_s'(s,t)}{s-x}ds=\frac{2BfV}{\pi K}\int_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-x}ds+BfV\left(P^{\infty}-\tau_0\right). \quad (11.8)$$

Функція $h(x,t)$ задовольняє упочаткову умову

$$h(x,0)=0, \quad x\in L, \quad (11.9)$$

оскільки при $t=0$ знос відсутній. Під час зношування виступ змінює свою форму неперервно, залишаючись гладким. Тому функція $h(x,t)$ в кожен момент часу на кінцях ділянки стирання $L(t)$ задовольняє умови

$$h(\pm a(t),t)=0, \quad t>0, \quad (11.10)$$

$$h'(a(t),t)=0, \quad t>0. \quad (11.11)$$

Після припрацювання (при $t\to\infty$) контактний тиск на всій ділянці $L(t)$ стає рівним τ_0/f і зношення зупиняється, тобто $\partial h(x,t)/\partial t\to 0$ при $t\to\infty$. Врахувавши цю асимптотичну поведінку і здійснивши в інтегро-диференціальному рівнянні (11.8) граничний перехід при $t\to\infty$, отримуємо рівняння для визначення товщини зношеного матеріалу $h(x,\infty)$:

$$\frac{2}{\pi K}\int_{-a(\infty)}^{a(\infty)}\frac{h_s'(s,t)}{s-x}ds=-\frac{2}{\pi K}\int_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-x}ds-P^{\infty}+\frac{\tau_0}{f}. \quad (11.12)$$

Тоді умови (11.10), (11.11) мають вигляд

$$h(\pm a_{\infty},\infty)=0, \quad t>0, \quad (11.13)$$

$$h'(a_{\infty},\infty)=0, \quad t>0, \quad (11.14)$$

де $a_{\infty}=a(\infty)$ – кінцева півширина ділянки зношування.

Обмежений розв'язок рівняння (11.12), що задовольняє умову (11.14), визначатимемо за формулою [15]

$$h'(x)=-\frac{K\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2\pi}\int_{-a_{\infty}}^{a_{\infty}}\frac{F(\eta)d\eta}{\sqrt{a_{\infty}{}^2-\eta^2}\,(\eta-x)}, \quad (11.15)$$

де $F(x)=-\dfrac{2}{\pi K}\displaystyle\int_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-x}ds-P^{\infty}+\frac{\tau_0}{f}$. Такий розв'язок існує за виконання

додаткової умови на праву частину рівняння (11.12)

$$\int_{-a_\infty}^{a_\infty} \frac{F(\eta)d\eta}{\sqrt{a_\infty^2-\eta^2}}=0\,, \tag{11.16}$$

яка служить для визначення кінцевої півширини ділянки зношування a_∞ .

11.2. Аналітичні розв’язки задач про зношування тіл із виступами різної форми

Розглядатимемо дві форми виступу, що описуються функціями $r(x)=-A\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)^{3/2}$ і $r(x)=-A\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)^{5/2}$, $|x|\le c$.

а) Форма виступу задана функцією $r(x)=-A\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)^{3/2}$.

Згідно з формулою (11.7) такий виступ на початку взаємодії тіл зумовлює контактний тиск

$$P(x,0)=\begin{cases}\frac{6A}{Kc}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{c^2}\right)+P^\infty, & x\in(-c;c)\\ \frac{6A}{Kc}\left(\left|\frac{x}{c}\right|\sqrt{\frac{x^2}{c^2}-1}+\frac{1}{2}-\frac{x^2}{c^2}\right)+P^\infty, & x\notin(-c;c).\end{cases} \tag{11.17}$$

Проаналізуємо залежність (11.17) з метою визначення діапазону зміни зовнішнього тиску P^∞, за якого одночасно реалізуватиметься повний контакт тіл (без просвітів) і відбуватиметься локальне зношування. Мінімум контактного тиску досягається на кінцях виступу в точках $x=\pm c$ і рівний

$$\min_{x\in L} P(x,0)=P^\infty-\frac{3A}{cK}.$$

Очевидно, що контакт поверхонь тіл буде повним, якщо $\min\limits_{x\in L} P(x,0)>0$, отже,

$$P^\infty>\frac{3A}{cK}. \tag{11.18}$$

Локальне зношування виступу розпочнеться за виконання умови

$$P^\infty<\frac{\tau_0}{f}<\max_{x\in L} P(x,0)\,. \tag{11.19}$$

Коли $\min\limits_{x\in L} P\left(x,0\right) > \dfrac{\tau_0}{f}$, то зношування відбуватиметься вздовж всієї поверхні контакту, а якщо ж $\min\limits_{x\in L} P\left(x,0\right) < \dfrac{\tau_0}{f} < P^{\infty}$, тоді скрізь, за винятком двох скінченних проміжків в околі країв виступу $x = \pm c$, де контактний тиск мінімальний. Якщо ж $\max\limits_{x\in L} P\left(x,0\right) < \dfrac{\tau_0}{f}$, то зношування взагалі відсутнє.

Півширину ділянки, на якій розпочинається стирання, $a_0 = a\left(0\right)$ визначаємо з умови $P\left(a_0,0\right) = \dfrac{\tau_0}{f}$. Враховуючи в ній подання для контактного тиску (11.7) і початкову умову (11.9), отримуємо рівняння для знаходження a_0:

$$\frac{2}{\pi K}\int\limits_{-c}^{c}\frac{r'(s)}{s-a_0}ds = \frac{\tau_0}{f} - P^{\infty}. \tag{11.20}$$

Під вершиною виступу в точці $x = 0$ досягається максимальний тиск $\max\limits_{x\in L} P\left(x,0\right) = P^{\infty} + \dfrac{3A}{cK}$. Підставивши його в умову локального зношування (11.19), прийдемо до нерівності

$$\frac{\tau_0}{f} - \frac{3A}{cK} < P^{\infty} < \frac{\tau_0}{f}. \tag{11.21}$$

Нерівності (11.18), (11.21) не суперечать одна одній, якщо $\dfrac{\tau_0}{f} > \dfrac{3A}{cK}$. Отже, в лівій частині нерівності (11.22) стоїть додатна величина. Тому зі співвідношень (11.19), (11.22) отримуємо такий діапазон зміни навантаження

$$\max\left\{\left[\frac{3A}{cK}\right],\left[\frac{\tau_0}{f} - \frac{3A}{cK}\right]\right\} < P^{\infty} < \frac{\tau_0}{f}, \tag{11.22}$$

в якому дана пара локально зношується за повного контакту тіл. Ввівши параметр $\theta = \dfrac{cK}{3A}\left(\dfrac{\tau_0}{f} - P^{\infty}\right)$, умову (11.22) можемо записати в еквівалентному вигляді:

$$P^{\infty} = \frac{\tau_0}{f} - \frac{3\theta A}{cK}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{11.23}$$

Підставивши дану функцію $r\left(x\right)$ в умову (11.20) і рівняння (11.15) та врахувавши залежність (11.23), визначимо півширину початкової ділянки

зношування a_0 та функцію $h'(x,\infty)$:

$$a_0 = c\sqrt{\frac{1-\theta}{2}}\,,$$

$$h'(x,\infty) = -\frac{3A}{c^3}x\sqrt{a_\infty^2 - x^2}\,. \qquad (11.24)$$

Проінтегрувавши функцію (11.24) по x з урахуванням умови (11.13), визначимо товщину спрацьованого матеріалу

$$h(x,\infty) = A(1-\theta)^{3/2}\left(1-\frac{x^2}{a_\infty^2}\right)^{3/2}, \qquad |x| \le a_\infty\,. \qquad (11.25)$$

З умови (11.16) знайдемо півширину ділянки, де відбулося припрацювання

$$a_\infty = c\sqrt{1-\theta}\,.$$

Врахувавши у формулі (11.7) подання (11.25), визначимо контактний тиск після припрацювання :

$$P(x,\infty) = P(x,0) - \begin{cases} \dfrac{6A(1-\theta)}{Kc}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{a_\infty^2}\right), & x \in (-a_\infty; a_\infty) \\ \dfrac{6A(1-\theta)}{Kc}\left(\left|\dfrac{x}{a_\infty}\right|\sqrt{\dfrac{x^2}{a_\infty^2}-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{a_\infty^2}\right)+P^\infty, & x \notin (-a_\infty; a_\infty). \end{cases}$$

Всі обчислення у цьому розділі здійснено для наступних безрозмірних величин: координати $\tilde{x} = x/c$; максимальної висоти виступу $\tilde{A} = A/c$; зовнішнього навантаження на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0 = \dfrac{K\tau_0}{f}$; півширини ділянки виступу $\tilde{a} = a/c$, що зношується; функції $\tilde{H} = \left|\dfrac{r(x)-h(x)}{c}\right|$, яка описує форму виступу після зношування; контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x},t) = KP(x,t)$. Розраховували для виступу, безрозмірна висота якого $\tilde{A} = 0,001$.

На рис. 11.2 побудовано залежності початкової $\tilde{a}_0$ (штрихові криві) та кінцевої $\tilde{a}_\infty$ (суцільні криві) ділянок зношування виступу від зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty$ за різного порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$ (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,009$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,01$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,011$). Зі збільшенням

зовнішнього навантаження ділянки зношування зростають, причому кінцева ділянка зношування завжди більша від початкової.

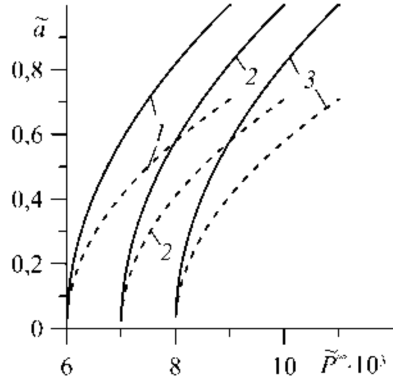


Рис. 11.2

Форму виступу в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0 = 0,009$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,007$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,008$, крива 3 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0085$) та при $\tilde{P}^{\infty} = 0,0085$ для різного порогового значення сили тертя (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,009$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,01$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,011$) зображено на рис. 11.3 та рис. 11.4 відповідно. Зі збільшенням навантаження

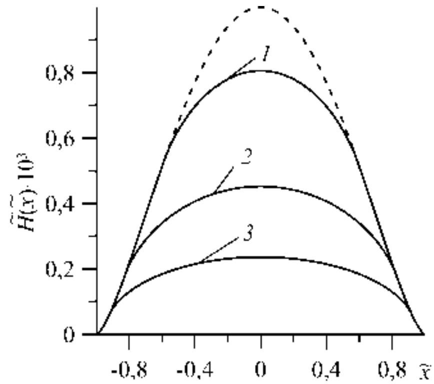


Рис. 11.3

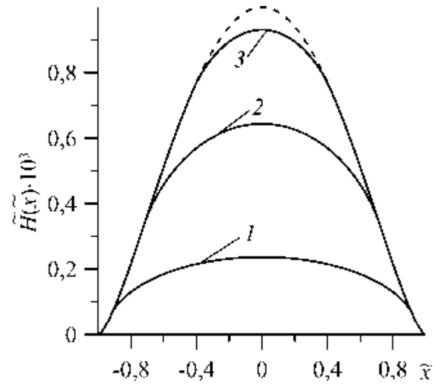


Рис. 11.4

$\tilde{P}^{\infty}$ товщина зношеного матеріалу збільшується; що більше порогове значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$, то менша товщина зношеного матеріалу.

Рис. 11.5 ілюструє розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t = 0$, штрихові криві) та після припрацювання (при $t \to \infty$,

суцільні криві) за $\tilde{P}^{\infty} = 0,007$ та $\tilde{\tau}_0 = 0,009$. Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

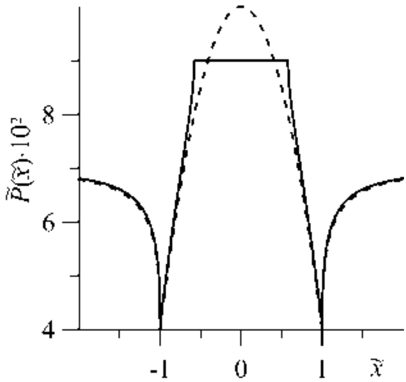


Рис. 11.5

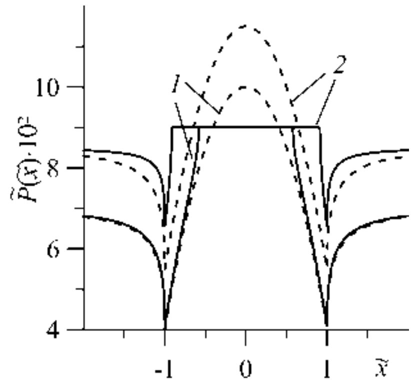


Рис. 11.6

Рис. 11.6 відтворює контактний тиск на початку стирання і після припрацювання при $\tilde{\tau}_0 = 0,009$ для різних значень навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,007$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0085$). Штрихові лінії зображають початковий тиск, а суцільні – кінцевий. Після припрацювання максимальний контактний тиск зменшується, а мінімальний зростає. Що більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та кількість зношеного матеріалу. Контактний тиск після припрацювання зі збільшенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним тиском. Мінімальний контактний тиск має гострий пік на кінцях виступу ($\tilde{x} = \pm 1$).

б) Форма виступу задана функцією $r(x) = -A\left(1 - \dfrac{x^2}{c^2}\right)^{5/2}$.

Виступ на початку взаємодії тіл зумовлює контактний тиск

$$P(x,0) = \begin{cases} \dfrac{10A}{Kc^5}\left[x^4 - \dfrac{3}{2}c^2x^2 + \dfrac{3}{8}c^4\right] + P^{\infty}, & x \in (-c;c) \\ \dfrac{10A}{Kc^5}\left[|x|\left(x^2 - c^2\right)^{\frac{3}{2}} + x^4 - \dfrac{3}{2}c^2x^2 + \dfrac{3}{8}c^4\right] + P^{\infty}, & x \notin (-c;c). \end{cases} \qquad (11.26)$$

Рівняння відносно півширини початкової ділянки зношування a_0 матиме вигляд

$$\frac{10A}{Kc}\left(-\frac{a_0^4}{c^4}+\frac{3a_0^2}{2c^2}-\frac{3}{8}\right)=\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right), \tag{11.27}$$

Товщина спрацьованого матеріалу, кінцева ділянка зношування та тиск після припрацювання визначаються наступним чином:

$$h(x,\infty)=\frac{A\left(1-\sqrt{\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)}\right)^{5/2}}{2a_\infty^5}\left(a_\infty^2-x^2\right)^{3/2}\times$$
$$\times\left(3a_\infty^2-\frac{5a_\infty^2}{1-\sqrt{\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)}}+2x^2\right),\qquad |x|\le a_\infty, \tag{11.28}$$

$$a_\infty=\sqrt{1+\sqrt{\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)}}, \tag{11.29}$$

$$P(x,\infty)=P(x,0)-$$
$$-\begin{cases}\dfrac{10A(1-\theta)}{Kc}\left(\dfrac{x^4}{a_\infty^2}-\dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{a_\infty^2}+\dfrac{3}{8}\right), & x\in(-a_\infty;a_\infty)\\ \dfrac{10A(1-\theta)}{Kc}\left(\left|\dfrac{x}{a_\infty}\right|\left(\dfrac{x^2}{a_\infty^2}-1\right)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{x^4}{a_\infty^2}-\dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{a_\infty^2}+\dfrac{3}{8}\right)+P^{\infty}, & x\notin(-a_\infty;a_\infty),\end{cases} \tag{11.30}$$

де $\theta=\frac{4A}{15cK}\left(\tau_0-P^{\infty}\right)$.

На рис. 11.7 зображено форму виступу в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0=0,009$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty}=0,006$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty}=0,007$, крива 3 – $\tilde{P}^{\infty}=0,008$).

Розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t=0$) та після припрацювання (при $t\to\infty$) за $\tilde{P}^{\infty}=0,007$ та $\tilde{\tau}_0=0,009$ ілюструє рис. 11.8 (штрихова та суцільна криві відповідно). Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

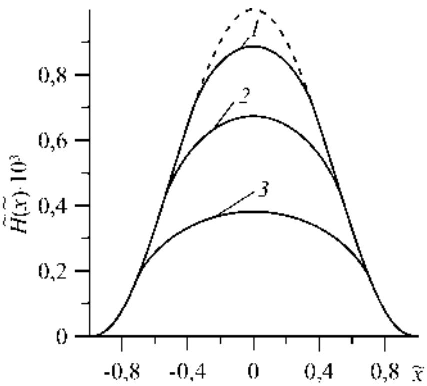


Рис. 11.7

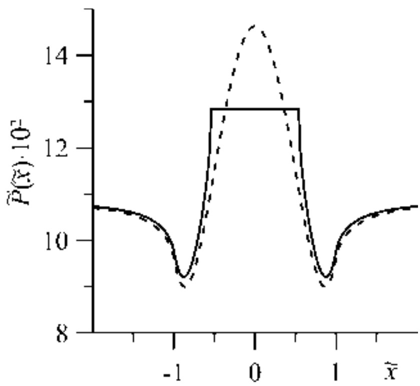


Рис. 11.8

11.3. Зносоконтактна задача для тіла із регулярною системою виступів

Розглянемо два пружні ізотропні півпростори з ідентичних матеріалів. Поверхня нижнього тіла плоска, а поверхня верхнього має регулярну текстуру, яка утворена періодичною системою циліндричних виступів симетричної форми $r(x)$ (рис. 11.9), завширшки $2b$ кожний, розташованих з періодом d вздовж всієї межі.

Верхнє тіло рухається з постійною швидкістю V в напрямі твірної виступів (рис. 11.10). Зумовлене тертям зношування будемо досліджувати на основі моделі фрикційного втомного руйнування, описаній в підрозділі 11.1. Вважаємо навантаження таким, що в початковий момент часу $t=0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується під кожним виступом лише на деякій ділянці $L_m = (-a+md, a+md)$, $m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, інтерфейсу L $(a < b)$, де виникає найбільший контактний тиск. Періодично розташовані ділянки локального зношування L_m розширюватимуться з часом внаслідок зміни геометрії поверхонь тіл. Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що стирається лише тіло з виступами. Швидкість зношування описуватимемо законом (11.1).

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд (11.2)-(11.5), де $L_0 = L_0(t) = \cup L_m$.

В цьому випадку задачу зведено до СІДР з ядром Гільберта відносно функції зношування $h(x,t)$:

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} - \frac{2AfV}{dK} \int\limits_{L_0(t)} h'_s(s,t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds = AfVR(x), \quad x \in L_0(t), \quad (11.31)$$

де $R(x) = \dfrac{2}{dK}\int\limits_{-b}^{b} r'(s)\operatorname{ctg}\dfrac{\pi(s-x)}{d}ds + P^{\infty} - \dfrac{\tau_0}{f}$.

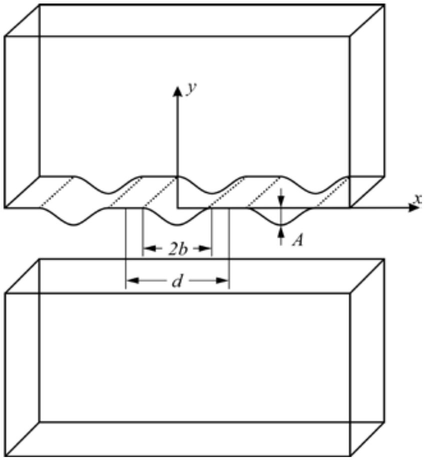


Рис. 11.9

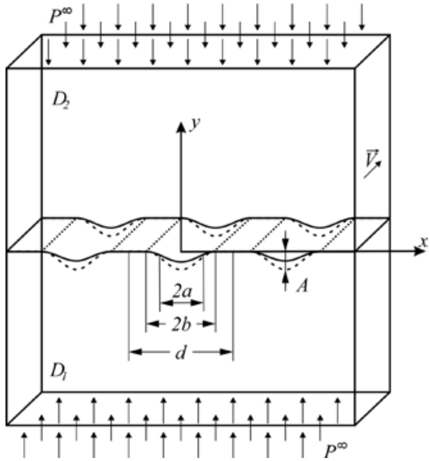


Рис. 11.10

Функція $h(x,t)$ задовольняє умови:

$$h(x,0) = 0, \quad x \in L, \tag{11.32}$$

$$h(\pm a(t),t) = 0, \;\; h'(a(t),t) = 0 \quad t > 0, \tag{11.33}$$

Після припрацювання $(t \to \infty)$ контактний тиск на всій ділянці $L_0(\infty)$ стає рівним τ_0/f і зношення зупиняється, тобто $\partial h(x,t)/\partial t \to 0$ при $t \to \infty$. Враховуючи цю асимптотичну поведінку і здійснивши в рівнянні (11.31) граничний перехід при $t \to \infty$, отримаємо СІР для визначення товщини зношеного матеріалу $h(x,\infty)$:

$$\frac{2}{dK}\int\limits_{L_0(\infty)} h_s'(s,\infty)\operatorname{ctg}\frac{\pi(s-x)}{d}ds = -R(x). \tag{11.34}$$

Умови (11.33) при $t \to \infty$ мають вигляд

$$h(\pm a_\infty,\infty) = 0, \quad h_x'(\pm a_\infty,\infty) = 0, \quad a_\infty = a(\infty). \tag{11.35}$$

Виконавши заміну змінних

$$\xi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{d}\right), \; \eta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi s}{d}\right), \; \gamma = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi b}{d}\right), \; \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{d}\right), \tag{11.36}$$

СІР (11.34) з ядром Гільберта трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta,t)}{\eta-\xi} d\eta = \frac{d}{2\left(1+\xi^2\right)} K\left(\frac{\tau_0}{f} - P^{\infty}\right) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\eta)}{\eta-\xi} d\eta \,, \; |\xi| \le \alpha \,. \tag{11.37}$$

Умови (11.34) після заміни змінних (11.36) матимуть вигляд

$$h'(\pm\alpha_{\infty},\infty) = 0 \,, \quad h(\pm\alpha_{\infty},\infty) = 0 \,. \tag{11.38}$$

Шукатимемо обмежений розв’язок рівняння (11.37), який задовольняє першу умову в (11.38). Його визначаємо за формулою

$$h'(\xi) = -\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\pi^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\eta)d\eta}{\sqrt{\alpha^2-\eta^2}\,(\eta-\xi)} \,, \tag{11.39}$$

де $F(\eta) = \frac{d}{2\left(1+\eta^2\right)} K\left(\frac{\tau_0}{f} - P^{\infty}\right) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\psi)}{\psi-\eta} d\psi$.

Він існує за виконання додаткової умови на праву частину СІР (11.37):

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\xi)d\xi}{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}} = 0 \,. \tag{11.40}$$

Розглянемо виступи, форму яких задає функція

$$r(x) = -A\left[1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) / \,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi b}{d}\right)\right]^{3/2}, \; |x| \le b \,, \tag{11.41}$$

де $A = r(0)$ – максимальна висота виїмки ($A \ll b$).

У нових змінних (11.36) ця функція має вигляд

$$r(\xi) = -A\left(1 - \xi^2/\gamma^2\right)^{3/2} . \tag{11.42}$$

Такі виступи зумовлюють на початку взаємодії тіл контактний тиск [29, 30]

$$P(\xi) = P^{\infty} + 6A\pi\left(1+\xi^2\right)\left[-\xi^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right] \Big/ (\gamma^3 K) \,, \qquad |\xi| < \gamma \,; \tag{11.43}$$

$$P(\xi) = P^{\infty} + \frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{\gamma^3 K}\left[|\xi|\sqrt{\xi^2-\alpha^2} - \xi^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right], \; \gamma \le |\xi| \le 1/2 \,. \tag{11.44}$$

Інтервал ($-\alpha(0);\alpha(0)$), на якому розпочинається стирання, визначаємо з умови $P(\alpha(0),0) = \frac{\tau_0}{f}$. Враховуючи в ній подання для контактного тиску (11.43), (11.44) і початкову умову (11.30), отримуємо рівняння для знаходження $\alpha_0 = \alpha(0)$:

$$\frac{6A\pi\left(1+\alpha_0^2\right)}{\gamma^3}\left[\frac{\gamma^2}{2}-\alpha_0^2\right]=K\frac{\tau_0}{f}-KP^\infty . \qquad (11.45)$$

Обчисливши функцію $h'(\xi,\infty)$ зі співвідношення (11.45) і проінтегрувавши її з урахуванням другої умови з (11.41), визначимо товщину спрацьованого матеріалу:

$$h\left(\xi\right)=\frac{dK\left(\frac{\tau_0}{f}-P^\infty\right)}{2\pi}\left[\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}-\operatorname{arcth}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right)\right]+$$

$$+\frac{A}{\gamma^3}\left(\alpha^2-\xi^2\right)^{3/2}, \qquad \left|\xi\right|\le\alpha_\infty . \qquad (11.46)$$

Із додаткової умови (11.40) отримаємо рівняння для ділянки, де відбулося припрацювання

$$\frac{3A\pi}{\gamma d}\left[\frac{\alpha_\infty^2}{\gamma^2}-1\right]+\frac{K\frac{\tau_0}{f}-KP^\infty}{\sqrt{\alpha_\infty^2+1}}=0 . \qquad (11.47)$$

Контактний тиск поверхонь після припрацювання матиме вигляд:

$$P\left(\xi,\infty\right)=P\left(\xi,0\right)-\frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{d\gamma^3K}\left[-\xi^2+\frac{\alpha_\infty^2}{2}\right]+$$

$$+\frac{K\left(\frac{\tau_0}{f}-P^\infty\right)}{\sqrt{\alpha_\infty^2+1}}\left[\sqrt{\alpha_\infty^2+1}-1-\xi^2\right], \qquad \alpha\le\xi<\gamma ; \qquad (11.48)$$

$$P\left(\xi,\infty\right)=P\left(\xi,0\right)-\frac{6A\pi\left(1+\xi^2\right)}{d\gamma^3K}\left[\left|\xi\right|\sqrt{\xi^2-\alpha_\infty^2}-\xi^2+\frac{\alpha_\infty^2}{2}\right]+$$

$$+\frac{K\left(\frac{\tau_0}{f}-P^\infty\right)}{\sqrt{\alpha_\infty^2+1}}\left[\left|\xi\right|\sqrt{\xi^2-\alpha_\infty^2}+\sqrt{\alpha_\infty^2+1}-1-\xi^2\right], \quad \gamma\le\xi\le 1/2 . \qquad (11.49)$$

Розраховували при таких вхідних даних: $d=1$; $\tilde{A}=0{,}001$.

На рис. 11.11 побудовано залежності початкової $\tilde{a}_0$ (штрихові криві)та кінцевої $\tilde{a}_\infty$ (суцільні криві) ділянок зношування виступу від зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty$ за різного порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$ (крива 1 –

$\tilde{\tau}_0 = 0,038$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,05$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,063$). Зі збільшенням зовнішнього навантаження ділянки зношування зростають.

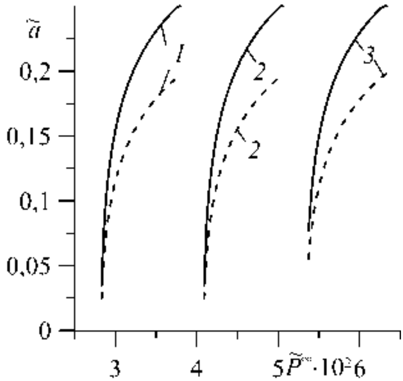


Рис. 11.11

Форму виступів в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0 = 0,038$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0325$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$, крива 3 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0374$) та при $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$ для різного порогового значення сили тертя (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,063$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,05$) уздовж періоду $x \in [-0,5; 0,5]$ показано на рис. 11.12 та рис. 11.13 відповідно. Зі збільшенням навантаження товщина зношеного матеріалу збільшується; що більше порогове значення сили тертя, то менша товщина зношеного матеріалу.

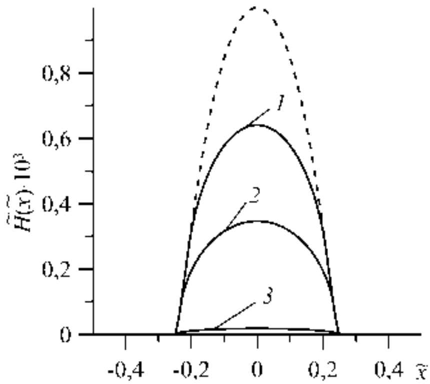


Рис. 11.12

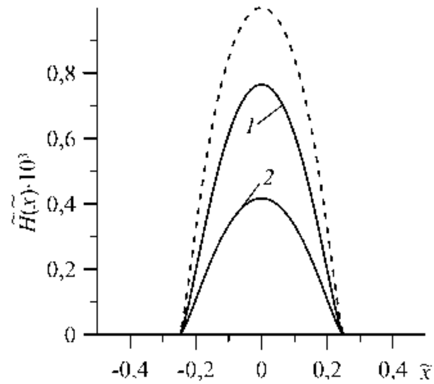


Рис. 11.13

На рис. 11.14 зображено розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t = 0$, штрихова крива) та після припрацювання (при $t \to \infty$,

суцільна крива) за $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$ та $\tilde{\tau}_0 = 0,038$ уздовж періоду $x \in [-0,5;0,5]$. Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

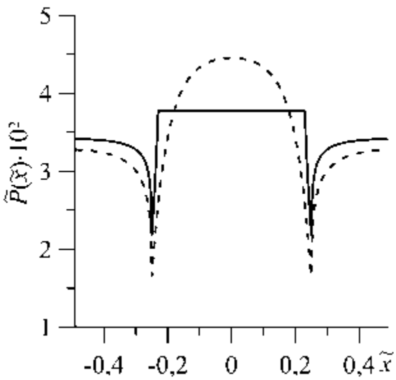


Рис. 11.14

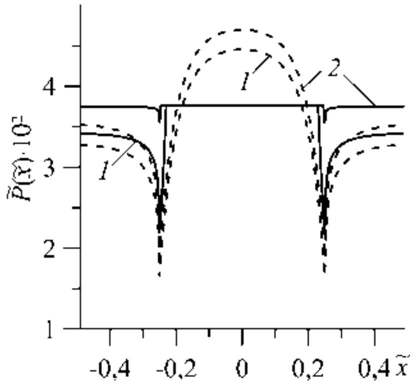


Рис. 11.15

Рис. 11.15 ілюструє контактний тиск на початку і після припрацювання при $\tilde{\tau}_0 = 0,038$ для різних значень навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,035$, крива 2 – $\tilde{P}^{\infty} = 0,0374$). Штрихові лінії зображають початковий тиск, а суцільні – кінцевий. Після припрацювання максимальний контактний тиск зменшується, а мінімальний зростає. Що більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та кількість зношеного матеріалу. Контактний тиск після припрацювання зі збільшенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним тиском.

11.4. Зносоконтактна задача для тіла з хвилястою поверхнею

Розглянемо взаємодію двох ізотропних пружних півнескінченних тіл D_1 і D_2 з ідентичних матеріалів. Поверхня одного з них (D_1) плоска, а іншого (D_2) – хвиляста, що описує функція $r(x) = -A\cos^2(\pi x/d)$, $x \in [-\infty;\infty]$ (рис. 11.16). Амплітуда хвилястої поверхні A значно менша від періоду d ($A \ll d$). Будемо досліджувати локальне зношування тіл на основі моделі фрикційного втомного руйнування.

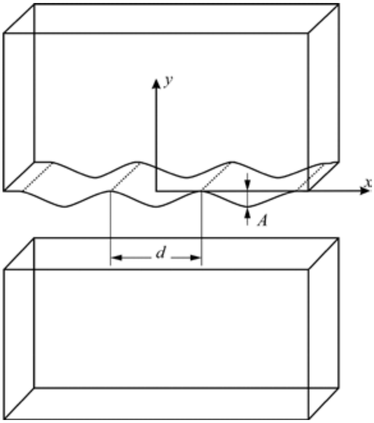


Рис. 11.16

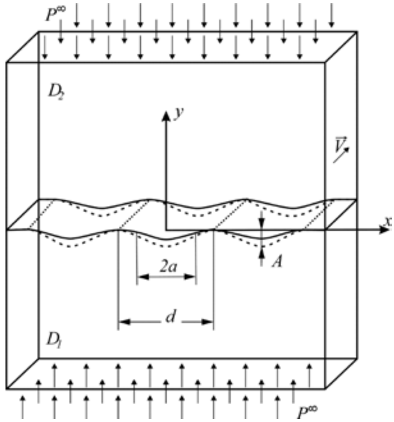


Рис. 11.17

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд (11.2)-(11.5). Поверхнева нерівність $r(x)$, яка після заміни змінних (11.36) має наступний вигляд

$$r(\xi) = -\frac{A}{1+\xi^2} \tag{11.50}$$

на початку взаємодії тіл зумовлює контактний тиск [7, 27, 28, 31]

$$P(\xi,0) = P^{\infty} - \frac{2A\pi\left(\xi^2-1\right)}{Kd\left(\xi^2+1\right)}. \tag{11.51}$$

Інтервал $(-\alpha_0;\alpha_0)$, на якому розпочинається стирання, визначаємо з умови $P\left(\alpha(0),0\right) = \frac{\tau_0}{f}$. Враховуючи в ній подання для контактного тиску (11.51), отримуємо рівняння для знаходження α_0:

$$\frac{2A\pi\left(\alpha_0^2-1\right)}{d\left(\alpha_0^2+1\right)} + K\left(\frac{\tau_0}{f} - P^{\infty}\right) = 0. \tag{11.52}$$

Після припрацювання $(t \to \infty)$ контактний тиск на всій ділянці $L_0(\infty)$ стає рівним τ_0/f і зношення зупиняється, тобто $\partial h(x,t)/\partial t = 0$ при $t \to \infty$. Враховуючи цю асимптотичну поведінку з використанням методу функцій міжконтактних зазорів сформульовану контактну задачу зведено до СІДР з ядром Гільберта відносно функції зношування $h(x,\infty)$, яке після заміни змінних (11.36) трансформувалося у СІР з ядром Коші:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{h'(\eta,\infty)}{\eta-\xi}d\eta=\frac{dK\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{\pi\left(1+\xi^2\right)}+\frac{2A\left(\xi^2-1\right)}{\left(1+\xi^2\right)^2},\quad x\in L_0(t)\,. \qquad (11.53)$$

Згідно з умовою $h'(\pm\alpha_{\infty},\infty)=0$ визначаємо обмежений розв’язок СІР (11.53):

$$h'(\xi,\infty)=-\frac{2A}{\sqrt{\alpha^2+1}}\frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\left(1+\xi^2\right)^2}-$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2+1}}\left(\frac{A\pi}{\alpha^2+1}-\frac{dK\left(\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}\right)}{2}\right)\frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\left(1+\xi^2\right)}. \qquad (11.54)$$

Він існує за виконання додаткової умови на праву частину СІР (11.54), з якої отримуємо рівняння для ділянки, де відбулося припрацювання:

$$\frac{\tau_0}{f}-P^{\infty}-\frac{2A\pi}{Kd\left(\alpha_{\infty}^2+1\right)}=0 \qquad (11.55)$$

Проінтегрувавши вираз (11.54) за умови $h(\pm\alpha_{\infty},\infty)=0$ та із використанням співвідношення (11.55), визначимо товщину спрацьованого матеріалу:

$$h\left(\xi\right)=\frac{A}{\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\left(\frac{\sqrt{\alpha_{\infty}^2-\xi^2}}{1+\xi^2}+\frac{\operatorname{arcth}\left(\frac{\sqrt{\alpha_{\infty}^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\right)}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right),\quad \left|\xi\right|\le\alpha_{\infty}\,. \qquad (11.56)$$

Контактний тиск поверхонь після припрацювання матиме вигляд:

$$P\left(\xi,\infty\right)=P\left(\xi,0\right)+\frac{4A\pi}{dK\sqrt{\alpha_{\infty}^2+1}}\frac{\left|\xi\right|\sqrt{\xi^2-\alpha_{\infty}^2}}{1+\xi^2}\,. \qquad (11.57)$$

Розраховували при таких вхідних даних: $d=1$; $\tilde{A}=0{,}001$.

На рис. 11.18 зображено залежності початкової $\tilde{a}_0$ (штрихові криві)та кінцевої $\tilde{a}_{\infty}$ (суцільні криві) ділянок зношування виступу від зовнішнього навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ за різного порогового значення сили тертя $\tilde{\tau}_0$ (крива 1 –

$\tilde{\tau}_0 = 0,00785$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,0094$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,011$). Зі збільшенням зовнішнього навантаження ділянки зношування зростають.

Форму виступів в початковий момент (штрихова крива) та після зношування (суцільні криві) за $\tilde{\tau}_0 = 0,00785$ при різних зовнішніх навантаженнях (крива 1 – $\tilde{P}^\infty = 0,005$, крива 2 – $\tilde{P}^\infty = 0,006$, крива 3 – $\tilde{P}^\infty = 0,0075$) та при $\tilde{P}^\infty = 0,0075$ для різного порогового значення сили тертя (крива 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,00785$, крива 2 – $\tilde{\tau}_0 = 0,0094$, крива 3 – $\tilde{\tau}_0 = 0,011$) уздовж періоду $x \in [-0,5; 0,5]$ показано на рис. 11.19 та рис. 11.20 відповідно. Зі збільшенням навантаження товщина зношеного матеріалу збільшується. Що більше порогове значення сили тертя, то менша товщина зношеного матеріалу.

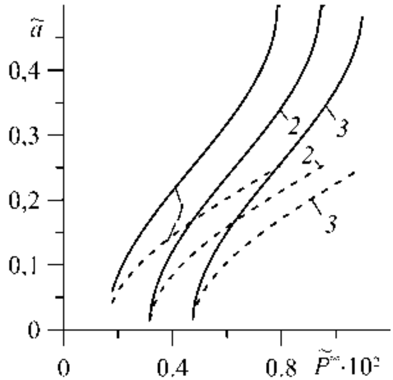


Рис. 11.18

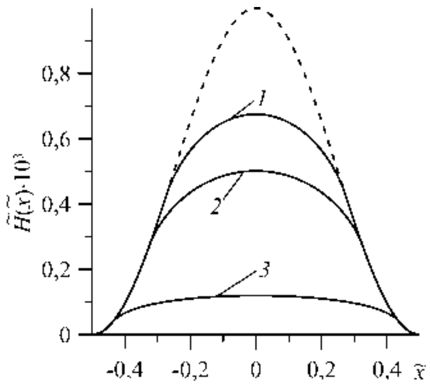


Рис. 11.19

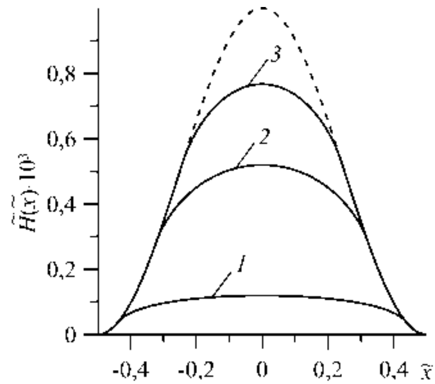


Рис. 11.20

На рис. 11.21 зображено розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ на початку контакту (при $t = 0$, штрихова крива) та після припрацювання (при $t \to \infty$,

суцільна крива) за $\tilde{P}^{\infty}=0,006$ та $\tilde{\tau}_0=0,00785$ уздовж періоду $x\in[-0,5;0,5]$. Горизонтальна ділянка суцільних кривих відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування. Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування.

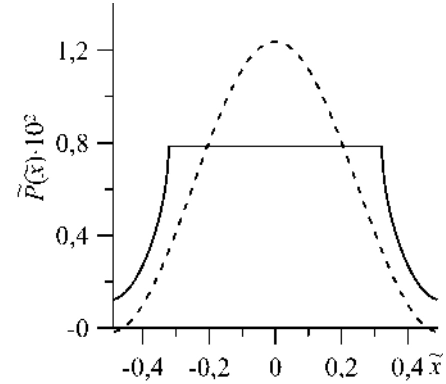


Рис. 11.21

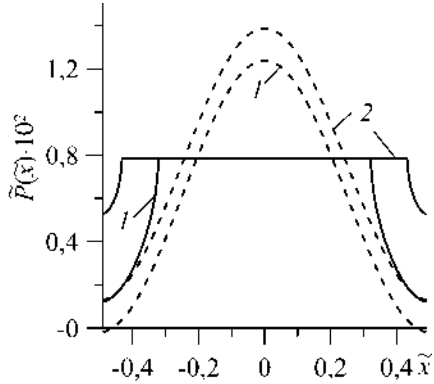


Рис. 11.22

Рис. 11.22 відтворює контактний тиск на початку і після припрацювання при $\tilde{\tau}_0=0,00785$ для різних значень навантаження $\tilde{P}^{\infty}$ (крива 1 – $\tilde{P}^{\infty}=0,006$, 2 – $\tilde{P}^{\infty}=0,0075$). Штрихові лінії зображають початковий тиск, а суцільні – кінцевий. Після припрацювання максимальний контактний тиск зменшується, а мінімальний зростає. Що більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та кількість зношеного матеріалу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров В.М.* О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // Докл. АН СССР. – 1983. – № 12. – С. 827-831.
2. *Андрейкив А.Е., Панасюк В.В., Чернец М.В.* К теории износа материалов при сухом трении // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1981. – **17**, № 2. – С. 99-104.
3. *Андрейкив А.Е., Чернец М.В.* Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. – К.: Наукова думка , 1991 – 160 с.
4. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
5. *Грилицький Д.В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: ІЗМН, 1996. – 204 с.

6. *Евтушенко А.А., Уханская О.М.* Термомеханический критерий изнашивания // Трение и износ. – 1994. – **15**, № 3. – С. 379–388.
7. *Козачок О.П.* Вплив часткового заповнення просвітів стисливою рідиною на контакт пружних тіл із хвилястим рельєфом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2020. – **56**, № 3. – С. 24-30.
8. *Козачок О.П.* Локальне фрикційне зношування пружного півпростору з виступом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2021. – **57**, № 6. – С. 42-48.
9. *Козачок О.П., Мартиняк Р.М., Слободян Б.С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
10. *Кузьменко А.Г.* Методи розрахунків на зношування та надійність. – Хмельницький: ТУП, 2002. – 151 с.
11. *Ляшенко Б.А., Новиков Н.В., Клименко С.А.* Дискретное модифицирование поверхностного слоя деталей машин и инструментов. – К.: ИСМ им. В.Н. Бакуля, 2017. – 264 с.
12. *Максимук О.В.* Зношування покрить твердих тіл з урахуванням проміжкового шару // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 1. – С. 121–123.
13. *Мартиняк Р.М.* Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 102–108.
14. *Мартиняк Р.М., Швець Р.М., Глод А.В.* Припрацювання рухомих півпросторів за часткового зношування виступу на поверхні контакту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 1. – С. 51-58.
15. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 600 с.
16. *Пелех Б.Л., Максимук А.В.* Математическое моделирование процессов износостойкости тел с покрытиями // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 19811. – Вып. 37. – С. 51–56.
17. *Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1988. – 280 с.
18. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Контактна задача про зношування пружної півплощини штампами канонічної форми // Вісник Тернопільськ. нац. ун-ту. – 2015. – № 2. – С. 70-80.
19. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Контактна задача про зношування пружної півплощини з покриттям Вінклера штампами канонічної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 136-140.
20. *Ткачук Н.А., Дьяченко С.С., Посвятенко Э.К., Кравченко С.А., Гончаров В.Г., Шпаковский В.В., Белов Н.Л., Шейко А.И., Олейник А.К., Пономаренко И.В.* Континуальная и дискретно–континуальная

модификация поверхностей деталей. – Х.: Щедра садиба плюс, 2015. – 259 с.

21. *Чернець М.В.* Трибоконтактні задачі для циліндричних з’єднань з технологічною некруглістю. – Люблін: Люблінська політехніка, 2013. – 273 с.
22. *Шнейдер Ю.Г.* Эксплуатационные свойства деталей с регулярным микрорельефом. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2001. – 264 с.
23. *Brauer J., Andersson S.* Simulation of wear in gears with flank interference – A mixed FE and analytical approach // Wear. – 2003. – **254**, No. 11. – P. 1216–1232.
24. *Etsion I.* State of the art in laser surface texturing // Trans. ASME. J. Tribol. – 2005. – **127**, No. 1. – P. 248–253.
25. *Goryacheva I.G.* Contact mechanics in tribology. – Kluwer, Dordrecht, 1998. – 346 p.
26. *Goryacheva I.G.* Wear process for coated bodies with periodic microgeometry at the interface // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – No. 61. – P. 48–52.
27. *Kozachok O.P.* Influence of partial filling of the gaps with compressible liquid on the contact of elastic bodies with wavy surfaces // Mater. Sci. – 2020. – **56**, No. 3. – P. 310-318.
28. *Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.* Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps // Mater. Sci. – 2018. – **54**, No. 2. – P. 194-201.
29. *Kozachok O.P., Slobodyan B.S., Martynyak R.M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Mater. Sci. – 2016. – **51**, No. 6. – P. 804–813.
30. *Kozachok O.P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 2. – P. 131–142.
31. *Kozachok O.P., Martynyak R.M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Mathematics and Mechanics of Solids. – 20111. – **24**, No. 11. – P. 3381–3393.
32. *Shvets R.M., Martynyak R.M., Kryshtafovych A.A.* Discontinuous contact of an anisotropic half–plane and a rigid base with disturbed surface // Int. J. Eng. Sci. – 1996. – **34**, No. 2. – P. 183–200.
33. *Stepien P.* Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // Wear. – 2011. – **271**, No. 3–4. – P. 514–518.
34. *Zhan W., Huang P.* Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact // Friction. – 2019 – **7**. – P. 143–152.

РОЗДІЛ 12

КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ З УРАХУВАННЯМ ЗНОШУВАННЯ МАТЕРІАЛУ

О.В. Максимук, Ю.В. Сачук

Досліджено контактні задачі про взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної, параболічної) з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. Використовуючи модель абразивного зношування, побудовано сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску. Розроблена методика розв'язування інтегрального рівняння, що зводить задачу до узагальненої проблеми на власні значення. На основі отриманих власних значень проведено числові розрахунки контактного тиску. Розроблено алгоритм пошуку області контакту в будь-який момент часу при заданій силі притискання штампа. Для фіксованих моментів часу знайдено області контакту, досліджено величину зношування в часі для різних форм штампів.

Розглянуто контактну взаємодію жорстких тіл (штампів) канонічної форми з пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера, з урахуванням зношування проміжного шару. В умовах плоскої задачі теорії пружності побудовано основне інтегро-диференціальне рівняння для визначення контактного тиску між штампом і покриттям. Розвинуто методику розв'язування інтегро-диференціального рівняння з використанням поліномів Чебишова, яка зводить задачу до системи лінійних алгебричних рівнянь. Для розв'язування інтегрального рівняння було запропоновано покроковий алгоритм за часом, згідно з яким час роботи фрикційної пари зі зношуванням розбивається на малі відрізки часу за припущення, що область контакту і контактний тиск є постійними на кожному часовому проміжку. Числово визначено розподіл контактного тиску в різні часові моменти. Досліджено і проаналізовано особливості зношування покриття для різних за формою штампів.

12.1 Зношування півплощини штампами канонічної форми

Розглянемо контактну задачу про взаємодію штампів канонічної форми з пружною півплощиною із урахуванням зношування матеріалу. У пружну півплощину вдавлюється силою P жорсткий штамп з основою $f(x)$, який рухається зі швидкістю V у напрямку, перпендикулярному до площини рисунка 12.1. Досліджуватимемо контакт пружної півплощини зі штампами:

1) параболічної форми $f(x) = -\dfrac{x^2}{2R}$, де R – радіус кривини в точці $x=0$;

2) циліндричної форми $f(x) = -R + \sqrt{R^2 - x^2}$, де R – радіус циліндра;

3) еліптичної форми $f(x) = -b_1 + \frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^{\,2} - x^2}$, де a_1, b_1 – велика та мала півосі еліпса;

4) гіперболічної форми $f(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^{\,2} + x^2}$, де a_1, b_1 – величини дійсної та уявної півосей гіперболи.

Для числових розрахунків вибрано $a_1 = R$, $b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$. На рис. 12.1 схематично показано взаємодію для штампів циліндричної форми (штрихована область) і відповідно еліптичної, гіперболічної або параболічної форм.

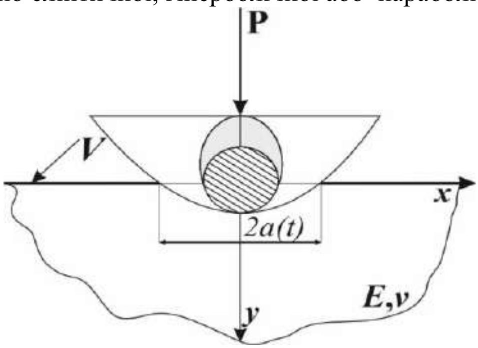


Рис. 12.1

Внаслідок тертя відбувається абразивне зношування матеріалу за лінійної залежності сили тертя від сили тиску [14]:

$$\upsilon_*(x,t) = k_1 k_2 V \int_0^t p(x,t)dt, \tag{12.1}$$

де $p(x,t)$ – контактний тиск, υ_* – зміщення за рахунок зношування, k_1 - коефіцієнт тертя, k_2 – коефіцієнт пропорційності між роботою сили тертя та кількістю зношеного матеріалу, V – швидкість взаємного проковзування, t - час роботи фрикційної пари. У випадку лінійної моделі зношування з урахуванням пружного зміщення штампа сингулярне інтегро-диференціальне рівняння матиме вигляд [14]

$$\frac{1}{\alpha}\int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi,t)\frac{d\xi}{\xi - x} = k_1 k_2 V \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} p(x,t)dt - \frac{df(x)}{dx}, \tag{12.2}$$

де $2\,a(t)$ - область контакту, $\alpha = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$.

Контактний тиск у кожен момент часу t повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x,t)dt \ , \ p(\pm a(t),t) = 0 \ . \tag{12.3}$$

Варто зауважити, що у (12.2) область контакту змінна в часі, а контактний тиск залежить від просторової та часової координати.

Для розв'язування інтегро-диференціального рівняння (12.2) застосуємо метод відокремлення змінних з подальшим використанням поліномів Чебишова. Аналогічний підхід до розв'язування такого типу задач зустрічаємо в праці Галіна Л.О. [4] про зношування балки жорстким штампом.

Контактний тиск шукаємо у вигляді

$$p(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2k}(x) e^{-\alpha_{2k} t} \ . \tag{12.4}$$

Для числових розрахунків введемо безрозмірні величини: $\overline{p}(\overline{x},\overline{t}) = p(x,t)/\alpha$, $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)/a_0$, $\overline{x} = x/a_0$, $\overline{t} = t(\alpha k_1 k_2 V)/a_0$, де a_0 – початкова область контакту при $t = 0$. Надалі рисочки не пишемо.

Підставивши (12.4) у рівняння (12.2) та прирівнюючи члени в правій та лівій частині при $t = 0$ та $(1 - e^{-\alpha_{2k} t})$, отримаємо систему інтегро-диференціальних сингулярних рівнянь, перше з яких неоднорідне, а інші – однорідні:

$$\int_{-1}^{1} p(\tau,0) \frac{d\tau}{\tau - x} = \frac{df(x)}{dx} \ , \tag{12.5}$$

$$\alpha_{2k} \int_{-1}^{1} \phi_{2k}(\tau) \frac{d\tau}{\tau - x} - \frac{d\phi_{2k}(x)}{dx} = 0 \ , \text{ при } k = 1, 2, \ldots \tag{12.6}$$

Варто зауважити, що запис контактного тиску у вигляді (12.4) є достовірним, бо α_{2k} – власні значення для задачі (12.6) і відповідно $e^{-\alpha_{2k} t}$ – лінійно незалежні функції.

Згідно з [14] подаємо власні функції $\phi_{2k}(x)$ у вигляді рядів за поліномами Чебишова другого роду $U_n(x)$ (штамп має заокруглені краї). Відомо [11], що функції $\phi_{2k}(x)$ утворюють базис в просторі L_2. Із врахуванням другої умови (12.3) вони мають вигляд

$$\phi_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1 - x^2}\, U_{2m}(x) \ , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12.7}$$

Для подальших математичних перетворень використано відомі [11] формули для поліномів Чебишова:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-x)}=\pi U_{n-1}(x),\quad \int_{-1}^{1}U_n(\tau)\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-x)}d\tau=\pi T_{n+1}(x), \tag{12.8}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_{2m+1}(x)T_{2k+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, m\neq k,\\ \pi/2, m=k,\end{cases} \tag{12.9}$$

де $T_n(x)$ – поліноми Чебишова першого роду.

Підставляючи (12.7) у (12.6), отримаємо рівняння

$$a_{2k}\sum_{m=0}^{\infty}a_m^k(-\pi)T_{2m+1}(x)+\sum_{m=0}^{\infty}a_m^k\frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}(2m+1)=0\,. \tag{12.10}$$

Домножаючи кожен член рівняння (12.10) на $T_{2i+1}(x)$ при $i=\overline{1,n}$ та інтегруючи від –1 до 1, отримуємо узагальнену задачу на власні значення:

$$(A-a_{2k}B)X=0\,,\ k=\overline{1,n}\ , \tag{12.11}$$

де a_m^k – власні вектори, а $X=X(a_0^k,a_1^k,...)$.

Матриці *A* і *B* мають вигляд:

$$A=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0 & ... & ...\\ 0 & 3/2 & 0 & ... & ...\\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & ...\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & 0 & \dfrac{2n+1}{2}\end{pmatrix},\ B=(b_{ij})_{n,n}\,, \tag{12.12}$$

де $b_{ij}=\int_{-1}^{1}T_{2i+1}(x)T_{2j+1}(x)dx$.

Матриці A і B є додатньо визначеними та симетричними. Тому, згідно з працями [3, 8, 10, 19], всі власні значення є дійсними і мають той же знак, що і власні значення задачі $(A-a_{2k}I)X=0$, тобто є додатними.

У цей час не існує теоретично доведених алгоритмів для прямого розв'язування узагальненої задачі (12.11) на власні значення [3, 10, 19, 22, 23]. Існує декілька підходів, які дозволяють розв'язати узагальнену проблему на власні значення наближеними методами. Ці підходи можна умовно поділити на дві групи: до першої належать алгоритми, які потребують попередньо спеціального зведення матриць до певної стандартної форми (узагальнений метод Якобі, метод Холецького) [24], а початкові (вхідні) матриці мають бути додатньо визначені та симертичні; до другої - ітераційні методи, що не потребують спеціального зведення до QZ, QW алгоритмів факторизації [19, 22, 23].

Нагадаємо, що матриця B розміром $n \times n$ називається додатньо визначеною, якщо $\langle Bx, x \rangle > 0$ для будь яких n-векторів x.

Згідно з [19, 24], матриця B є симетричною додатньо визначеною тоді і тільки тоді, коли існує нижня трикутна матриця L, така що $B = LL^T$. Подання $B = LL^T$ називається розкладом Холецького .

Елементи матриці L можна обчислити, починаючи з її верхнього лівого кута, за формулами:

$$l_{ii} = \sqrt{b_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}\ ,\ l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}(b_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk})\ , \text{якщо}\ \ j < i\ . \qquad (12.13)$$

Вираз у правій частині (12.13) під коренем завжди додатній, якщо матриця B – додатньо визначена.

Якщо для матриці B відомий розклад Холецького, то рівняння (12.11) набуде вигляду

$$AX = \lambda LL^T X\ ,\ L^{-1}AX = \lambda L^T X\ . \qquad (12.14)$$

Проведемо заміну змінних $y = L^T X$ або $X = L^{-T} y$. Тоді рівняння (12.11) матиме вигляд

$$L^{-1}AL^{-T} y = \lambda y\ ,$$

а позначивши $\overline{A} = L^{-1}AL^{-T}$, маємо стандартну задачу на власні значення:

$$\overline{A}y = \lambda y\ . \qquad (12.15)$$

Отже, узагальнена задача (12.11) зводиться до стандартної задачі на власні значення із симетричною матрицею $\overline{A}$.

Метод QZ - факторизації матриць також полягає у приведенні матриць до спеціальної форми і зведенні узагальненої задачі до стандартної. Особливістю цього методу є те, що він підходить і для несиметричних матриць, які не обов'язково є додатньо визначеними [22, 23].

Нехай $A \in R^{n \times n}$. Матриця A є факторизованою у формі QZ, якщо

$$A = QZ\ , \qquad (12.16)$$

де матриця Q є ортогональною матрицею, тобто $Q^T Q = QQ^T = I_{n \times n}$, і Z – дійсна матриця, в якій додатними є лише діагональні елементи [44].

У праці [22] наведено алгоритм факторизації (12.16) та доведено його теоретичну збіжність і спосіб приведення матриці A за допомогою загального алгоритму QW.

Розробка алгоритмів згідно з QW та QZ- факторизацією є актуальною задачею із прикладним застосуванням у галузі механіки [10].

На основі отриманих вхідних даних знайдено власні вектори та значення за описаним методом розкладу Холецького. Для достовірності отриманих

результатів задачу на власні значення (12.11) було розв'язано методом QZ-факторизації. Варто зауважити, що власні значення α_{2k} за обома методами збігаються, але власні вектори a_m^k однакові з точністю до постійного множника. Важливо, що розв'язок системи (12.6) не залежить від форми штампа.

При побудові ряду контактного тиску за формулою (12.4) важливим чинником є кількість членів ряду, тобто скільки власних значень взято для обчислень. В табл. 12.1 наведено власні значення при $n = 7, 11, 17$ для узагальненої проблеми (12.13), де n – кількість членів ряду (12.4).

Таблиця 12.1

n=7	0.63	1.63	2.62	3.63	4.84	7.48	23.22				
n=11	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.68	8.11	10.88	12.45	55.49
n=17	0.63	1.63	2.63	3.63	4.63	5.63	6.63	7.63	8.63	9.63	10.72
	12.16	14.38	18	24.8	40.44	129.98					

Під час числового експерименту було виявлено, що для побудови ряду (12.4) для штампа параболічної форми достатньо одинадцяти власних значень. За малих областей контакту ($a / R \leq 0{,}15$) така кількість власних значень є достатньою і для штампів гіперболічної, циліндричної та еліптичної форм. Для знаходження невідомих областей контакту, більших за 0,15, для забезпечення похибки обчислень 10^{-5} кількість власних значень має бути не менше сімнадцяти. У табл. 12.2 наведено власні вектори, отримані за методом Холецького.

Таблиця 12.2

1.0093	-0.5643	0.4284	0.3578	-0.3131	-0.2822	0.2751	-0.3183	-0.3949	0.5183	0.9364
-0.2934	-0.6339	0.5161	0.4297	-0.3713	-0.3303	0.3180	-0.3630	-0.4404	0.5627	0.9676
0.0028	0.5743	0.2256	0.3473	-0.3545	-0.3382	0.3369	-0.3943	-0.4828	0.6162	1.0116
-0.0050	-0.1114	-0.6779	-0.1450	-0.0926	-0.1924	0.2496	-0.3449	-0.4731	0.6513	1.0593
-0.0023	0.0185	0.2886	-0.5887	0.3827	0.1618	-0.0133	-0.1412	-0.3497	0.6325	1.1016
-0.0013	0.0021	-0.0704	0.4574	0.3481	0.4367	-0.3474	0.2073	-0.0705	0.5191	1.1286
-0.0008	0.0019	0.0062	-0.1720	-0.5433	0.0446	-0.3455	0.4704	0.3123	0.2799	1.1283
-0.0005	0.0013	-0.0028	0.0352	0.3053	-0.5030	0.2157	0.2616	0.5798	-0.0761	1.0868
-0.0004	0.0009	-0.0013	-0.0078	-0.0965	0.4280	0.3742	-0.3548	0.4255	-0.4645	0.9881
-0.0003	0.0006	-0.0010	-0.0007	0.0240	-0.1898	-0.5011	-0.3752	-0.1745	-0.7123	0.8132
-0.0002	0.0005	-0.0008	-0.0012	-0.0020	0.0558	0.2430	0.4758	-0.5849	-0.6113	0.5327

У табл. 12.3 та 12.4 наведено власні значення та відповідні їм власні вектори отримані QZ-методом.

Таблиця 12.3

55.4891	12.4561	10.8892	0.6386	1.6314	8.1159	2.6292	3.6282	6.6757	4.6276	5.6278

Таблиця 12.4

0.8297	-0.7276	0.6750	-1	-0.8902	-0.6688	-0.6319	0.6078	0.5490	0.5763	-0.5610
0.8573	-0.7900	0.7530	0.2907	-1.0000	-0.7629	-0.7613	0.7300	0.6346	0.6835	-0.6568
0.8964	-0.8651	0.8254	-0.0028	0.9060	-0.8287	-0.3328	0.5899	0.6724	0.6525	-0.6724
0.9386	-0.9143	0.8088	0.0049	-0.1758	-0.7248	1.0000	-0.2464	0.4981	0.1705	-0.3826
0.9761	-0.8880	0.5979	0.0023	0.0292	-0.2968	-0.4258	-1.0000	-0.0266	-0.7044	0.3217
1.0000	-0.7287	0.1205	0.0013	0.0034	0.4357	0.1038	0.7769	-0.6933	-0.6407	0.8682
0.9998	-0.3930	-0.5339	0.0008	0.0031	0.9886	-0.0092	-0.2922	-0.6895	1.0000	0.0887
0.9630	0.1068	-0.9912	0.0005	0.0020	0.5497	0.0042	0.0597	0.4305	-0.5620	-1.0000
0.8755	0.6521	-0.7275	0.0004	0.0014	-0.7457	0.0019	-0.0132	0.7468	0.1776	0.8509
0.7205	1.0000	0.2984	0.0003	0.0010	-0.7885	0.0015	-0.0011	-1.0000	-0.0442	-0.3774
0.4720	0.8582	1.0000	0.0002	0.0008	1.0000	0.0012	-0.0021	0.4849	0.0038	0.1110

Відзначимо, що отримані за обома методами власні значення збігаються і є додатними (див. табл. 12.1 і 12.3). Для методу QZ-факторизації порядок значень є відмінним від розкладу Холецького у зв'язку з особливістю алгоритмів розкладу вхідних матриць в QZ-методі. Власні вектори (таблиця 12.2, таблиця 12.4) однакові з точністю до постійного множника. Ці особливості не впливають на подальші розрахунки і числові результати за обома методами повністю збігаються.

Для однозначного визначення власних векторів a_m^k функції $\phi_{2k}(x)$ запишемо у вигляді [14]

$$\phi_{2k}(x) = d_k \sum_{m=0}^{\infty} a_m^k \sqrt{1-x^2}\, U_{2m}(x)\,. \tag{12.17}$$

Підставивши їх у рівняння (12.5), дістаємо співвідношення

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \sum_{m=0}^{n} a_m^k (-\pi) T_{2m+1}(x) = -\frac{df(x)}{dx}\,. \tag{12.18}$$

Домножаючи (12.18) на $T_{2i+1}(x)/\sqrt{1-x^2}$ при $i=\overline{1,n}$ та інтегруючи по x від -1 до 1, отримаємо неоднорідну систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$CX = b\,, \tag{12.19}$$

де

$$C = \frac{-\pi^2}{2}\begin{vmatrix} a_0^0 & a_0^1 & ... & a_0^n \\ a_1^0 & a_1^1 & ... & a_1^n \\ . & . & . & . \\ a_n^0 & a_n^1 & ... & a_n^n \end{vmatrix},\; X = \begin{vmatrix} d_0 \\ d_1 \\ ... \\ d_n \end{vmatrix}, \tag{12.20}$$

b – стовпчик вільних членів, елементи якого задаються формулою

$$b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{vmatrix},\; b_i = \int_{-1}^{1} -f'(x) T_{2i+1}(x)/\sqrt{1-x^2}\,dx\,,\;\; i=\overline{1,n}\,. \tag{12.21}$$

Для параболічного штампа елементи стовпчика вільних членів (12.21) можна знайти аналітично. Щоб знайти ці елементи для інших штампів канонічної форми, потрібно провести заміну $x = \cos(\phi)$.

Після математичних перетворень коефіцієнти b_i (12.21) для всіх штампів матимуть вигляд

$$b_i = -(1+\varepsilon)\frac{2a_0}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2i+1)\phi)\cos(\phi)}{\sqrt{1 \pm \frac{a_0}{R}\cos^2(\phi)}}\, d\phi\,,\ i = \overline{1,n}\,. \qquad (12.22)$$

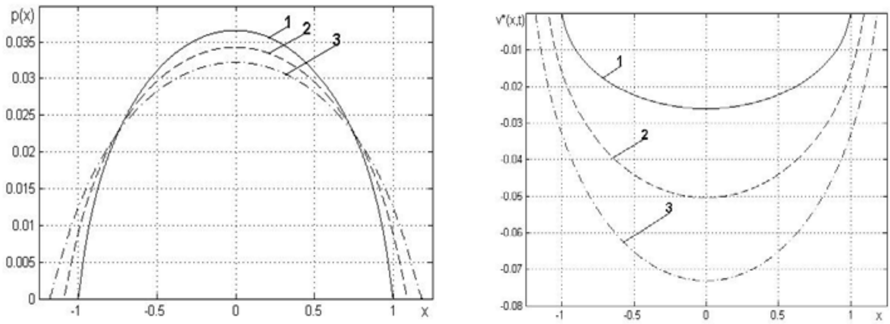
Знак «+» у знаменнику відповідає гіперболічному штампу, знак «–» – еліптичному, а знак «–» та $\varepsilon = 0$ – циліндричному.

Розв’язавши систему (12.19), із застосуванням вбудованої функції *mldivide(C,b),* Matlab, яка використовує LU- декомпозицію, що є різновидом методу Гауса, було отримано коефіцієнти d_k [5, 21]. Маючи власні значення, власні вектори, та сталі множники d_k , підставляємо їх у (12.17) для побудови графіків контактного тиску [14].

Алгоритм знаходження області контакту в довільний момент часу такий: у момент часу $t_0 = 0$ для сили P знайдено a_0 (ця ж задача розв’язана іншим способом у працях [32, 33] і розв’язки збігаються); у наступний момент часу $t = t_i$ приймаємо, що $a(t_i) = a_i = const$, проводимо всю процедуру знаходження контактного тиску (12.4) за схемою, описаною вище, підставляємо контактний тиск в умову рівноваги (12.3) і порівнюємо знайдену силу P_i з P , при $P_i > P$ зменшуємо a_i , при $P_i \le P$ – збільшуємо a_i , доки не буде виконуватись умова із заданою точністю $P_i = P$. Цей процес повторюємо для кожного наступного $t_{i+1} > t_i$.

За малих областей контакту (для $a_0 / R < 0.15$) процес зношування для всіх штампів є практично ідентичним при невеликих різницях кривини штампів в точці $x = 0$.

Контактний тиск у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$ за дії сили $P = 0.0502$ та відповідній їй малій початковій області контакту $a_0 / R = 0.1$ проілюстровано на рис. 12.2 *а* для гіперболічного штампа ($\varepsilon = -0.1$). Відповідні величини зношування показано на рис. 12.2 *б*.



а ***б***

Рис. 12.2

На рис. 12.3 наведено контактний тиск для еліптичного штампа ($\varepsilon = -0.1$) при заданій силі $P = 0.0914$ та відповідній їй початковій області контакту $a_0 / R = 0.2$ у фіксовані моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$, $t_4 = 0.38$, $t_5 = 0.475$.

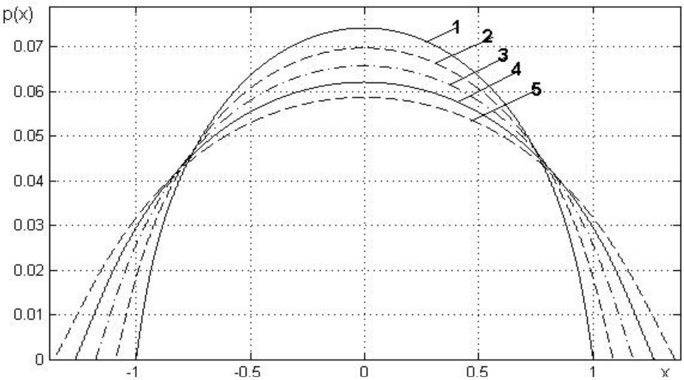


Рис. 12.3

На рис. 12.4 наведено контактний тиск для штампа параболічної форми при заданій силі $P = 0.1828$ та початковій області контакту $a_0 / R = 0.3652$ в моменти часу $t_1 = 0.095$, $t_2 = 0.19$, $t_3 = 0.285$, $t_4 = 0.38$, $t_5 = 0.475$, $t_6 = 0.57$, $t_7 = 0.665$, $t_8 = 0.76$, $t_9 = 0.855$, $t_{10} = 0.95$, $t_{11} = 1.045$, $t_{12} = 1.14$, $t_{13} = 1.235$.

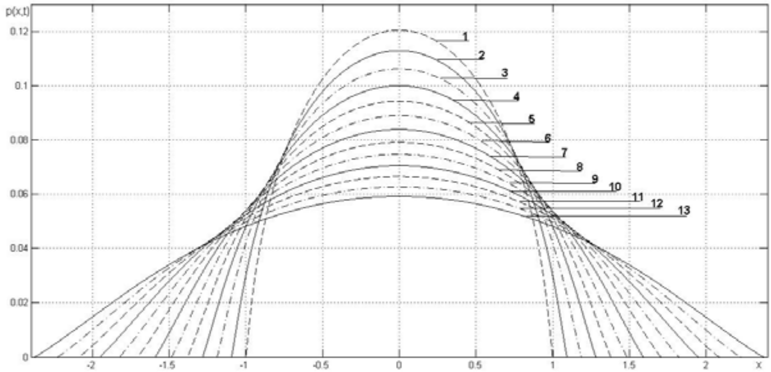


Рис. 12.4

Залежності області контакту від часу роботи фрикційної пари при початковій області контакту $a_0 / R = 0.2$ та $\varepsilon = 0.1$ показано на рис. 12.5, де крива *1* відповідає циліндричному штампу, *2* – еліптичному, *3* – гіперболічному, *4* – параболічному.

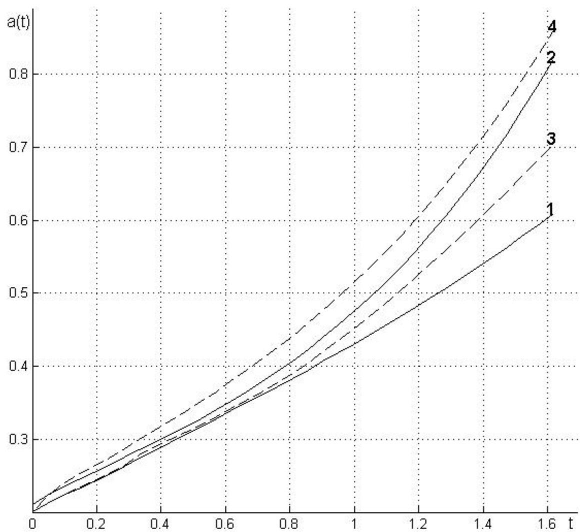


Рис. 12.5

На рис.12.6 для тих самих штампів наведено залежності області контакту від часу роботи фрикційної пари за однакової притискальної сили $P = 0.0854$.

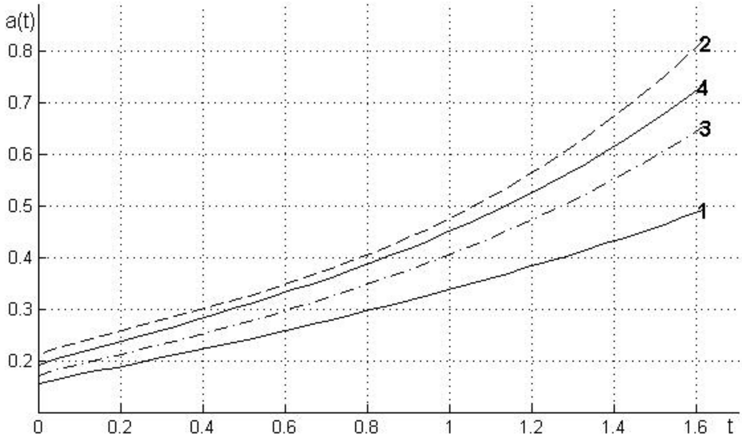


Рис. 12.6

12.2. Зношування півплощини, захищеної шаром Вінклера

Розглянемо плоску задачу про контактну взаємодію системи жорсткий штамп – пружне тонке покриття – пружна півплощина. У пружну півплощину, яка захищена тонким покриттям, силою P вдавлюється жорсткий штамп з основою $f(x)$ (рис. 12.7), а між покриттям та півплощиною виконуються умови ідеального контакту. Штамп рухається з усередненою швидкістю V в напрямку, перпендикулярному до площини рисунка. Під час взаємодії тіл виникає тертя, внаслідок якого відбувається зношування покриття [12, 13].

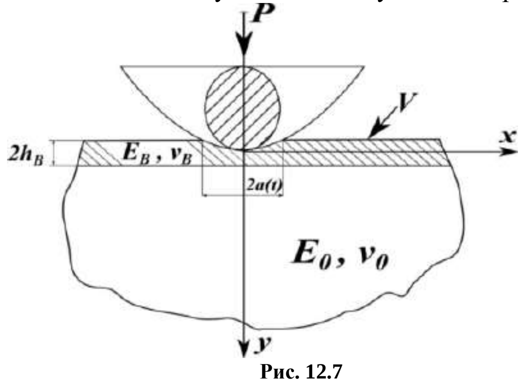


Рис. 12.7

Абразивне зношування моделюється лінійною залежністю між інтенсивністю зношування та роботою сил тертя [14]:

$$\frac{\partial \upsilon_*(x,t)}{\partial t} = k_1 k_2 V p(x,t), , \qquad (12.23)$$

де k_1 – коефіцієнт тертя, $p(x,t)$ – контактний тиск під штампом, k_2 – коефіцієнт інтенсивності зношування, t – час зношування, $\upsilon_*(x,t)$ – зміщення за рахунок зношування. Величина k_2 в загальному випадку залежить від властивостей матеріалів, фрикційних параметрів контактної пари, температури та ін. [14, 17, 18].

При розв’язуванні контактних задач з покриттям в якості теоретичного узагальнення різних покриттів використовують пружний шар Вінклера [1]. Будемо моделювати тонке пружне покриття шаром Вінклера з одним коефіцієнтом постелі у вигляді неперервно розподілених пружних стрижнів. Це закономірно для випадку, коли жорсткість покриття менша або співвимірна жорсткості основного тіла [2, 9, 13, 26]. Рівняння для переміщення має вигляд

$$w_B(x,t) = K_B\, p(x,t)\,, \tag{12.24}$$

де $K_B = 2h_B(1-2\nu_B)(1+\nu_B)/(E_B(1-\nu_B))$, h_B – товщина покриття.

З урахуванням (12.23), (12.24) контактну задачу зводимо до сингулярного інтегро-диференціального рівняння

$$\frac{1}{\pi\theta}\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{p(\xi,t)}{\xi - x}d\xi + K_B p_x'(x,t) + k_1 k_2 V\int_0^t p_x'(x,t)dt = -f'(x),\ |x| \le a(t)\,, \tag{12.25}$$

де $\theta = E_0 / 2(1-\nu_0^2)$. Контактний тиск у кожен момент часу t повинен задовольняти умови:

$$P = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(x,t)dt\ \ ,\ \ p(\pm a(t),t) = 0\ . \tag{12.26}$$

Таким чином задача звелася до розв’язування сингулярного інтегро-диференціального рівняння (12.25) за умов (12.26).

Зауважимо, що при $h_B = 0$, тобто у випадку, коли товщина шару Вінклера рівна нулю, з рівняння (12.25) отримуємо інтегральне рівняння (12.2) для задачі про зношування пружної півплощини.

Для розв’язування рівняння застосуємо покроковий алгоритм за часом [12, 13] та метод поліномів Чебишова. За цим алгоритмом розбиваємо час роботи фрикційної пари зі зношуванням на малі відрізки Δt. Припускаємо, що на кожному з часових відрізків контактний тиск і область контакту є постійними в часі.

На початковому етапі розв’язування при $t = 0$ інтегральне рівняння матиме вигляд

$$\frac{1}{\pi\theta}\int_{-a_0}^{a_0} \frac{p_0(\xi)}{\xi - x}d\xi + K_B p_0'(x) = -f'(x),\ |x| \le a_0\,. \tag{12.27}$$

Введемо безрозмірні величини $\overline{x} = x / a_0$, $\overline{p}_0 = p_0 / \theta$, $\overline{h}_B = (h_B / R) / (a_0 / R)$ (надалі рисочки опускаємо).

Відповідно до введених позначень рівняння (12.27) набуде вигляду

$$p_0^{'}(x) - \lambda \int_{-1}^{1} \frac{p_0(\xi)}{\xi - x} d\xi = -\frac{a_0}{R} \lambda \pi f^{'}(x), \qquad (12.28)$$

де $\lambda = a_0 / (\pi \theta K_B)$, R – радіус кривини штампа в точці $x = 0$.

Перші дослідження сингулярного рівняння виду (12.28) із використанням теорії потенціалів наведено в праці [20], дослідження рівняння методом колокацій наведено в працях [7, 25].

Розв’язок рівняння (12.28) шукатимемо у вигляді

$$p_0(x) = \sqrt{1 - x^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 U_{2m}(x) . \qquad (12.29)$$

Похідна від функції (12.29):

$$p_0^{'}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^0 (2m+1) T_{2m+1}(x) . \qquad (12.30)$$

Підставляючи (12.29) та (12.30) в інтегральне рівняння (12.28), отримаємо:

$$-\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) b_{2m} \frac{T_{2m+1}(x)}{\sqrt{1 - x^2}} + \lambda \pi \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} T_{2m+1}(x) = -\frac{a_0}{R} \lambda \pi f^{'}(x). \qquad (12.31)$$

Домножуючи рівність (12.31) на $T_{2k+1}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ та інтегруючи її по x від -1 до 1, одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів b_{2m}:

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} \int_{-1}^{1} T_{2m+1}(x) T_{2k+1}(x) dx - \frac{2k+1}{2\lambda} b_{2k} = -\frac{a_0}{R} \int_{-1}^{1} f^{'}(x) T_{2k+1}(x) dx, \qquad (12.32)$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$

Зв'язок між величинами P_0 та a_0 при $t = 0$ будемо шукати із умови рівноваги штампа (12.26):

$$P_0 = \int_{-a_0}^{a_0} p_0(x) dx . \qquad (12.33)$$

Розв’язавши систему (12.32), отримаємо числові коефіцієнти для функції контактного тиску, записаного у вигляді (12.29).

На наступному кроці $t \in [0, t_1 = \Delta t]$ для знаходження контактного тиску $p_1(x)$ інтегральне рівняння (12.28) набуде вигляду

$$p_1'(x)(1+\lambda\delta\Delta t)-\lambda\int_{-1}^{1}\frac{p_1(\xi)}{\xi-x}d\xi=-\frac{a_1}{R}\lambda\pi f'(x). \qquad (12.34)$$

Розв’язок рівняння (12.34) знаходимо аналогічно, як і рівняння (12.28). При цьому невідомі коефіцієнти $b_{2m}^{(1)}$ визначаємо із системи (12.31), замінивши λ на $\lambda_* = \lambda/(1+\lambda\delta\Delta t)$, де $\delta = \pi k_1 k_2 V\theta / a_1$.

На наступному кроці $t\in[t_1, t_2 = t_1 + \Delta t]$ знаходимо $p_2(x)$. Коефіцієнти $b_{2m}^{(2)}$, що є основою ряду (12.29), знаходимо із системи (12.31), в якій знову $\lambda = \lambda_*$, а до правої частини потрібно додати доданок накопичення $\delta\Delta t b_{2m}^{(1)}(2k+1)/2$. У загальному випадку для знаходження функції контактного тиску $p_{i+1}(x) = p(x, t_{i+1})$ на проміжку $t\in[t_i, t_{i+1} = t_i + \Delta t]$ при $i \geq 2$ розв’язуємо систему алгебричних рівнянь, що збігається із системою (12.31), в якій до правої частини додаються члени, отримані на попередньому кроці:

$$c_k = -\frac{a_i}{R}\int_{-1}^{1} f'(x)T_{2k+1}(x)dx + \frac{2k+1}{2}\delta\Delta t\sum_{n=1}^{i} b_{2k}^{n}, \text{ де } k = 0,1,2,... \qquad (12.35)$$

Забезпечення умови рівноваги здійснюється в наступний спосіб: для $t_0 = 0$ задаємо значення a_0/R та знаходимо $p_0(x)$, що задовольняє умову рівноваги (12.33) і визначає P_0 . На наступному кроці при $t\in[0, t_1 = \Delta t]$ задаємо значення $a_1/R > a_0/R$ та знаходимо розв’язок за запропонованою методикою, а з умови рівноваги перевіряємо, чи на цьому кроці $\overline{P}_1 = \overline{P}_0$, де $\overline{P}_1 = P/\theta a_1$. Якщо ця умова не виконується, то коригуємо значення a_1/R (збільшуємо або зменшуємо). На кожному наступному проміжку часу $t\in[t_i, t_{i+1} = t_i + \Delta t]$ при $i \geq 2$ використовуємо аналогічну схему і забезпечуємо виконання умови $\overline{P}_i = \overline{P}_0$.

Числові результати отримано шляхом редукції нескінченної системи алгебричних рівнянь (12.32). Досліджували процес зношування при $V = 1\ м/с$, $\Delta t = 100с$ для таких двох контактних пар: БрАЖНМц9-4-4-1 – Al_2O_3—40%TiO_2 та БрАЖНМц9-4-4-1 – Mo-Mo_2C, де БрАЖНМц9-4-4-1 – матеріал для штампа, Al_2O_3—40%TiO_2, Mo-Mo_2C – матеріали для покриття . Обчислювали при наступних параметрах [17]: для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Al_2O_3—40%TiO_2: $E_B/E_0 = 72\,ГПа/78{,}5\,ГПа = 0.92$, $k_1 = 0.31$, $k_2 = 2.2\cdot 10^{-7}$, для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Mo-Mo_2C: $E_B/E_0 = 63\,ГПа/78{,}5\,ГПа = 0.8$, $k_1 = 0.31$, $k_2 = 3.8\cdot 10^{-7}$ та $\nu_0 = 0.34$, $G_0 = 0.42\cdot 10^5$.

На рис. 12.8 і 12.9 показано вплив товщини покриття h_B на розподіл контактного тиску під циліндричним штампом в початковий момент часу $t=0$ при $E_B / E_0 = 0.9$. Рис. 12.8 відповідає області контакту $a_0 / R = 0.1$ (крива *1* – $h_B = 1$, $P_1 = 0.002$; *2* – $h_B = 1.2$, $P_2 = 0.0017$; *3* – $h_B = 1.4$, $P_3 = 0.0015$), рис. 12.9 – області контакту $a / R = 0.3$ (крива 1 – $h_B = 1$, $P_1 = 0.0739$; 2 – $h_B = 1.2$, $P_2 = 0.0602$; 3 – $h_B = 1.4$, $P_3 = 0.0508$).

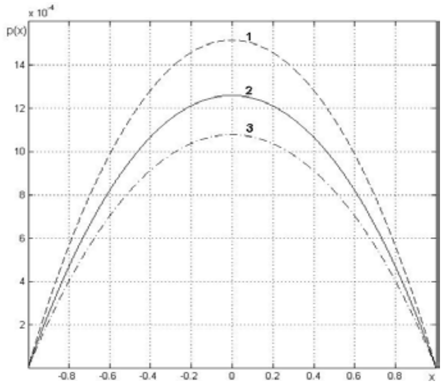


Рис. 12.8

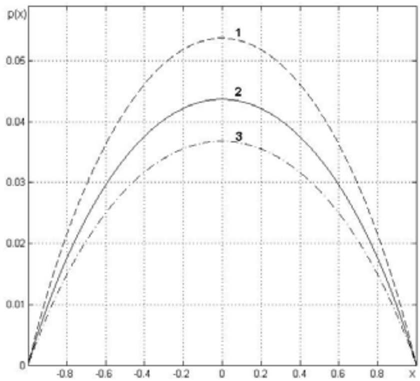


Рис. 12.9

Важливим чинником при дослідженні контактних задач такого типу для еліптичного штампа є співвідношення величини великої та малої півосей еліпса a_1, b_1, для гіперболічного штампа – дійсної та уявної півосей гіперболи a_1, b_1. Для розрахунків приймаємо $a_1 = R$, $b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$. Змінюючи ці параметри, можна суттєво впливати на розподіл контактного тиску.

На рис. 12.10 наведено графік розподілу контактного тиску для штампа гіперболічної форми при $a / R = 0.3$, $E_B / E_0 = 0.9$, $h_B = 1$ для різних ε. Тут крива *1* відповідає значенню $\varepsilon_1 = 0.1$, $\overline{P}_1 = 0.0550$; *2* – $\varepsilon_2 = 0.01$, $\overline{P}_2 = 0.0505$; *3* – $\varepsilon_3 = -0.1$, $\overline{P}_3 = 0.0450$. Для еліптичного штампа при $a_0 / R = 0.3$, $E_B / E_0 = 1$, $h_B = 1$ для $\varepsilon_1 = 0.1$ отримали $\overline{P}_1 = 0.0813$; для $\varepsilon_2 = 0.01$ – $\overline{P}_2 = 0.0747$; для $\varepsilon_3 = -0.1$ – $\overline{P}_3 = 0.0665$.

Варто відзначити, що при малих початкових областях контакту $a_0 / R < 0.15$ контактний тиск для всіх штампів розглянутих канонічних форм практично збігається з контактним тиском для штампа параболічної форми.

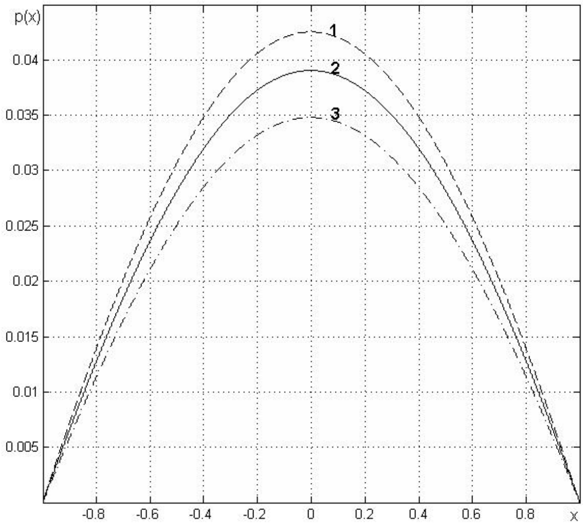


Рис. 12.10

На рис. 12.11 – 12.14 показано розподіл контактного тиску для моментів часу $t_0 = 0$ (криві *1*), $t_1 = 100\,c$ (криві *2*), $t_2 = 200\,c$ (криві *3*) за товщини покриття $h_B = 1$.

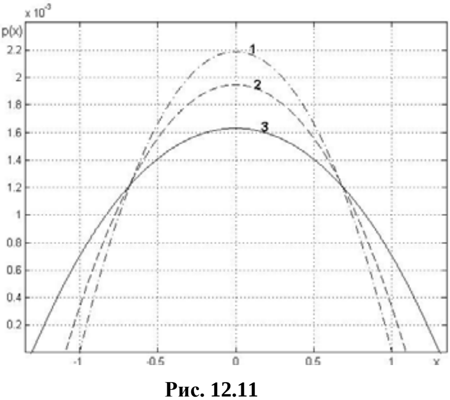


Рис. 12.11

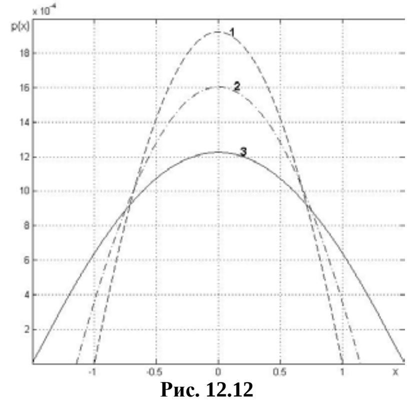


Рис. 12.12

На рис. 12.11 і 12.12 наведено тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Al_2O_3-40%TiO_2 при $\overline{P} = 0.0029$ для циліндричного і гіперболічного ($\varepsilon = 0.1$) штампа відповідно. Для гіперболічного штампа в розглянуті три моменти часу отримано такі ділянки контакту: $a_0 / R = 0.1125$, $a_1 / R = 0.1281$, $a_2 / R = 0.175$. В разі контактної пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Mo-Mo_2C і

гіперболічного штампа при $\overline{P} = 0.0024$ маємо $a_0 / R = 0.1125$, $a_1 / R = 0.1287$, $a_2 / R = 0.195$.

На рис. 12.13 наведено контактний тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Al_2O_3-40%TiO_2 і циліндричного штампа при заданій силі $\overline{P}_0 = 0.0191$. Тут $a_0 / R = 0.2009$, $a_1 / R = 0.238$, $a_2 / R = 0.3312$. Для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Mo-Mo_2C і циліндричного штампа при силі $\overline{P} = 0.0167$ маємо $a_0 / R = 0.2009$, $a_1 / R = 0.2505$, $a_2 / R = 0.373$.

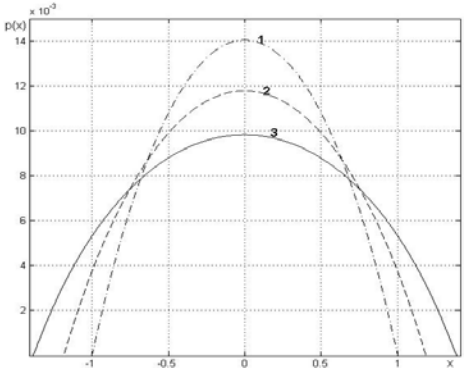


Рис. 12.13

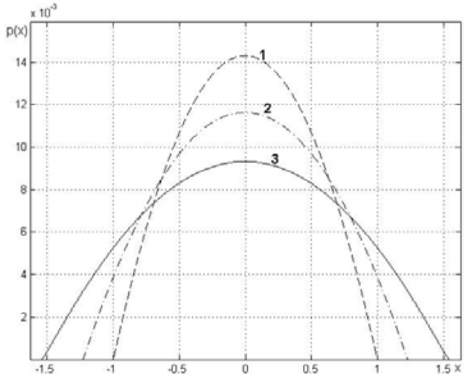


Рис. 12.14

На рис. 12.14 наведено контактний тиск для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Al_2O_3-40%TiO_2 і параболічного штампа при заданій силі $\overline{P}_0 = 0.0191$. Тут $a_0 / R = 0.21$, $a_1 / R = 0.258$, $a_2 / R = 0.4$. Для пари БрАЖНМц9-4-4-1 – Al_2O_3-40%TiO_2 і еліптичного штампа при заданій силі $\overline{P}_0 = 0.0191$ було знайдено області контакту $a_0 / R = 0.195$, $a_1 / R = 0.230$, $a_2 / R = 0.3312$.

Чисельно виявлено, що основним параметром, який впливає на процес зношування, є коефіцієнт інтенсивності зношування k_2, який суттєво відрізняється для різних пар матеріалів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Бусяк Ю.М., Ткачук А.В., Дёмина Н.А., Скрипченко Н.Б., Мазур И.В.* Проблема обеспечения защищенности корпусов легкобронированных машин: постановки и подходы к решению // Проблемы машиностроения. – 2015. – № 1. – С. 40–45.
2. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
3. *Воронцов Ю.О., Икрамов Х.Д.* Численный алгоритм для решения

матричного уравнения AX+XTB=C // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 2011. – № 5. – С. 739–747.

4. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
5. *Горбаченко В.И.* Вычислительная линейная алгебра с примерами на MATLAB. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 320 с.
6. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. – 478 с.
7. *Калякин А.А.* О взаимодействии штампа со слоистым упругим основанием // Прикл. механика и техн. физика. – 2006. – **47**, № 3. – С. 165–175.
8. *Канатников А.Н., Зарубина В.С., Крищенко А.П.* Линейная алгебра: учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 336 с.
9. *Киселев В.А.* Расчет пластин. – М.: Стройиздат, 1973. – 152 с.
10. *Косолап А.И., Перетятько А.С.* Сопряженные направления в задачах на собственные значения симметричных матриц // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2013. – № 21. – С. 114–122.
11. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
12. *Максимук О.В.* Контактна задача про зношування пружного тіла з тонким покриттям // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 88–92.
13. *Максимук О.В., Махніцький Р.М., Щербина Н.М.* Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: Нац. академія наук України. Ін–т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача, 2005. – 396 с.
14. *Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1988. – 280 с.
15. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Аналіз напружено-деформівного стану у тілі під дією різних за формою жорстких штампів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 162–167.
16. *Сачук Ю.В., Максимук О.В.* Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії // Фіз.–мат. моделювання та інформ. технології. – 2014. – Вип. 20. – С. 180-187.
17. *Утенков В.М., Зайцев А.Н.* Исследование триботехнических характеристик перспективных износостойких плазменных покрытий при трении скольжения без смазки // Изв. высш. учебных заведений. – 2013. – № 11. – С. 81–89.
18. *Фещенко В.Н.* Справочник конструктора. Книга 1. Машины и механизмы. – М.: Инфра-Инженерия, 2016. – 400 с.
19. *Шарый С.П.* Курс вычислительных методов. – Новосибирск: Ин–т. вычисл. технологий СО РАН, 2014. – 502 с.
20. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. – М.–Л.: Гостех-

издат, 1949. – 270 с.

21. *Ford W.* Numerical Linear Algebra with Applications: using Matlab. – New York: Academic Press, 2014. – 628 p.
22. *Golpar-Raboky E.A.* New Approach for Computing WZ Factorization // Applications. and Appl. Mathematics: An Int. J. (AAM). – 2012. – **7**, No. 2. – P. 571–584.
23. *Golpar-Raboky E.A.* WZ-factorization via Abaffy-Broyden-Spedicato algorithms // Bulletin of the Iranian Mathematical Soc. – 2014. – **40**, No. 2. – P. 399-411.
24. *Golub G.H., Van Loan C.F.* Matrix Computations. – Baltimore: The Johns Hopkins University Pres, 2013. – 756 p.
25. *Vanini S.A., Shahba M., Kordani N.* Numerical investigation of sliding frictional contact in functionally graded steels (FGS) // Materials Research. – 2014. – **17**, No. 6. – P. 1478-1484.
26. *Whitehouse D.J.* Handbook of Surface and Nanometrology. Second Edition. – Warwick: University of Warwick Coventry UK, 2011. – 958 p.

РОЗДІЛ 13

МІЖФАЗНІ РОЗРІЗИ МІЖ ПЛАСТИНКОЮ З ОТВОРОМ І РЕБРОМ ЖОРСТКОСТІ

А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, В.А. Сяський, О.Ю. Дейнека

Складовими елементами багатьох сучасних машин, споруд та конструкцій є тонкі ізотропні чи анізотропні пластинки, які послаблені конструктивними або технологічними отворами. З метою зменшення концентрації напружень контури отворів підсилюють пружними елементами у вигляді криволінійних ребер жорсткості. Ці ребра, складаючи, як правило, незначну частину загальної ваги конструкції, суттєво впливають на її міцність та жорсткість.

Напружено-деформований стан (НДС) пластинки з криволінійним ребром жорсткості, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, суттєво залежить від вибору математичної моделі, що описує деформацію ребра. Найбільш поширеними в науковій літературі є три моделі замкненого або розімкненого криволінійного пружного ребра:

– *модель стрингера* – гнучка пружна плоска лінія, яка наділена сталою або змінною жорсткістю на розтяг (стиск) і збігається з віссю ребра. Така модель не враховує поперечні розміри підсилення і придатна для вивчення гнучких, але жорстких відносно розтягу (стиску) ребер. Відповідно до цієї моделі при переході через вісь ребра виникають стрибки нормальних та дотичних зусиль, а компоненти вектора переміщення залишаються неперервними;

– *балкова модель* – штивна пружна плоска лінія, наділена сталими або змінними жорсткостями на розтяг (стиск) і згин в її площині. Ця модель придатна для відносно жорстких і штивних ребер. Вона породжує стрибки нормальних та дотичних зусиль. Поле переміщень при переході через вісь ребра залишається неперервним;

– *криволінійний стрижень сталого прямокутного поперечного перерізу,* серединна поверхня якого не збігається з нейтральною поверхнею для чистого згину.

Найбільш повний огляд досліджень, які стосуються розробки, модифікацій та застосування таких моделей, наведено в монографії [16].

У цьому розділі підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем великої кривини, для розрахунку НДС якого використано метод сил [7, 21]. Розглянуто мішані контактні задачі для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра. При їх з'єднанні методом пресової посадки [6, 22] досліджено процес розмикання контакту в одній або декількох точках. У випадку зварного (клейового) з'єднання пластинки та ребра [5, 23, 24, 28, 29] досліджено

наявність одного або двох міжфазних розрізів, які виникли на межі поділу матеріалів внаслідок руйнування (розшарування) з'єднувального шва.

13.1. Моделювання контактної взаємодії для нескінченної ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра

Формулювання задачі. Розглянемо кусково-однорідну пружну систему, що містить пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, контур якого підсилено пружним ребром у вигляді замкненої моментної циліндричної оболонки товщиною 2η і висотою $2h_0$ $(h_0 > h)$, симетричним відносно серединної площини пластинки. З'єднання пластинки і підсилювального ребра здійснено методом пресової посадки з натягом Δ, який має порядок пружних переміщень, або зварюванням (склеюванням) (рис. 13.1). Тут θ – кут нахилу поперечного перерізу ребра до осі симетрії отвору.

Розглядувана конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного однорідним силовим навантаженням на зовнішньому контурі пластинки, тому всі компоненти НДС віднесені до спільної серединної площини Розв'язання задачі передбачає визначення напружень і деформацій на контурі отвору в пластинці та підсилювальному ребрі.

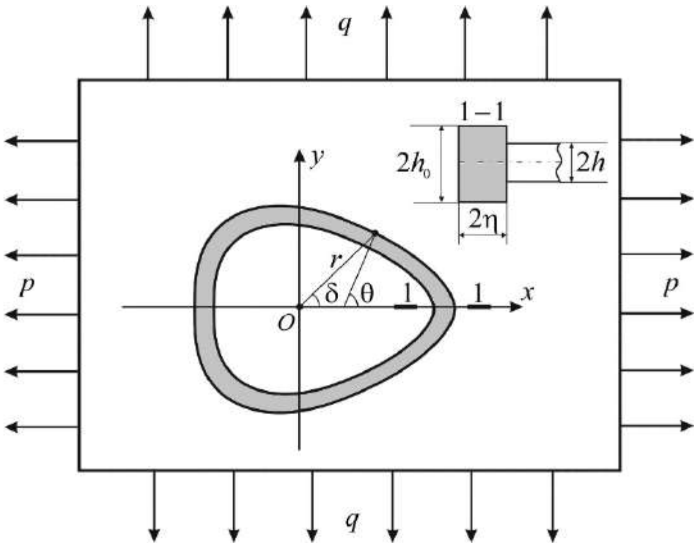


Рис. 13.1

Умовно розділяючи двокомпонентну конструкцію на окремі елементи (пластинку з криволінійним отвором і підсилювальне ребро), замінюючи дію

одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі теорії пружності для пластинки з криволінійним отвором і пружного ребра.

Оскільки характерний розмір отвору значно менший від зовнішніх розмірів пластинки, її будемо моделювати нескінченною пластинкою, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності, а на контурі отвору діють контактні зусилля, що передаються до нього від ребра. Її НДС будемо описувати основними рівняннями плоскої задачі теорії пружності [12, 15]. Підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стрижнем великої кривини, який перебуває в пружній рівновазі під дією контактних зусиль, що передаються до нього від пластинки [13, 26, 27].

Ізотропна пластинка з криволінійним отвором. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, послаблену симетричним криволінійним отвором, обмеженим гладкою циліндричною поверхнею. Серединна площина пластинки віднесена до декартової $(x,\ y)$ та полярної $(r,\ \delta)$ систем координат з полюсом у центрі отвору. Лінію її перетину з поверхнею отвору позначимо Γ і будемо називати контуром отвору.

Вважаємо, що пластинка перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями p і q, які діють вздовж координатних осей, та нормальних T_ρ і дотичних $S_{\rho\lambda}$ контактних зусиль, що передаються до контуру Γ від підсилювального ребра (рис. 13.2).

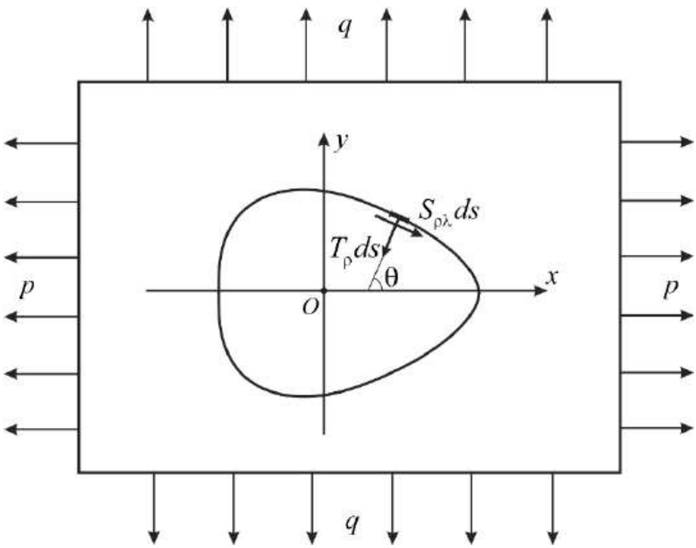


Рис. 13.2

Нехай форма отвору в пластинці визначається функцією [12, 15, 25]

$$z = x + iy = \omega(\xi) = R_0\left(\xi + \frac{\varepsilon_1}{\xi} + \frac{\varepsilon_2}{\xi^2} + \frac{\varepsilon_3}{\xi^3}\right), \quad (13.1)$$

яка здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \tilde{\rho}e^{i\lambda}\left(i = \sqrt{-1}\right)$ на область, яку займає серединна площина пластинки в площині $z = x + iy$. Тут R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, надалі приймаємо $R_0 = 1$); $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметри, які характеризують відхилення форми контуру Γ від кола. За умови $|\varepsilon_1| + 2|\varepsilon_2| + 3|\varepsilon_3| < 1$ функція (13.1) визначає контур Γ як комбінацію кола, еліпса, правильних трикутника і квадрата із закругленими кутами.

Компоненти тензора напружень і тензора деформацій пластинки в точках контуру Γ визначаються за формулами [10, 17, 20]

$$T_\rho = \frac{\alpha T_\rho^* + \beta S_{\rho\lambda}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \; S_{\rho\lambda} = \frac{\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \; \varepsilon_\lambda = \frac{\alpha \varepsilon_\lambda^* + \beta \tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2}; \tilde{V} = \frac{\alpha \tilde{V}^* - \beta \varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (13.2)$$

де

$$\alpha(\lambda) + i\beta(\lambda) = \omega'(\sigma); \quad T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda})\omega'(\sigma); \quad \varepsilon_\lambda^* + i\tilde{V}^* = (\varepsilon_\lambda + i\tilde{V})\omega'(\sigma);$$

$\sigma = e^{i\lambda}$; $\varepsilon_\lambda, \tilde{V}$ – відносне видовження в точках контуру та кут повороту нормалі до нього.

У випадку зрівноваженого контурного навантаження величини $\varepsilon_\lambda^*, \tilde{V}^*$ на Γ знаходимо зі співвідношень [1, 18, 25]

$$\varepsilon_\lambda^* = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho^*(t)dt + \frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t)ctg\frac{\lambda - t}{2}dt + \varepsilon_\lambda^0\right];$$

$$\tilde{V}^* = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t)dt - \frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho^*(t)ctg\frac{\lambda - t}{2}dt + V^0\right], \quad (13.3)$$

в яких позначено

$$(1-\varepsilon_3)\alpha_1 = -\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma [T_\rho^*(t)\cos 2t - S_{\rho\lambda}^*\sin 2t]dt - \frac{1}{2}(q-p) - \frac{p+q}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_3);$$

$$\varepsilon_\lambda^0 = (p+q)(2 - \alpha(\lambda)) + \left[2(q-p) + \varepsilon_1\varepsilon_3(p+q) - 4\alpha_1\varepsilon_3\right]\cos 2\lambda;$$

$$V^0 = -(p+q)\beta(\lambda) + \left[2(p-q) - \varepsilon_1\varepsilon_3(p+q) + 4\alpha_1\varepsilon_3\right]\sin 2\lambda; \quad (13.4)$$

ν, E – коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга матеріалу пластинки.

Крім величин ε_λ та $\tilde{V}$ до параметрів деформації контуру Γ відноситься і його кривина $\tilde{k}(\lambda)$. Для її визначення в працях [6, 22] отримана формула

$$\tilde{k}(\lambda) = \frac{1}{\rho}\left[1 - \varepsilon_\lambda + \frac{d\tilde{V}}{d\theta}\right], \qquad (13.5)$$

де $\rho(\lambda)$ – радіус кривини недеформованого контуру; $e^{i\theta} = \sigma\omega'(\sigma)/\left|\omega'(\sigma)\right|$.

Ця формула має просту структуру. Перший доданок у її правій частині визначає кривину недеформованого контуру Γ, другий – зміну кривини за рахунок розтягу (стиску) контуру, а третій – зміну кривини за рахунок згину.

Якщо за фіктивні параметрами деформації контуру Γ обрати функції ε_λ^*; $\tilde{V}^*$, то на підставі (13.2) формула (13.5) набуває вигляду

$$\tilde{k}(\lambda) = \frac{1}{\rho}\left[1 - \frac{\alpha\varepsilon_\lambda^* + \beta\tilde{V}^*}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\alpha\tilde{V}^* - \beta\varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2 + \beta^2}\right)\right]. \qquad (13.6)$$

Кільцеві зусилля на контурі Γ в пластинці визначаються зі співвідношення [4, 15]

$$T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda. \qquad (13.7)$$

За умови $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ з (13.3)–(13.7) одержимо відповідні залежності для пластинки з круговим отвором.

Криволінійне підсилювальне ребро. Замкнене підсилювальне ребро перебуває в пружній рівновазі під дією контактних зусиль T_ρ, $S_{\rho\lambda}$, що передаються до його зовнішньої бічної поверхні від пластинки (рис.13.3). Його моделюємо криволінійним стрижнем великої кривини і сталого прямокутного поперечного перерізу, серединна поверхня якого не збігається з поверхнею отвору в пластинці [13, 21, 26, 27].

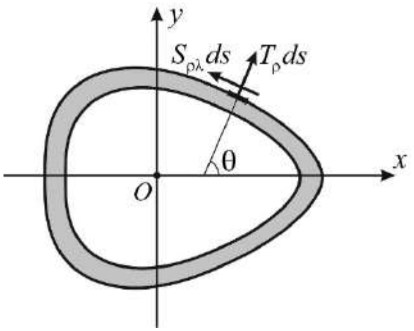


Рис. 13.3

Позначимо через $\rho^{(c)}$ радіус кривини крайнього зовнішнього недеформованого волокна ребра, яке контактує з пластинкою. Будемо вважати, що $\rho \approx \rho^{(c)}$; $\rho^{(c)} - \rho = \Delta > 0$.

Відповідно до прийнятої моделі, напружений стан підсилення визначають внутрішні поздовжня N і поперечна Q сили та згинальний момент L_b, що діють у поперечних перерізах стрижня і віднесені до його осі.

Деформації поздовжніх волокон підсилювального ребра характеризуються відносним видовженням $\varepsilon_\lambda^{(c)}$, кутом повороту нормалі θ_b і кривиною $k^{(c)}$, які визначають за формулами [13, 21]

$$\varepsilon_\lambda^{(c)}(\theta) = \frac{1}{E_0 F_0}\left[N(\theta) + \frac{\eta + \eta_c}{\rho \eta_c} L_b(\theta) \right]; \;\; \frac{d\theta_b(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{E_0 F_0}\left[N(\theta) + \frac{L_b(\theta)}{\eta_c} \right];$$

$$k^{(c)}(\theta) = \frac{1}{\rho^{(c)}}\left[1 - \varepsilon_\lambda^{(c)} + \frac{d\theta_b}{d\theta} \right], \tag{13.8}$$

в яких введено такі позначення: $2h_0$, 2η – висота і ширина підсилювального ребра; E_0, ν_0 – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу ребра; $E_0 F_0$ – жорсткість стрижня на розтяг (стиск); $F_0 = 2h_0 \cdot 2\eta$ – площа поперечного перерізу ребра; η_c – відстань від осі ребра до нейтрального для чистого згину поздовжнього волокна.

З урахуванням двох перших співвідношень (13.8) останнє набуває вигляду

$$k^{(c)}(\theta) = \frac{1}{\rho^{(c)}}\left[1 + \frac{r_0 L_b(\theta)}{\rho \eta_c E_0 F_0} \right], \tag{13.9}$$

де r_0 – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна ребра; $r_0 = \rho - \eta - \eta_c$.

Для замкненого стрижня задача розрахунку внутрішніх сил і моментів N, Q, L_b двічі статично невизначена, тому початкові параметри N_0 і L_b^0 будемо визначати методом сил [7, 21]. З цією метою обираємо основну розрахункову схему стрижня (статично визначену і геометрично незмінну) вилученням зайвих в'язей та заміною їх невідомими внутрішніми реакціями N_0, L_b^0 (рис. 13.4). Зображений розімкнений стрижень працює в таких же умовах, що й верхня частина суцільного стрижня.

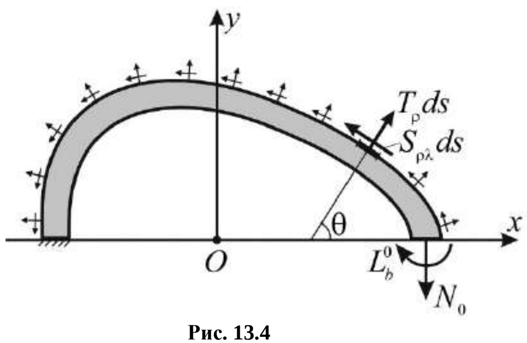


Рис. 13.4

Розглянемо одночасну дію на нього зовнішнього навантаження і невідомих реакцій. Почергово завантажуючи стрижень одиничною парою сил з моментом $L_b^0 = 1$ і одиничною силою $N_0 = 1$, прикладеними в центрі вільного кінця, та зовнішнім навантаженням, запишемо вирази для внутрішніх силових факторів у довільному перерізі, що визначається кутом θ:

$$\bar{L}_1 = 1; \quad \bar{N}_1 = 0; \quad \bar{Q}_1 = 0,\ \bar{L}_2 = (x_0 - \eta - x + \eta\cos\theta); \quad \bar{N}_2 = \cos\theta;\ \bar{Q}_2 = \sin\theta,$$

$$N_p = \int_0^\lambda \left[T_\rho^*(t)\sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(\theta - t)\right]dt;$$

$$Q_p = -\int_0^\lambda \left[T_\rho^*(t)\cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(\theta - t)\right]dt;$$

$$L_p = \eta N_p + \int_0^\lambda [x(\lambda) - x(t)]\left[T_\rho^*(t)\sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(t)\right]dt -$$

$$-\int_0^\lambda [y(\lambda) - y(t)]\int_0^\lambda \left[T_\rho^*(t)\cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(t)\right]dt,$$

$$\lambda \in [0;\ \pi] \quad (\theta \in [0;\ \pi]). \qquad (13.10)$$

Систему канонічних рівнянь методу сил для стрижня сталої жорсткості записуємо у вигляді [7]

$$\delta_{11}L_b^0 + \delta_{12}N_0 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{21}L_b^0 + \delta_{22}N_0 + \Delta_{2p} = 0\,, \qquad (13.11)$$

де

$$\delta_{ij} = \int_0^\pi \left[\bar{L}_i\left(\bar{N}_j + \frac{\bar{L}_j}{\eta_c}\right) + \bar{N}_i\left(R\bar{N}_j + \bar{L}_j\right) + 2(1+\nu_0)\mu R\bar{Q}_i\bar{Q}_j\right]d\theta;$$

$$\Delta_{ip} = \int_0^\pi \left[\bar{L}_i\left(N_p + \frac{L_p}{\eta_c}\right) + \bar{N}_i\left(RN_p + L_p\right) + 2(1+\nu_0)\mu R\bar{Q}_i Q_p\right]d\theta; \qquad (13.12)$$

$i,\ j = 1,\ 2;$ $\mu -$ стала (для прямокутного перерізу $\mu = 1.2$).

Співвідношення (13.11), (13.12) забезпечують відсутність повороту і вертикального переміщення вільного кінця стрижня.

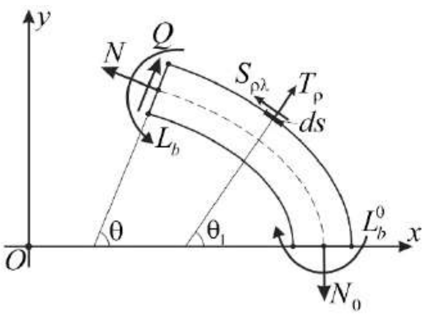


Рис. 13.5

Для визначення внутрішніх силових факторів $N,\ Q,\ L_b$, які виникають у довільному поперечному перерізі та віднесені до осі стрижня, розглянемо рівновагу його частини між перерізами $\theta = 0$ і $\theta = \theta$ (рис. 13.5). З умов рівноваги плоскої системи сил для виділеної частини стрижня знаходимо

$$N(\lambda) = N_0\cos\theta + \int_0^\lambda \left[T_\rho^*(t)\sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(\theta - t)\right]dt;$$

$$Q(\lambda) = N_0 \sin\theta - \int_0^{\lambda} \left[T_\rho^*(t)\cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(\theta - t) \right] dt;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_0^{\lambda} [x(\lambda) - x(t)] \times$$

$$\times \left[T_\rho^*(t)\sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(t) \right] dt - \int_0^{\lambda} [y(\lambda) - y(t)] \left[T_\rho^*(t)\cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(t) \right] dt,$$

$$\lambda \in [0;\ \pi] \quad (\theta \in [0;\ \pi]). \tag{13.13}$$

Якщо величини $N,\ Q,\ L_b$ стануть відомі, то нормальні напруження в поздовжньому волокні стрижня з радіусом кривини ρ^* визначимо за законом Гука в його одновимірній формі [2, 21]

$$\sigma^{(c)}(\theta) = \frac{1}{F_0} \left[N(\theta) + \frac{\rho^* - r_0}{\rho^*} \cdot \frac{L_b(\theta)}{\eta_c} \right], \tag{13.14}$$

а максимальні дотичні напруження в осьовому волокні – за формулою Журавського [13]

$$\tau_{\max} = 1.5 \frac{Q(\theta)}{F_0}. \tag{13.15}$$

Співвідношення (13.8)–(13.15) визначають повну систему рівнянь для розрахунку НДС замкненого пружного стрижня великої кривини. Приймаючи в них $\eta_c = \eta = L_b(\lambda) = 0$, отримаємо відповідну систему для моделі стрингера , а при $\eta_c = A_0 / (RE_0 F_0)$ (A_0 – жорсткість стрижня на згин) – для балкової моделі.

13.2. Напружена посадка замкненого пружного ребра в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки

У машинобудуванні широко використовуються пресові з’єднання, в яких відносна нерухомість циліндричних тіл досягається за рахунок натягу. Концентрація напружень у таких з’єднаннях є визначальним фактором їх міцності та жорсткості.

Формулювання задачі. Припустимо, що в криволінійний отвір вигляду (13.1) нескінченної ізотропної пластинки з гарантованим натягом $\Delta = \text{const}$ $(\Delta > \Delta_{\min})$ запресоване симетричне відносно осі Ox пружне ребро сталого прямокутного поперечного перерізу $2h_0 \times 2\eta$. Пластинка і ребро мають спільну серединну площину, яка віднесена до прямокутної Oxy і полярної (r, δ) систем координат з полюсом в центрі отвору. Вважаємо, що полярна вісь збігається з віссю Ox і віссю симетрії отвору (рис. 13.6).

Пружна система пластинка–ребро перебуває в умовах узагальненого

плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими зусиллями p і q, які діють на нескінченності в напрямках координатних осей. Зовнішнє навантаження на ребро відсутнє. Його розрахункова схема наведена на рис.13.4.

Розв’язання задачі передбачає: визначення компонент напруженого стану в пластинці та підсилювальному ребрі; встановлення мінімального натягу $\Delta_{\min}$, за якого на ділянці $\lambda \in [0;\, \pi]$ розпочинається розмикання контакту між пластинкою і ребром лише в одній точці $\lambda = \lambda_*$, і положення цієї точки на контурі Γ.

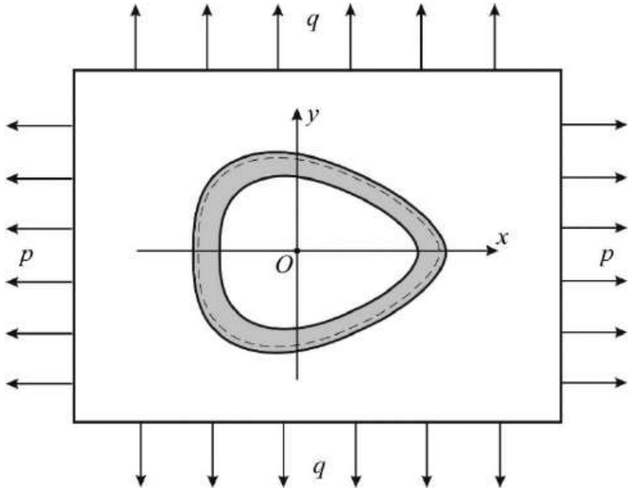


Рис. 13.6

Математична модель задачі. Крайові умови гладкого контактування пластинки і ребра формулюємо у вигляді рівності їх кривин на ділянці контакту

$$k^{(c)}(\lambda) = k(\lambda); \qquad S_{\rho\lambda} = 0, \qquad \lambda \in [0;\, 2\pi]. \tag{13.16}$$

На підставі (13.6), (13.8) ці умови можна перетворити до вигляду

$$\frac{\alpha\varepsilon_\lambda^* + \beta\tilde{V}^*}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\alpha\tilde{V}^* - \beta\varepsilon_\lambda^*}{\alpha^2+\beta^2}\right) - \varepsilon_\lambda^{(c)} + \frac{d\theta_b}{d\theta} = \frac{\Delta}{\rho};$$

$$\alpha S_{\rho\lambda}^* - \beta T_\rho^* = 0, \qquad \lambda,\, \theta \in [0;\, 2\pi]. \tag{13.17}$$

Величини $\varepsilon_\lambda^*, \tilde{V}^*$ і $\varepsilon_\lambda^{(c)}, \dfrac{d\theta_b}{d\theta}$ визначаються за формулами (13.3), (13.4) і (13.8) відповідно, а внутрішні силові фактори N, Q, L_b – зі співвідношень (13.13). Їх підставляння з урахуванням (13.9) в умови (13.17) після певних перетворень призводить до системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР)

з ядрами Гільберта для визначення функцій T_ρ^*, $S_{\rho\lambda}^*$:

$$\left[\alpha+\frac{d\lambda}{d\theta}\left(\beta\frac{d}{d\lambda}+\beta'-\frac{2\beta(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\alpha^2+\beta^2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho^*(t)dt+\frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+\varepsilon_\lambda^0\right]+$$

$$+\left[\beta-\frac{d\lambda}{d\theta}\left(\alpha\frac{d}{d\lambda}+\alpha'-\frac{2\alpha(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\alpha^2+\beta^2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}^*(t)dt-\frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho^*(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+V^0\right]+$$

$$+\frac{2Eh}{E_0F_0}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\frac{r_0L_b}{\rho\eta_c}=\frac{2Eh\Delta}{\rho}\left(\alpha^2+\beta^2\right);\ \ \alpha S_{\rho\lambda}^*-\beta T_\rho^*=0, \qquad (13.18)$$

де $R=\rho-\eta-$ радіус кривини осьового волокна підсилювального ребра.

Цю систему доповнюємо умовами (13.11), (13.12), в яких слід прийняти

$$N_p=N(\lambda)-N_0\cos\theta;\quad Q_p=Q(\lambda)-N_0\sin\theta;$$

$$L_p=L_b(\lambda)-L_b^0-[x_0-\eta-x(\lambda)+\eta\cos\theta]N_0.$$

Співвідношення (13.18), (13.11), (13.12) разом з (13.13) визначають математичну модель сформульованої задачі.

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (13.11), (13.12), (13.13), (13.18) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання використаємо метод скінченних тригонометричних сум.

Оскільки контакт між пластинкою та кільцем неперервний, а задача симетрична відносно осі Ox, то функції T_ρ^*, $S_{\rho\lambda}^*$ обираємо у вигляді

$$T_\rho^*(\lambda)=\frac{A_0}{2}+A_1\cos\lambda+\sum_{n=2}^{M_0}A_n\cos n\lambda;\ \ S_{\rho\lambda}^*(\lambda)=B_1\sin\lambda+\sum_{n=2}^{M_0}B_n\sin n\lambda. \qquad (13.19)$$

На підставі співвідношень [3]

$$\oint_\gamma ctg\frac{\lambda-t}{2}dt=0;\ \ \frac{1}{\pi}\oint_\gamma\begin{Bmatrix}\cos mt\\ \sin mt\end{Bmatrix}ctg\frac{\lambda-t}{2}dt=2\begin{Bmatrix}\sin m\lambda\\ -\cos m\lambda\end{Bmatrix},\ \ m\in 1,\,2,\,3... \qquad (13.20)$$

квадратурні формули для обчислення виразів, що входять до (13.18), після певних перетворень набувають вигляду

$$\varepsilon_\lambda^*=\frac{1}{2Eh}\left[-(1+\nu)\frac{A_0}{2}-(1+\nu)A_1\cos\lambda+\sum_{n=2}^{M_0}\left[(1-\nu)A_n-2B_n\right]\cos n\lambda+\varepsilon_\lambda^0\right];$$

$$V^*=\frac{1}{2Eh}\left[-(1+\nu)A_1\sin\lambda+\sum_{n=2}^{M_0}\left[-2A_n+(1-\nu)B_n\right]\sin n\lambda+V^0\right]. \qquad (13.21)$$

Тут врахована умова $A_1 - B_1 = 0$, яка еквівалентна горизонтальній умові рівноваги підсилювального ребра.

Підстановка (13.21) в співвідношення (13.18) з урахуванням (13.20) призводить до системи функціональних рівнянь для визначення сталих $A_0,\ A_1,\ A_n,\ B_n\ \ (n = \overline{2,\ M_0})$:

$$\frac{A_0}{2}a_0(\lambda) + A_1 a_1(\lambda) + B_1 b_1(\lambda) + \sum_{n=2}^{M_0}\left[A_n a_n(\lambda) + B_n b_n(\lambda)\right] =$$

$$+\frac{2Eh}{E_0F_0}\left(\alpha^2+\beta^2\right)\frac{r_0L_b}{\rho\eta_c} = \frac{2Eh\Delta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\rho} - \alpha\varepsilon_\lambda^0 - \beta V^0 +$$

$$+\frac{d\lambda}{d\theta}\left[\alpha\cdot\left(V^0\right)' - \beta\cdot\left(\varepsilon_\lambda^0\right)' + \alpha' V^0 - \beta'\varepsilon_\lambda^0 - \frac{2(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha V^0 - \beta\varepsilon_\lambda^0\right)\right], \quad (13.22)$$

де введено позначення

$$a_0(\lambda) = -(1+\nu)\left[\alpha + \frac{d\lambda}{d\theta}\left(\beta' - \frac{2\beta(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\alpha^2+\beta^2}\right)\right];$$

$$a_n(\lambda) = (1-\nu)\alpha\cos n\lambda - 2\beta\sin n\lambda -$$

$$-\frac{d\lambda}{d\theta}\left[(1-\nu)\,n\beta\sin n\lambda - 2n\alpha\cos n\lambda - 2\alpha'\sin n\lambda - (1-\nu)\,\beta'\cos n\lambda +\right.$$

$$\left.+\frac{2(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\alpha^2+\beta^2}\left(2\alpha\sin n\lambda + (1-\nu)\,\beta\cos n\lambda\right)\right];$$

$$b_n(\lambda) = (1-\nu)\beta\sin n\lambda - 2\alpha\cos n\lambda -$$

$$-\frac{d\lambda}{d\theta}\left[(1-\nu)n\alpha\cos n\lambda - 2n\beta\sin n\lambda + (1-\nu)\alpha'\sin n\lambda + 2\beta'\cos n\lambda -\right.$$

$$\left.-\frac{2(\alpha\alpha'+\beta\beta')}{\alpha^2+\beta^2}\left((1-\nu)\alpha\sin n\lambda + 2\beta\cos n\lambda\right)\right],\quad \lambda\in[0;\ \pi]. \quad (13.23)$$

Систему (13.22), (13.23) доповнюємо умовами (13.11), (13.12).

Порівнюючи в (13.22), (13.23) ліві і праві частини при $\lambda_k = \pi(2k-1)/(2M_0)$, $\theta_k = \theta(\lambda_k)$, $k = 1,\ \ldots, M_0$, одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), розв’язок якої можна знайти одним із числових методів, наприклад, методом Гауса.

Якщо сталі $A_0,\ A_1,\ A_n,\ B_n\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ ...,\ M_0)$, N_0 і L_b^0 стануть відомі, то компоненти напруженого стану на контурі Γ в пластинці визначаються за формулами (13.2), (13.7), а нормальні напруження в крайніх поздовжніх волокнах ребра і дотичні напруження в осьовому волокні ребра, на підставі (13.14), (13.15), зі співвідношень

$$\sigma^{(1)} = \frac{1}{F_0}\left[N + \frac{\eta+\eta_c}{\eta_c}\cdot\frac{L_b}{\rho}\right]; \ \sigma^{(2)} = \frac{1}{F_0}\left[N + \frac{\eta_c-\eta}{\eta_c}\cdot\frac{L_b}{\rho-2\eta}\right]; \ \tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{F_0}. \quad (13.24)$$

Зауважимо, що метод скінченних тригонометричних сум можна застосовувати лише при виконанні умови $\Delta \geq \Delta_{\min}$. Тут $\Delta_{\min}$ – мінімальний натяг, за якого забезпечується повний контакт між пластинкою і підсилювальним ребром, а розмикання контакту можливе лише в одній або декількох точках. Для його встановлення до системи (13.11), (13.12), (13.13), (13.18) необхідно долучити умови

$$T_\rho(\lambda_*) = 0, \qquad T_\rho(\lambda) < 0 \ \ (\lambda \neq \lambda_*). \qquad (13.25)$$

На практиці точне визначення кута λ_* пов'язане зі значними математичними труднощами, тому для наближеного розв'язання цієї проблеми використаємо метод дихотомії, запропонований в праці [19].

Довільно обираємо інтервал $[\Delta_1, \Delta_2]$ зміни натягу Δ, для якого $\Delta_1 \leq \Delta_{\min} \leq \Delta_2$. На першому кроці розв'язуємо систему рівнянь (13.11), (13.12), (13.13), (13.18) для натягу $\Delta^{(0)} = (\Delta_1 + \Delta_2)/2$ і визначаємо знак контактних зусиль T_ρ на проміжку $\lambda \in [0; \pi]$. Якщо виявиться, що всі значення $T_\rho(\lambda_k)$ від'ємні, то за наступне значення натягу $\Delta^{(1)} = (\Delta_1 + \Delta^{(0)})/2$ обираємо середину проміжку $[\Delta_1, \Delta^{(0)}]$. У випадку, коли серед значень $T_\rho(\lambda_k)$ є додатні та від'ємні або тільки додатні, то $\Delta^{(1)} = (\Delta^{(0)} + \Delta_2)/2$ визначається серединою проміжку $[\Delta^{(0)}, \Delta_2]$. Процес поділу проміжків навпіл продовжують доти, поки інтервал зміни Δ не звузиться в точку і визначить $\Delta_{\min}$. Місце дотику епюри T_ρ при $\Delta = \Delta_{\min}$ до контуру Γ визначає точку та відповідний їй кут розмикання контакту λ_*.

Результати числового розрахунку. Для пластинки ($\nu = 0.3$) з криволінійним ($\varepsilon_1 = -0.08;\ \varepsilon_2 = 0.05;\ \varepsilon_3 = 0$) отвором і пружного ребра з параметрами $h_0/h = 4/3;\ \eta = 0.05R_0;\ E_0/E = 2;\ \nu_0 = 0.3$ запропонованим методом досліджено вплив зовнішнього навантаження та натягу Δ на розподіл зусиль T_ρ і T_λ по контуру Γ в пластинці та нормальних напружень $\sigma^{(c)}$ в крайніх поздовжніх волокнах ребра.

Результати числового розрахунку при $M_0 = 125$ наведені на рис. 13.7–13.8 ($p \neq 0;\ q = 0$) і рис. 13.9–13.10 ($p = 0;\ q \neq 0$). Суцільні лінії відповідають випадку $\Delta = \Delta_{\min}$, штрихові – $\Delta = 1.5\Delta_{\min}$, штрихпунктирні – $\Delta = 2\Delta_{\min}$.

У наведеному прикладі збільшення величини натягу призводить до суттєвого збільшення контактних зусиль між пластинкою і ребром та нормальних напружень у поздовжніх волокнах підсилення, які при перевищенні натягом значення $\Delta = 1.5\Delta_{\min}$ стають стискальними. Кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки для всіх видів навантаження практично

не залежать від величини натягу.

Збіжність методу оцінювалася співставленням результатів розрахунку для різних значень M_0 до $M_0 = 125$. Зауважимо, що починаючи з $M_0 = 75$, всі результати розрахунку повністю співпадають, що свідчить про його добру збіжність.

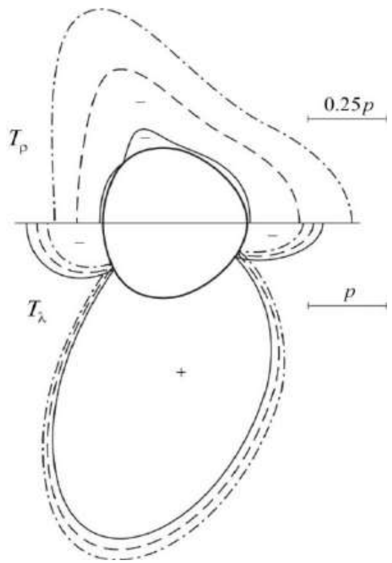


Рис. 13.7

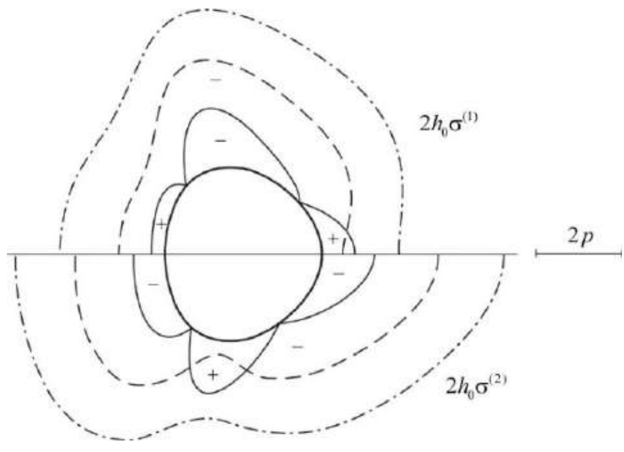


Рис. 13.8

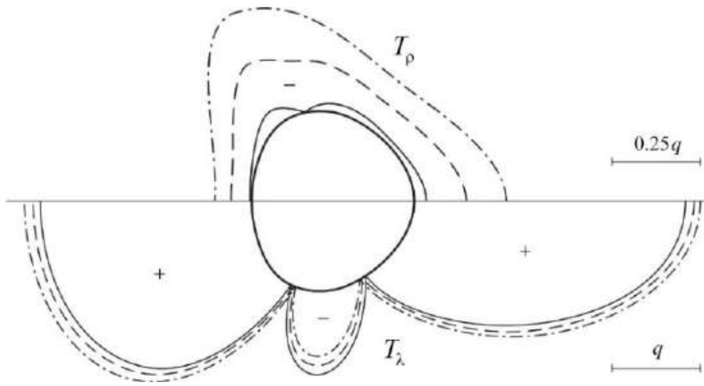


Рис. 13.9

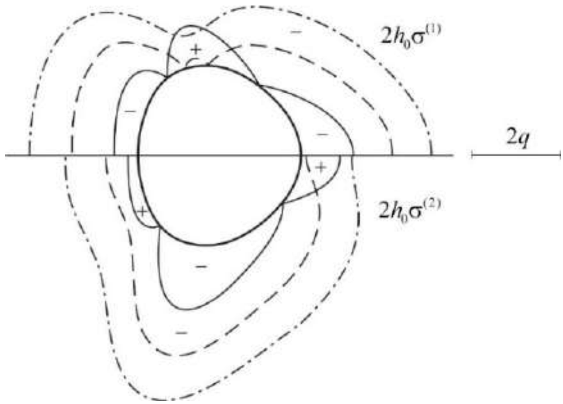


Рис. 13.10

Для пластинки ($\nu = 0.3$) з еліптичним $(\varepsilon_1 = 0.1;\ \varepsilon_2 = 0;\ \varepsilon_3 = 0)$ отвором і пружного ребра з параметрами $h_0/h = 4/3;\ \eta = 0.05R_0;\ E_0/E = 2;\ \ \nu_0 = 0.3$ запропонованим методом досліджено вплив величини натягу та зовнішнього навантаження на положення точок розмикання контакту в системі відліку $(\tilde{\rho},\ \lambda)$ та максимальні значення величин $T_\lambda(0)$, $2h_0\sigma^{(1)}(0)$, $2h_0\sigma^{(2)}(\pi/2)$. Результати розрахунку наведені в таблиці, де позначено $\Delta^* = 2Eh\Delta$; $\Delta^*_{\min} = 2Eh\Delta_{\min}$. Числові значення в знаменнику відповідають навантаженню $p = 1;\ q = 0$, а в чисельнику – $p = 0;\ q = 1$.

Таблиця

λ_* (град)	$\Delta^*_{\min}$	Δ^*	$T_\lambda(0)$	$2h_0\sigma^{(1)}(0)$	$2h_0\sigma^{(2)}(\pi/2)$
0.000 42.47	0.7844 1.2571	$\Delta^*_{\min}$	3.4349 2.6463	-1.2504 -0.6995	-0.7787 -1.3658
		$1.25\Delta^*_{\min}$	3.5102 2.6850	-1.8511 -1.1151	-1.4628 -1.8398
		$1.5\Delta^*_{\min}$	3.5856 2.7238	-2.4519 -1.5307	-2.1469 -2.3138

Розглянемо аналітичний метод визначення кількості точок, в яких розпочинається розмикання контакту між пластинкою і запресованим ребром. Як відомо, розв’язок такої задачі визначає рівняння

$$T_\rho(\lambda) = 0\,, \qquad (13.26)$$

яке з урахуванням умови $\alpha S^*_{\rho\lambda} = \beta T^*_\rho$ і (13.19) можна записати у вигляді

$$T^*_\rho(\lambda) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos\lambda + ... + A_n\cos n\lambda = 0\,. \qquad (13.27)$$

Точку (точки) екстремуму функції $T^*_\rho(\lambda)$ визначаємо з рівняння

$$A_1\sin\lambda + 2A_2\sin 2\lambda + ... + nA_n\sin n\lambda = 0\,, \qquad (13.28)$$

яке після певних перетворень можна записати так:

$$\sin\lambda\cdot(0.5\cdot a_0 + a_1\cos\lambda + ... + a_{n-1}\cos(n-1)\lambda) = 0\,, \qquad (13.29)$$

де a_0, a_1, ..., a_{n-1} – коефіцієнти, що залежать від A_1, A_2, ..., A_n.

Рівняння (13.29) еквівалентне двом рівнянням

$$\sin\lambda = 0 \quad \text{або} \quad 0.5\cdot a_0 + a_1\cos\lambda + ... + a_{n-1}\cos(n-1)\lambda = 0\,. \qquad (13.30)$$

Перше з них на проміжку $[0;\,2\pi]$ має два різних корені $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \pi$, а друге – або не має коренів, або має пару (декілька пар) симетричних відносно осі Ox коренів $\lambda_3 = \lambda_*$; $\lambda_4 = -\lambda_*$.

У випадку подвійної симетрії задачі рівняння (13.30) набувають вигляду

$$\sin 2\lambda = 0 \ \text{або} \ 0.5\cdot a_0 + a_1\cos 2\lambda + ... + a_{2(n-1)}\cos 2(n-1)\lambda = 0\,. \qquad (13.31)$$

Корені першого рівняння $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \pi/2$; $\lambda_3 = \pi$; $\lambda_4 = 3\pi/2$ попарно належать кожній з двох осей симетрії. Друге рівняння або не має коренів, або має четвірку (декілька четвірок) попарно симетричних відносно двох осей симетрії коренів $\lambda_5 = \lambda^*$; $\lambda_6 = \pi - \lambda^*$; $\lambda_7 = \pi + \lambda^*$; $\lambda_8 = 2\pi - \lambda^*$, які не належать цим осям.

Оскільки точку (точки) розмикання контакту визначає абсолютний максимум функції $T^*_\rho(\lambda)$, то на підставі зазначеного вище можна зробити такий висновок: якщо контур отвору має одну вісь симетрії, то розмикання

контакту між пластинкою і ребром розпочнеться або в одній з точок на осі симетрії, або в двох симетричних точках, що не належать осі симетрії; якщо контур отвору має дві осі симетрії, то розмикання контакту між пластинкою і ребром розпочнеться або в двох діаметрально протилежних точках на одній з осей симетрії, або в чотирьох попарно симетричних точках, які не належать осям симетрії.

Якщо умова $\Delta \geq \Delta_{\min}$ не виконується, то на ділянці суцільного контакту в околі точок його розмикання при плавному зменшенні натягу з’являються зони відставання, на яких контактні зусилля між пластинкою і підсилювальним ребром дорівнюють нулю. При цьому крайові умови задачі стають мішаними, внаслідок чого змінюється структура розв’язку задачі і застосування методу скінченних тригонометричних сум стає неможливим.

Дещо інший підхід до розв’язання розглянутих у цьому підрозділі задач з використанням третьої моделі підсилювального ребра і особливих граничних умов запропоновано в працях [2, 9, 11].

13.3. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності симетричного міжфазного розрізу

У процесі виготовлення чи експлуатації кусково-однорідних пластин на криволінійній межі поділу матеріалів можуть виникати дефекти, зокрема, тріщини або розрізи нульової ширини, які зумовлять високу концентрацію напружень і подальше міжфазне руйнування за дії силового навантаження. Такі ж дефекти можуть виникнути і на ділянках руйнування з’єднувального шва.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну пластинку з криволінійним отвором, контур якого Γ підсилений замкненим пружним ребром сталого прямокутного поперечного перерізу. З’єднання пластинки та ребра здійснено методом зварювання (склеювання).

Припустимо, що зовні симетричної ділянки $\Gamma_1 = [-\alpha_0^*, \alpha_0^*]$ контуру Γ між пластинкою і підсилювальним ребром, відбулося руйнування (розшарування) з’єднувального шва внаслідок чого виник міжфазний розріз, береги якого в процесі деформації не контактують. Схема навантаження пластинчастої конструкції наведена на рис. 13.11.

Розв’язання задачі передбачає визначення компонент напруженого стану на контурі Γ в пластинці, підсилювальному ребрі та дослідження впливу на ці величини міжфазного розрізу, форми отвору, відносної жорсткості ребра та виду зовнішнього навантаження.

Математична модель задачі. НДС пластинки визначають контактні зусилля T_ρ, $S_{\rho\lambda}$, прикладені до ділянки $\left[-\alpha_0^*; \alpha_0^*\right]$ контуру Γ з боку підсилювального ребра, і зовнішнє навантаження на нескінченності. При заданому навантаженні деформації контуру Γ в нескінченній пластинці, на

підставі (13.3), (13.4), визначаються за формулами

$$\varepsilon_\lambda^* = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^*(t)ctg\frac{\lambda - t}{2}dt + \varepsilon_\lambda^0\right];$$

$$\tilde{V}^* = \frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda) - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} S_{\rho\lambda}^*(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} T_\rho^*(t)ctg\frac{\lambda - t}{2}dt + V^0\right], \quad (13.32)$$

де $[-\alpha_0;\alpha_0]$ – прообраз ділянки $[-\alpha_0^*;\alpha_0^*]$ при відображенні (13.1).

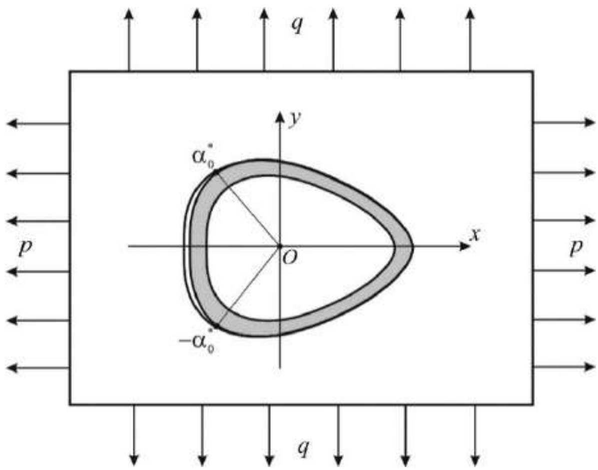


Рис. 13.11

Підсилювальне ребро деформується контактними зусиллями T_ρ, $S_{\rho\lambda}$, що передаються до його зовнішньої поверхні від пластинки. Його розрахункова схема наведена на рис. 13.12.

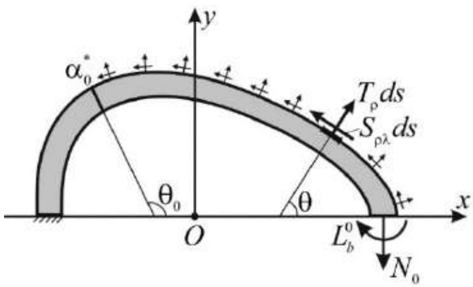


Рис. 13.12

Записуючи умови рівноваги для частинки ребра між поперечними

перерізами $\theta = 0$ і $\theta = \theta$, знаходимо

$$N(\lambda) = N_0 \cos\theta + \int_0^{\lambda} \left[T_\rho^*(t)\sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(\theta - t) \right] dt;$$

$$Q(\lambda) = N_0 \sin\theta - \int_0^{\lambda} \left[T_\rho^*(t)\cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(\theta - t) \right] dt;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_0^{\lambda} [x(\lambda) - x(t)] \times$$

$$\times \left[T_\rho^*(t)\sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(t) \right] dt - \int_0^{\lambda} [y(\lambda) - y(t)] \left[T_\rho^*(t)\cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(t) \right] dt,$$

$$\lambda \in [0;\ \lambda_0] \quad (\theta \in [0;\ \theta_0]). \tag{13.33}$$

$$N(\lambda) = N_0 \cos\theta + \int_0^{\alpha_0} \left[T_\rho^*(t)\sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(\theta - t) \right] dt;$$

$$Q(\lambda) = N_0 \sin\theta - \int_0^{\alpha_0} \left[T_\rho^*(t)\cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(\theta - t) \right] dt;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_0^{\alpha_0} [x(\lambda) - x(t)] \times$$

$$\times \left[T_\rho^*(t)\sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(t) \right] dt - \int_0^{\lambda} [y(\lambda) - y(t)] \left[T_\rho^*(t)\cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(t) \right] dt,$$

$$\lambda \in [\alpha_0;\ \pi] \quad (\theta \in [\theta_0;\ \pi]). \tag{13.34}$$

Фізичні залежності для зовнішнього поздовжнього волокна ребра, яке контактує з пластинкою, мають вигляд (13.8), (13.33). Максимальні нормальні напруження в крайніх волокнах ребра і найбільші дотичні напруження в осьовому волокні ребра визначаються за формулами (13.24).

З'єднувальний елемент моделюємо пружною лінією жорсткість якої на розтяг (стиск) значно менша ніж відповідна жорсткість підсилювального ребра.

Математична модель задачі. Нехтуючи впливом зварювального шва (клейового прошарку) [5, 24, 28, 29], крайові умови задачі на ділянці з'єднання формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту між пластинкою і підсилювальним ребром в диференціальній формі $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_\lambda^{(c)}$; $\tilde{V}(\lambda) = \theta_b(\lambda)$, $\lambda \in [-\alpha_0;\ \alpha_0]$. З урахуванням (13.2) і (13.8) їх можна перетворити до вигляду

$$\frac{\alpha(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda) + \beta(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0 F_0} \left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right];$$

$$\frac{\alpha(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda)-\beta(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda)+\beta^2(\lambda)}=\frac{1}{E_0F_0}\int\limits_0^\lambda\left[N(t)+\frac{L_b(t)}{\eta_c(t)}\right]dt;\quad \lambda\in[-\alpha_0;\,\alpha_0]. \quad (13.35)$$

Підставляючи (13.32), (13.33) в (13.35), одержимо ССІР з ядрами Гільберта для визначення функцій T_ρ^*, $S_{\rho\lambda}^*$

$$\alpha(\lambda)\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}T_\rho^*(t)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}S_{\rho\lambda}^*(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+\varepsilon_\lambda^0\right]+$$

$$+\beta(\lambda)\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}S_{\rho\lambda}^*dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}T_\rho^*(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+V^0\right]=$$

$$=\frac{2Eh(\alpha^2(\lambda)+\beta^2(\lambda))}{E_0F_0}\left[N(\lambda)+\frac{\eta+\eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)}L_b(\lambda)\right];$$

$$\alpha(\lambda)\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}S_{\rho\lambda}^*dt-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}T_\rho^*(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+V^0\right]-$$

$$-\beta(\lambda)\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}T_\rho^*(t)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\alpha_0}^{\alpha_0}S_{\rho\lambda}^*(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+\varepsilon_\lambda^0\right]=$$

$$=\frac{2Eh(\alpha^2(\lambda)+\beta^2(\lambda))}{E_0F_0}\int\limits_0^\lambda\left[N(t)+\frac{L_b(t)}{\eta_c(t)}\right]dt,\quad \lambda\in\left[-\alpha_0;\,\alpha_0\right]. \quad (13.36)$$

Цю систему доповнюємо умовами (13.11), (13.12), в яких слід прийняти

$$N_p=N(\lambda)-N_0\cos\theta;\quad Q_p=Q(\lambda)-N_0\sin\theta;$$

$$L_p=L_b(\lambda)-L_b^0-[x_0-\eta-x(\lambda)+\eta\cos\theta]N_0. \quad (13.37)$$

Разом з (13.11), (13.12), (13.37), (13.33) співвідношення (13.36) визначають математичну модель сформульованої задачі.

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (13.11), (13.12), (13.37), (13.33), (13.36) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянки з'єднання пластинки та ребра.

Оскільки розглядувана задача відноситься до мішаних контактних задач теорії пружності, то відповідно до [4, 12, 14] контактні зусилля T_ρ, $S_{\rho\lambda}$ на кінцях $\lambda=\pm\alpha_0$ ділянки з'єднання пластинки і ребра мають кореневу особливість з локальною осциляцією. Нехтуючи її впливом, наближений розв'язок задачі побудуємо комбінованим методом механічних квадратур і колокації [1, 8, 10, 17, 18, 20].

З цією метою в системі (13.11), (13.12), (13.37), (13.33), (13.36) перейдемо до стандартного проміжку інтегрування $[-1;1]$. Це можна зробити

заміною змінних

$$tg\frac{\lambda}{2}=a_0X\ ;\qquad tg\frac{t}{2}=a_0S\ , \tag{13.38}$$

де

$$a_0=tg\frac{\alpha_0}{2}\ ;\ dt=\frac{2a_0dS}{1+a_0^{\,2}S^2}\ ;\ ctg\frac{\lambda-t}{2}dt=\frac{2dS}{X-S}+\frac{2a_0^{\,2}SdS}{1+a_0^{\,2}S^2}\ .$$

Відповідно до структури розв’язку шукані функції обираємо у вигляді

$$\left\{T_\rho^*\left(X\right),\,S_{\rho\lambda}^*\left(X\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\left\{\Psi_1\left(X\right),\,\Psi_2\left(X\right)\right\}. \tag{13.39}$$

Тут $\Psi_1\left(X\right)$, $\Psi_2\left(X\right)$ – обмежені та неперервні на $\left[-1;1\right]$ функції.

Побудуємо для них інтерполяційні поліноми Лагранжа, вибравши за вузли інтерполяції $\phi_n=\dfrac{2n-1}{2K_0}\pi\ \left(n=\overline{1,K_0}\right)$ корені многочлена Чебишева першого роду порядку K_0

$$\left\{\Psi_1\left(X\right),\,\Psi_2\left(X\right)\right\}=\sum_{n=1}^{K_0}\left\{A_n,\,B_n\right\}\Phi\left(\phi,\phi_n\right), \tag{13.40}$$

у яких введено позначення: A_n, B_n – довільні сталі; $X=\cos\phi$;

$$\Phi\left(\phi,\phi_n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n+1}\cos\left(K_0\phi\right)\sin\phi_n}{K_0\left(\cos\phi-\cos\phi_n\right)},\quad \phi\in\left[0;\pi\right]. \tag{13.41}$$

Використовуючи рівність $\Phi(\phi_n,\,\phi_n)=1$, знаходимо у вузлах інтерполяції

$$\left\{T_\rho^*\left(\lambda_k\right),\,S_{\rho\lambda}^*\left(\lambda_k\right)\right\}=\left\{\frac{A_k}{\sin\phi_k},\,\frac{B_k}{\sin\phi_k}\right\},\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,K_0\ . \tag{13.42}$$

Регулярні інтеграли від функцій $T_\rho^*\left(\lambda\right)$, $S_{\rho\lambda}^*\left(\lambda\right)$ визначаються за квадратурними формулами Гауса

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left\{T_\rho^*\left(t\right),\,S_{\rho\lambda}^*\left(t\right)\right\}dt==\frac{2}{K_0}\sum_{n=1}^{K_0}\left\{\frac{A_n}{\sin\phi_n},\,\frac{B_n}{\sin\phi_n}\right\}q_n. \tag{13.43}$$

Тут $F\left(\lambda,t\right)$ – регулярна на $\left[-1;1\right]$ функція; $q_n=\dfrac{a_0\sin\phi_n}{1+a_0^{\,2}\cos^2\phi_n}$.

Для обчислення сингулярних інтегралів з ядрами Гільберта у вузлах інтерполяції $\lambda=\lambda_k$ використовуємо квадратурну формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\left\{T_\rho^*\left(t\right),\,S_{\rho\lambda}^*\left(t\right)\right\}ctg\frac{\lambda_k-t}{2}dt=$$

$$=\frac{2}{K_0}\sum_{n=1}^{K_0}\left\{\frac{A_n}{\sin\phi_n},\frac{B_n}{\sin\phi_n}\right\}\left(q_n a_0\cos\phi_n-\frac{\sin\phi_n}{\sin\phi_k}ctg\frac{\phi_k+\left(-1\right)^{n+k}\phi_n}{2}\right). \quad (13.44)$$

З урахуванням (13.43), (13.44) та умов $T_\rho(-\lambda)=T_\rho(\lambda)$, $S_{\rho\lambda}(-\lambda)=-S_{\rho\lambda}(\lambda)$ квадратурні формули для регулярних і сингулярних інтегралів, які входять до системи (13.36), можна перетворити до вигляду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}T_\rho^*(t)dt=\frac{2}{M_0}\sum_{n=1}^{M_0}\frac{A_n}{\sin\phi_n}q_n;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}T_\rho^*(t)\mathrm{ctg}\frac{\lambda_k-t}{2}dt=-\frac{2}{M_0}\sum_{n=1}^{M_0}\frac{A_n}{\sin\phi_n}\frac{\mathrm{ctg}\phi_k\sin\phi_n}{\sin\phi_k+(-1)^{k+n}\sin\phi_n};$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}S_{\rho\lambda}^*(t)\mathrm{ctg}\frac{\lambda_k-t}{2}dt=\frac{2}{M_0}\sum_{n=1}^{M_0}\frac{B_n}{\sin\phi_n}\left[-\frac{\sin\phi_n}{\sin\phi_k}\frac{\cos\phi_n}{\sin\phi_k+(-1)^{k+n}\sin\phi_n}+a_0q_n\cos\phi_n\right],$$

$$\lambda_k\in[0;\,\alpha_0]. \quad (13.45)$$

Тут $2M_0=K_0$; M_0 – число вузлів інтерполяції на проміжку $[0;\,\pi/2]$.

Підставляючи співвідношення (13.42), (13.45) в систему (13.36) та порівнюючи ліві і праві частини рівнянь у вузлах колокації $\lambda=\lambda_k$ $(\phi=\phi_k)$, одержимо СЛАР для визначення сталих A_n, B_n, N_0, L_b^0. Якщо ці сталі стануть відомі, то шукані функції у вузлах колокації визначаються за формулами (13.42). При цьому компоненти напруженого стану в пластинці та ребрі знаходимо зі співвідношень (13.2), (13.7), (13.33), (13.34).

Результати числового розрахунку. Для ізотропної ($\nu=0.3$) пластинки з криволінійним ($\varepsilon_1=0.1$; $\varepsilon_2=0.1$; $\varepsilon_3=0$) отвором і підсилювального ребра з фізико-геометричними параметрами $\alpha_0=2\pi/3$; $h_0/h=4/3$; $\eta/R_0=0.5$; $\nu_0=0.3$ досліджено вплив на їх напружений стан форми отвору та відносної жорсткості підсилення E_0/E. Результати числового розрахунку величин T_ρ, $S_{\rho\lambda}$, T_λ, $F_0\sigma^{(1)}$, $F_0\sigma^{(2)}$, $F_0\tau_{\max}$ при $p=0$, $q=1$ наведені на рис.13.13–13.15. Суцільні лінії побудовані для випадку $E_0/E=1$, штрихові – $E_0/E=5$, штрихпунктирні – $E_0/E=10$. Пунктирна лінія побудована для непідкріпленого контуру ($E_0/E=0$).

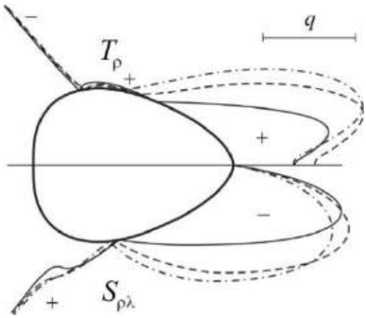


Рис. 13.13

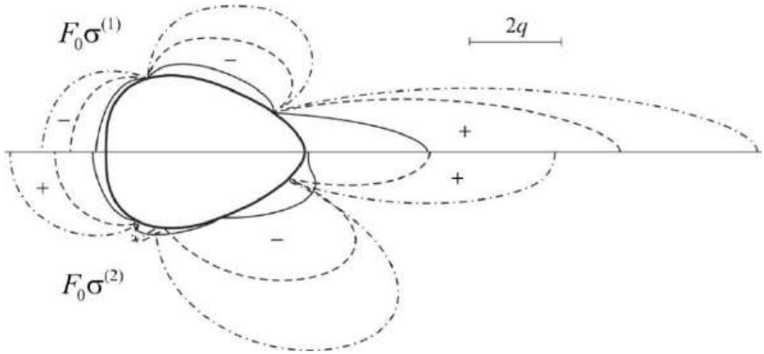


Рис. 13.14

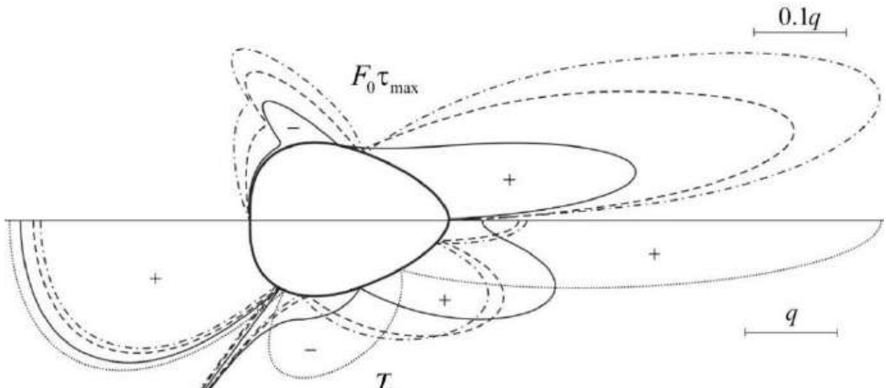


Рис. 13.15

Аналізуючи графіки, наведені на рис. 13.13–13.15, приходимо до висновку, що наявність міжфазного розрізу вносить значний вклад у перерозподіл усіх компонент напруженого стану пластинки і підсилювального ребра. Відзначимо, що при віддаленні від кінців розрізу на ділянці сполучення пластинки та ребра компоненти напруженого стану практично не відрізняються від відповідних компонент за відсутності розрізу.

Зі збільшенням відносної жорсткості підсилювального ребра максимальні значення контактних зусиль у пластинці та нормальних і дотичних напружень у ребрі суттєво зростають. У той же час кільцеві зусилля на ділянці сполучення пластинки і ребра різко зменшуються, залишаючись практично незмінними на ділянці розрізу.

13.4. Розрахунок напружень у пластинці і підсилювальному ребрі за наявності двох симетричних міжфазних розрізів

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку з криволінійним отвором вигляду (13.1), контур якого Γ підсилений замкненим пружним ребром сталого прямокутного поперечного перерізу.

Припустимо, що в процесі виготовлення конструкції чи її експлуатації на лінії сполучення пластинки і ребра зовні ділянок $[-\beta_0^*, -\alpha_0^*]$, $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$, де α_0^*, β_0^* – полярні кути, виникли два симетричних відносно осі Ox міжфазні розрізи, береги яких у процесі деформації не контактують. Розрахункова схема пластинчастої конструкції наведена на рис.13.16.

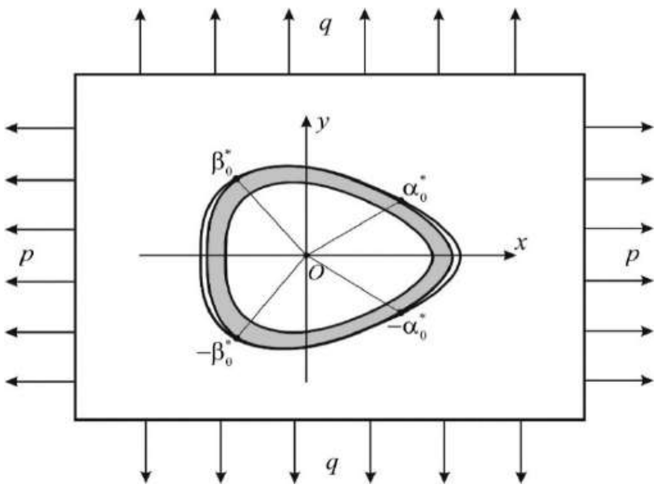


Рис. 13.16

Як і в попередньому підрозділі розв’язання задачі передбачає визначення компонент напруженого стану на контурі Г в пластинці, підсилювальному ребрі та дослідження впливу на ці величини розмірів міжфазних розрізів, відносної жорсткості ребра та виду зовнішнього навантаження.

Основні рівняння задачі. Умовно відділимо підсилювальне ребро від пластинки, замінюючи дію одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями T_ρ, $S_{\rho\lambda}$.

Нескінченна ізотропна пластинка перебуває у рівновазі під дією навантаження на нескінченності і контактних зусиль, які на ділянках $[-\beta_0^*, -\alpha_0^*]$, $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$ передаються від підсилювального ребра.

Оскільки ділянки підсилення симетричні відносно осі Ox, то з урахуванням умов $T_\rho(-\lambda)=T_\rho(\lambda)$, $S_{\rho\lambda}(-\lambda)=-S_{\rho\lambda}(\lambda)$ співвідношення (13.3) для визначення деформацій контуру Г після певних перетворень набувають вигляду

$$\varepsilon_\lambda^*(\lambda)=\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda)-\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}T_\rho^*(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}S_{\rho\lambda}^*(t)\left(\operatorname{ctg}\frac{\lambda-t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\lambda+t}{2}\right)dt+\varepsilon_\lambda^0\right];$$

$$V^*(\lambda)=\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}T_\rho^*(t)\left(\operatorname{ctg}\frac{\lambda-t}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\lambda+t}{2}\right)dt+V^0\right],$$

$$\lambda\in[\alpha_0;\,\beta_0]. \tag{13.46}$$

Тут $[\alpha_0;\,\beta_0]$ – прообраз ділянки $[\alpha_0^*,\,\beta_0^*]$ при відображенні (13.1).

Підсилювальне ребро деформується контактними зусиллями T_ρ, $S_{\rho\lambda}$, що передаються до його зовнішньої бічної поверхні на ділянці $[\alpha_0;\,\beta_0]$ від пластинки. Його розрахункова схема наведена на рис. 13.17.

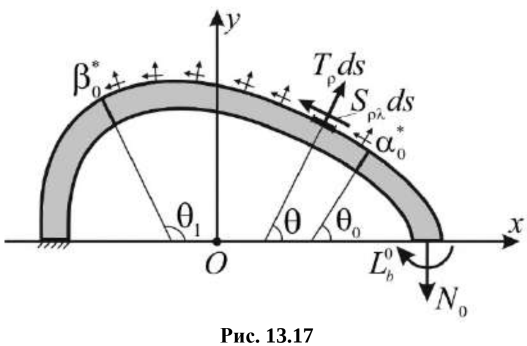


Рис. 13.17

При заданому навантаженні компоненти напруженого стану в поперечних перерізах стрижня визначаються співвідношеннями

$$N(\lambda) = N_0 \cos\theta;\ \ Q(\lambda) = N_0 \sin\theta;\ \ L_b(\lambda) = L_b^0 + (x_0 - \eta - x(\lambda))N_0 + \eta N(\lambda),$$

$$\lambda \in [0;\ \alpha_0]\ \ (\theta \in [0;\ \theta_0]). \tag{13.47}$$

$$N(\lambda) = N_0 \cos\theta + \int_{\alpha_0}^{\lambda} \left[T_\rho^*(t)\sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(\theta - t) \right] dt;$$

$$Q(\lambda) = N_0 \sin\theta - \int_{\alpha_0}^{\lambda} \left[T_\rho^*(t)\cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(\theta - t) \right] dt;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_{\alpha_0}^{\lambda} \left[x(\lambda) - x(t) \right] \times$$

$$\times \left[T_\rho^*(t)\sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(t) \right] dt - \int_{\alpha_0}^{\lambda} [y(\lambda) - y(t)] \left[T_\rho^*(t)\cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(t) \right] dt,$$

$$\lambda \in [\alpha_0;\ \beta_0]\ \ (\theta \in [\theta_0;\ \theta_1]). \tag{13.48}$$

$$N(\lambda) = N_0 \cos\theta + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[T_\rho^*(t)\sin(\theta - t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(\theta - t) \right] dt;$$

$$Q(\lambda) = N_0 \sin\theta - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[T_\rho^*(t)\cos(\theta - t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(\theta - t) \right] dt;$$

$$L_b(\lambda) = L_b^0 + [x_0 - \eta - x(\lambda)]N_0 + \eta N(\lambda) + \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \left[x(\lambda) - x(t) \right] \times$$

$$\times \left[T_\rho^*(t)\sin(t) + S_{\rho\lambda}^*(t)\cos(t) \right] dt - \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [y(\lambda) - y(t)] \left[T_\rho^*(t)\cos(t) - S_{\rho\lambda}^*(t)\sin(t) \right] dt,$$

$$\lambda \in [\beta_0;\ \pi]\ \ (\theta \in [\theta_1;\ \pi]). \tag{13.49}$$

Математична модель задачі. Як і у випадку одного міжфазного розрізу крайові умови задачі формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту між пластинкою і підсилювальним ребра в диференціальній формі на ділянці їх з'єднання. На підставі (13.35) ці умови можна записати у вигляді

$$\frac{\alpha(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda) + \beta(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0 F_0}\left[N(\lambda) + \frac{\eta + \eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)} L_b(\lambda) \right];$$

$$\frac{\alpha(\lambda)\tilde{V}^*(\lambda) - \beta(\lambda)\varepsilon_\lambda^*(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)} = \frac{1}{E_0 F_0}\int_0^{\lambda}\left[N(t) + \frac{L_b(t)}{\eta_c(t)} \right] dt;\ \ \lambda \in [\alpha_0;\ \beta_0]. \tag{13.50}$$

Підставляючи (13.46), (13.48) в крайові умови (13.50) з урахуванням (13.8), одержимо ССІР з ядрами Гільберта для визначення функцій T_ρ^*, $S_{\rho\lambda}^*$

$$\alpha(\lambda)\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}T_\rho^*(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}S_{\rho\lambda}^*(t)\left(\text{ctg}\frac{\lambda-t}{2}-\text{ctg}\frac{\lambda+t}{2}\right)dt+\varepsilon_\lambda^0\right]+$$

$$+\beta(\lambda)\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}S_{\rho\lambda}^*dt-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}T_\rho^*(t)\left(\text{ctg}\frac{\lambda-t}{2}+\text{ctg}\frac{\lambda+t}{2}\right)dt+V^0\right]=$$

$$=\frac{2Eh(\alpha^2(\lambda)+\beta^2(\lambda))}{E_0F_0}\left[N(\lambda)+\frac{\eta+\eta_c(\lambda)}{\rho(\lambda)\eta_c(\lambda)}L_b(\lambda)\right];$$

$$\alpha(\lambda)\left[(1-\nu)S_{\rho\lambda}^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}S_{\rho\lambda}^*dt-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}T_\rho^*(t)\left(\text{ctg}\frac{\lambda-t}{2}+\text{ctg}\frac{\lambda+t}{2}\right)dt+V^0\right]-$$

$$-\beta(\lambda)\left[(1-\nu)T_\rho^*(\lambda)-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}T_\rho^*(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}S_{\rho\lambda}^*(t)\left(\text{ctg}\frac{\lambda-t}{2}-\text{ctg}\frac{\lambda+t}{2}\right)dt+\varepsilon_\lambda^0\right]=$$

$$=\frac{2Eh(\alpha^2(\lambda)+\beta^2(\lambda))}{E_0F_0}\int_0^\lambda\left[N(t)+\frac{L_b(t)}{\eta_c(t)}\right]dt,\quad \lambda\in[\alpha_0;\,\beta_0]. \qquad (13.51)$$

Цю систему доповнюємо умовами (13.11), (13.12) для визначення сталих N_0, L_b^0, в яких слід прийняти

$$N_p=N(\lambda)-N_0\cos\theta;\quad Q_p=Q(\lambda)-N_0\sin\theta;$$

$$L_p=L_b(\lambda)-L_b^0-[x_0-\eta-x(\lambda)+\eta\cos\theta]N_0. \qquad (13.52)$$

Разом з (13.11), (13.12), (13.52) і (13.48) співвідношення (13.51) визначають математичну модель сформульованої задачі.

Наближений розв'язок задачі. Система (13.11), (13.12), (13.51), (13.52) і (13.48) має таку ж структуру, як і відповідна система для ізотропної пластинки з одним міжфазним розрізом. Тому для визначення її наближеного розв'язку використаємо метод механічних квадратур і колокації, апробований в підрозділі 13.3.

Заміною змінних

$$\lambda=2arctg\left(a_0X+b_0\right);\quad t=2arctg\left(a_0S+b_0\right),$$

де

$$a_0 = \frac{tg\dfrac{\beta_0}{2} - tg\dfrac{\alpha_0}{2}}{2}; \quad b_0 = \frac{tg\dfrac{\beta_0}{2} + tg\dfrac{\alpha_0}{2}}{2}; \quad dt = \frac{2a_0 dS}{1+\left(a_0 S + b_0\right)^2};$$

$$ctg\frac{\lambda - t}{2}dt = \frac{2dS}{X-S} + \frac{2a_0\left(a_0 S + b_0\right)dS}{1+\left(a_0 S + b_0\right)^2}, \qquad (13.53)$$

в цій системі перейдемо до проміжку інтегрування $[-1;\,1]$. Тоді

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left\{T_\rho^*(t),\, S_{\rho\lambda}^*(t)\right\}ctg\frac{\lambda - t}{2}dt = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{T_\rho^*(S),\, S_{\rho\lambda}^*(S)\right\}\left[\frac{dS}{X-S} + \frac{a_0\left(a_0 S + b_0\right)dS}{1+\left(a_0 S + b_0\right)^2}\right];$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left\{T_\rho^*(t),\, S_{\rho\lambda}^*(t)\right\}dt = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{T_\rho^*(S),\, S_{\rho\lambda}^*(S)\right\}\frac{a_0 dS}{1+\left(a_0 S + b_0\right)^2},$$

$$S,\, X \in \left[-1;1\right];\; \lambda \in \left[\alpha_0;\beta_0\right]. \qquad (13.54)$$

Провівши заміну змінних $X = \cos\phi$ при $\phi \in \left[0;\pi\right]$, необмежений на кінцях ділянок з'єднання, розв'язок системи (13.11), (13.12), (13.51), (13.52) і (13.48) обираємо у вигляді (13.39). При цьому квадратурні формули для сингулярних і регулярних інтегралів на ділянці $[\alpha_0;\ \beta_0]$ набувають вигляду

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left\{T_\rho^*(t),\, S_{\rho\lambda}^*(t)\right\}ctg\frac{\lambda_k - t}{2}dt =$$

$$= \frac{2}{K_0}\sum_{n=1}^{K_0}\left\{\frac{A_n}{\sin\phi_n},\, \frac{B_n}{\sin\phi_n}\right\}\left(\tilde{q}_n\left(a_0\cos\phi_n + b_0\right) - ctg\psi\,\frac{\sin\phi_n}{\sin\phi_k}\right);$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\left\{T_\rho^*(t),\, S_{\rho\lambda}^*(t)\right\}dt = \sum_{n=1}^{K_0}\left\{\frac{A_n}{\sin\phi_n},\, \frac{B_n}{\sin\phi_n}\right\}\tilde{q}_n, \qquad (13.55)$$

де

$$\tilde{q}_n = \frac{a_0\sin\phi_n}{1+\left(a_0\cos\phi_n + b_0\right)^2};\; \psi = \frac{\phi_k + \left(-1\right)^{n+k}\phi_n}{2};$$

$$t_n = 2arctg\left(a_0\cos\phi_n + b_0\right);\; \lambda_k = 2arctg\left(a_0\cos\phi_k + b_0\right), \quad k = \overline{1,\, K_0}.$$

Підставляючи (13.55) з урахуванням (13.48) в систему (13.51) та порівнюючи ліві та праві частини рівнянь у вузлах колокації $\lambda = \lambda_k$ $\left(\phi = \phi_k\right)$, одержимо СЛАР для визначення сталих A_n, B_n, N_0, L_b^0.

Якщо ці сталі стануть відомі, то значення шуканих функцій у вузлах колокації визначаємо за формулами (13.42).

Аналіз числових розрахунків. Для нескінченної пластинки ($\nu = 0.3$) з

яйцевидним криволінійним отвором ($\varepsilon_1 = 0.1$; $\varepsilon_2 = -0.1$; $\varepsilon_3 = 0$) і підсилювального ребра з параметрами $h_0 / h = 4/3$; $\eta / R_0 = 0.1$; $\alpha_0 = 30^\circ$; $\beta_0 = 150^\circ$; $\nu_0 = 0.3$ досліджено вплив відносної жорсткості підсилення та виду зовнішнього навантаження на напружений стан пластинки і ребра.

Результати числового розрахунку величин T_ρ, $S_{\rho\lambda}$, T_λ на контурі Г в пластинці та $F_0\sigma^{(1)}$, $F_0\sigma^{(2)}$, $F_0\tau_{\max}$ в ребрі наведені на рис. 13.18–13.20 ($p=0$, $q=1$) і рис. 13.21–13.23 ($p=1$, $q=0$). Штрихові лінії побудовані для випадку $E_0 / E = 1$; суцільні для $E_0 / E = 5$; штрихпунктирні – для $E_0 / E = 10$.

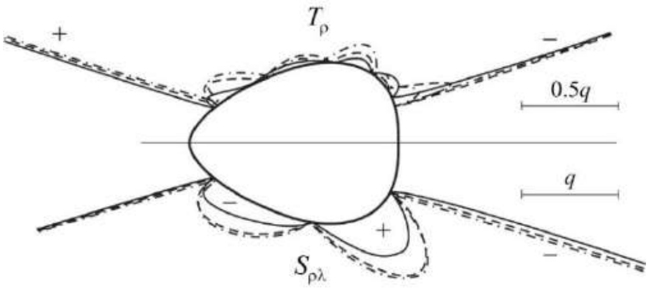


Рис. 13.18

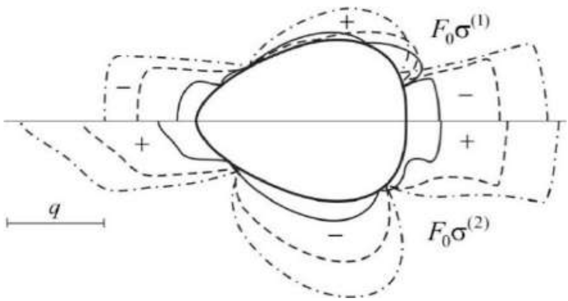


Рис. 13.19

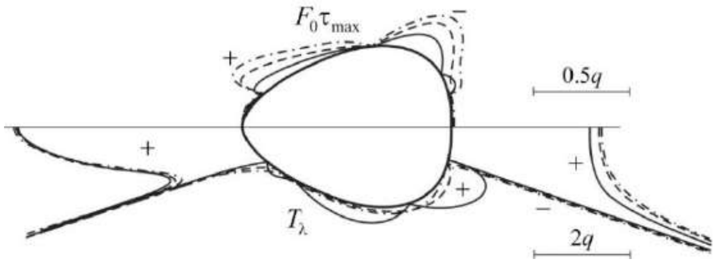


Рис. 13.20

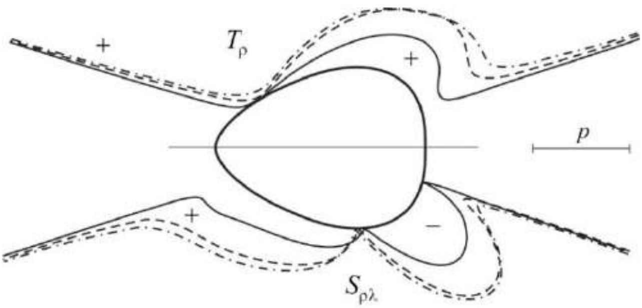


Рис. 13.21

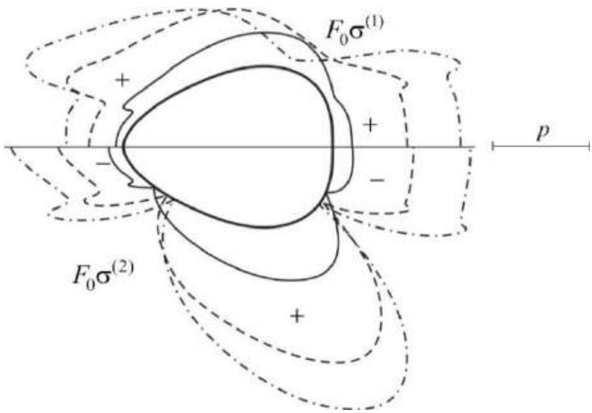


Рис. 13.22

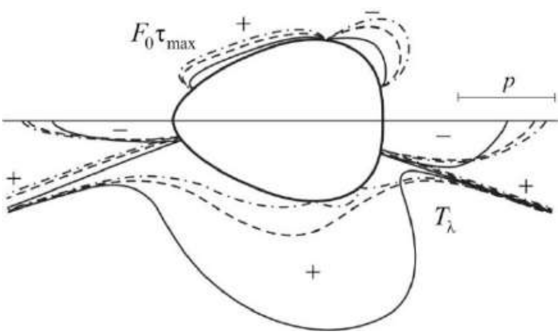


Рис. 13.23

Аналіз наведених результатів дозволяє стверджувати, що наявність двох симетричних міжфазних розрізів призводить до значного перерозподілу компонент напруженого стану пластинки і підсилювального ребра, особливо в околі кінців розрізів. Характер цього перерозподілу на ділянках з'єднання пластинки і ребра та міжфазних розрізів такий самий, як у випадку одного розрізу.

При розтягу пластинки перпендикулярно до осі симетрії отвору жорсткість підсилення суттєво збільшує максимальні значення нормальних і дотичних зусиль у підсилювальному ребрі та практично не впливає на контактні і кільцеві зусилля в пластинці. Якщо пластинка розтягується в напрямку осі симетрії отвору, то при збільшенні відносної жорсткості ребра максимальні значення всіх компонент напруженого стану пластинки і ребра (крім кільцевих зусиль) суттєво збільшуються, особливо нормальні напруження в поздовжніх волокнах ребра. Для кільцевих зусиль спостерігається обернена залежність.

Відзначимо, що максимальні дотичні напруження в осьовому волокні ребра значно менші від решти компонент напруженого стану, тому ними можна знехтувати в інженерних розрахунках.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Батишкіна Ю.* Часткове підкріплення криволінійних отворів в пластинках тонкими пружними стержнями змінної жорсткості // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: – 2003. – С. 316–318.
2. *Божидарнік В.В., Андрейків О.Є., Сулим Г.Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: у 2-ох т. – Т.2. Математичні методи в задачах механіки руйнування неперервно армованих композитів. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – 424 с.
3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 638 с.
4. *Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М.* Напруження в пластинках з коловою лінією

розмежування граничних умов. – Львів: Вищ. шк., 1975. – 116 с.

5. *Дейнека О.Ю.* Міжфазний розріз на межі зварювання ізотропної пластинки з криволінійним отвором і замкненого пружного ребра. // Міжвуз. зб. «Наукові нотатки» (Луцьк). – 2019. – Вип. 67. – С. 41–47.
6. *Дейнека О.Ю., Сяський В.А.* Напружена посадка замкненого кругового стрижня в круговий отвір нескінченної ізотропної пластинки // Вісник НУВГП. Технічні науки (Рівне). – 2016. – Вип. 3 (74). – С. 349–356.
7. *Иванов Г.М.* Статика сооружений. – Л.: Стройиздат, 1968. – 206 с.
8. *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
9. *Мартынович Т.Л., Зварич М.К.* Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 9. – С. 46–52.
10. *Мартынович Т.Л., Сяський В.А.* Определение напряженного состояния пластинки с разомкнутым ребром жесткости // Изв. вузов. Строительство и архитектура (Новосибирск). – 1985, № 8. – С. 32–34.
11. *Мартынович Т.Л., Юринец В.Е.* Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вищ. шк., 1984. –160 с.
12. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
13. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С.* Опір матеріалів. – К.: Вищ. шк., 2004. – 656 с.
14. *Рвачев В.Л., Проценко В.С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. – К.: Наук. думка, 1977. – 236 с.
15. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
16. *Сулим Г.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видав. центр НТШ, 2007. – 716 с.
17. *Сяський А.А.* Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием // Прикл. математика и механика. –1986. – **50**, № 2. – С. 247–254.
18. *Сяський А., Батишкіна Ю*. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці // Вісник ТНТУ. – 2015. – **9**, № 2. – С. 5–12.
19. *Сяський А., Комбель С.* Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки // Машинознавство. – 2003. – № 4 (70). – С. 27–33.
20. *Сяський А.А., Сяський В.А.* Напряженное состояние кусочно-однородной пластинки с упругим включением // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 5. – С. 94–99.

21. *Сяський А., Шевцова Н.* Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів // Вісник ТНТУ. – 2015. – № 3(79). – С. 24–30.
22. *Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю.* Напружена посадка замкненого пружного стрижня в криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки // Вісник Хмельницьк. нац. ун-ту. Технічні науки. – 2017, № 5. – С. 32–38.
23. *Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю.* Міжфазна тріщина в ізотропній нескінченній пластинці з підсиленим круговим контуром // Вісник НУВГП. Технічні науки (Рівне). – 2017. – Вип. 4 (80). – С. 168–177.
24. *Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю.* Міжфазний розріз в ізотропній пластинці з криволінійним контуром, підсиленим замкненим пружним ребром // Вісник Хмельницьк. нац. ун-ту. Технічні науки. – 2019, № 3. – С. 18–23.
25. *Сяський А., Шинкарчук Н.* Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска // Вісник ТНТУ. – 2011. – **16,** № 1. – С. 16–21.
26. *Филин А.П., Тананайко О.Д., Чернева И.М., Шварц М.А.* Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. – Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
27. *Шваб'юк В.І., Маткова А.В., Садівський В.М.* Про уточнення рівнянь кривих брусів і кілець // Наук. нотатки Луцьк. індустр. ін-ту. – 1994. – Вип. 25. – С. 51–59.
28. *Syasky A., Dejneka O., Shevtsova N.* Interphase gross – sections in the infinity plate with curvilinear contour reinforced by closed rib // Sci. J. of TNTU. – 2019. – **96**, №4. – P. 23–31.
29. *Siaskyi A., Siaskyi V., Shevtsova N.* The flow of concentrated force through open elastic rod to the contour of the curved hole in infinite plate // Sci. J. of TNTU. – 2017. – **87**, №3. – P. 16–25.

РОЗДІЛ 14

ПРИПОВЕРХНЕВА НЕОДНОРІДНІСТЬ ГУСТИНИ ТА ШОРСТКІСТЬ ПОВЕРХНІ У МОДЕЛІ ЛОКАЛЬНО НЕОДНОРІДНОГО ПРУЖНОГО ТІЛА

Т.С. Нагірний, К.А. Червінка

Поширення сучасних матеріалів, у яких важливою є роль поверхневого фактору, вимагає розвитку нових напрямів досліджень, у тому числі механіки поверхні [20], мікро- та наномеханіки [19], побудови нових моделей та підходів опису тонкоплівкових систем [29]. Приповерхнева неоднорідність деформівного твердого тіла у значній мірі визначає його експлуатаційні властивості. Вона впливає на протікання фазових перетворень, поширення тріщин, крихке руйнування, змочування тощо [21, 22]. З поверхнею пов'язують розмірні ефекти межі міцності, текучості, а також параметрів довговічності. Особливості приповерхневої неоднорідності покладено в основу різноманітних технологічних процесів у металургії та сучасній техніці [1, 12, 18].

У науковій літературі відомо низку підходів зорієнтованих на опис особливого стану приповерхневої області тіла. Деякі з цих підходів тяжіють до врахування атомарної структури речовини, інші ж роблять спроби розширити застосовність континуального підходу до опису ефектів, притаманних наноматеріалам та іншим матеріалам із складною структурою. Перевагою останніх є можливість використання результатів й методів нелінійної механіки та нерівноважної термодинаміки, апробовані способи врахування впливу полів різної фізичної природи.

У цьому розділі розглянуто особливості застосування локально градієнтного підходу до побудови математичних моделей механіки деформівного твердого тіла, що враховують геометричну неоднорідність реальної поверхні. Розширено кількість параметрів, що описують шорсткість поверхні. Проведено оцінку поверхневого значення густини та на прикладах модельних задач проілюстровано вплив нововведених параметрів на приповерхневу неоднорідність, напруження та міцність тонкої плівки. Матеріал розділу ґрунтується на наукових результатах, опублікованих у працях [9, 10, 15, 23, 24, 26].

14.1. Густина та шорсткість поверхні тіла

14.1.1. Геометрична неоднорідність профілю реальної поверхні

Розглянемо більш детально структуру приповерхневої області тіла. Її профіль схематично представлено на рис. 14.1. Типовим для реальної поверхні тіла є її геометрична неоднорідність (шорсткість). У машинобудуванні для опису властивостей поверхні широко використовують такі параметри як стандартне

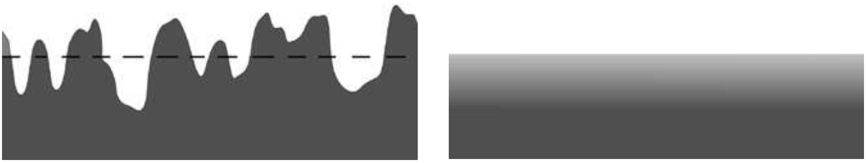
середнє квадратичне відхилення профілю, середнє квадратичне похідних профілю чи висота нерівностей профілю по десяти точках [5, 17, 30].



Рис. 14.1

У механіці деформівного твердого тіла поняття поверхні тіла ідеалізується і, зазвичай, вона моделюється гладкою поверхнею. Так, у випадку півпростору такою поверхнею приймають площину. У класичних моделях механіки густина тіла є сталою і не змінюється при відході від поверхні у глибину.

Не зменшуючи загальності приймемо, що математична поверхня тіла знаходиться між найбільшою та найменшою висотою профілю реальної поверхні (пунктирна лінія на рис. 14.2 *а*). Проводячи осереднення за координатою вздовж поверхні тіла, приходимо до висновку, що поверхневе значення густини ρ_a є меншим від густини ρ_* у глибині тіла. У цьому випадку (врахування геометричної неоднорідності реальної поверхні), густина зростає у глибину півпростору від заданого поверхневого значення ρ_a до ρ_*, що схематично представлено на рис. 14.2 *б*. Якщо ж у модельному описі врахувати далекодію, коли стан у розглядуваній точці залежить від стану у сусідніх точках тіла, то така приповерхнева неоднорідність густини спричинить ненульові значення зв'язаних полів.



а ***б***

Рис. 14.2

Зазначимо, що з метою врахування шорсткості реальної поверхні тіла, зокрема в задачах контактної взаємодії, її часто приймають у вигляді синусоїди як на рис. 14.3. Якщо у такому випадку провести осереднення за координатою Y уздовж профілю поверхні у припущенні, що густина матеріалу дорівнює ρ_*, а амплітуда профілю $X(Y)$ поверхні – h (X – декартова координата, вісь якої спрямована усередину тіла, $-h \le X \le h$, $X = -h$ відповідає верхній точці (на рисунку) профілю поверхні, а $X = h$ – нижній точці цього профілю), то осереднена густина змінюється за законом



Рис. 14.3

$$\rho = \rho_* \left(\frac{1}{\pi} x \arcsin x + \frac{1}{\pi} \sqrt{1 - x^2} + \frac{x}{2} \right), \qquad (14.1)$$

де $x = X / h$. Цей розподіл густини представлено на рис. 14.4. Більш загально графік такої залежності відомий у літературі як крива Аботта-Файєрстоуна (Abbott–Firestone [30]). Її широко використовують при описі опорних поверхонь у техніці.

Аналогічне до (14.1) співвідношення, записане для переміщення, покладено в основу моделі [13], що враховує шорсткість при контактній взаємодії.

Зупинимося детальніше на визначенні значення густини на поверхні тіла.

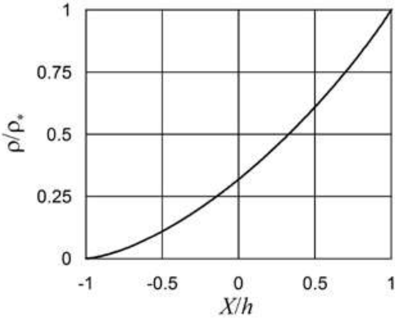


Рис. 14.4

14.1.2. Густина на поверхні тіла

Опишемо детальніше густину тіла виконаного з структурно неоднорідного матеріалу з точки зору фізично малого елемента. Густина є осередненою характеристикою, що дорівнює відношенню маси матеріалу у фізично малому елементі до його об'єму. Це значення ми приписуємо точці, що співпадає з центром фізично малого елемента. Позначимо ділянку тіла V, а область фізично малого елемента – Ω. Нехай Ω – сфера радіуса R_0 і V – півпростір $x \geq 0$ (рис. 14.5). У роботі [25] радіус R_0 пов'язано з характерним розміром структурної неоднорідності матеріалу. Для фізично малого елемента у глибині тіла $\Omega \subset V$ і густина структурно неоднорідного тіла збігається з такою для структурно неоднорідного середовища. У випадку $\Omega \setminus V \neq \varnothing$ (центр фізично малого елемента знаходиться на відстані, меншій аніж R_0 від геометричної поверхні тіла) область Ω містить частину матеріалу тіла, а також частину його оточення. У цьому випадку справджується

$$\rho = \rho_* \int\limits_{\Omega \cap V} dV \Big/ \int\limits_{\Omega} dV , \qquad (14.2)$$

а тому $\rho < \rho_*$. Переміщаючи фізично малий елемент із глибини півпростору до його поверхні, ми отримуємо значення густини $\rho_* / 2$, коли центр фізично малого елемента знаходиться на поверхні півпростору. Це означає, що для плоскої межі тіла існує природна гранична умова

$$\rho\big|_{\partial V} \equiv \rho_a = \frac{1}{2}\rho_* . \qquad (14.3)$$

Зазначимо, що у роботі [26] представлено також формули для густини на циліндричній та сферичній поверхнях тіла.

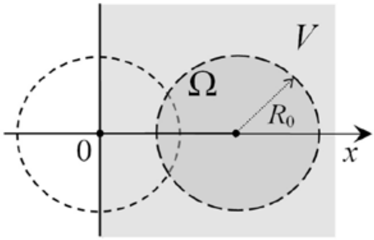


Рис. 14.5

Моделі, побудовані в рамках локально градієнтного підходу, враховують структурну неоднорідність матеріалу, а приповерхнева неоднорідність густини генерує ненульовий напружено-деформований стан і таким чином впливає на експлуатаційні параметри деформівних твердих тіл [9, 23]. Зупинимося коротко на основних положеннях підходу.

14.2. Базові положення модельного опису

Підхід до побудови моделей структурно неоднорідного твердого тіла використовує базові положення термодинаміки нерівноважних процесів, нелінійної механіки та функціонального аналізу [4, 6]. Такі моделі включають балансові рівняння та визначальні співвідношення (рівняння стану і кінетичні рівняння), на основі яких записують розв'язуючі системи рівнянь. Тут обмежимося розглядом термопружних структурно неоднорідних твердих тіл.

14.2.1. Балансові рівняння

Для деформівного твердого тіла, у якому базовими процесами є процеси теплопровідності, деформування та зміни густини, рівняння балансу повної енергії E при нехтуванні конвективною складовою потоків, можемо записати у вигляді [9]

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \left(\hat{\sigma} \cdot \vec{v} - T\vec{j}_s - H\vec{j}_m\right) + \sigma_E , \qquad (14.4)$$

де τ – час, $\hat{\sigma}$ – тензор напружень Коші, $\vec{v}$ – вектор швидкості, $\vec{j}_s, \vec{j}_m$ – вектори потоків ентропії та маси, T, H – абсолютна температура та хімічний потенціал, σ_E – джерела енергії, $\vec{\nabla}$ – диференціальний оператор Гамільтона, крапкою позначено скалярний добуток.

Поряд з (14.4) повинні справджуватися балансові рівняння для імпульсу механічного поступального руху $\vec{k}_v$, маси та ентропії S, які для прийнятого наближення записуємо у вигляді [10, 15]

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} ,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m + \sigma_m ,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s + \sigma_s . \qquad (14.5)$$

Тут σ_s й σ_m – виробництво ентропії та джерела маси відповідно. Джерела маси пов’язуємо із джерелами енергії σ_E співвідношенням $\sigma_m = \sigma_E / H$ [9].

Використовуючи співвідношення (14.5) та подання повної енергії сумою внутрішньої і кінетичної енергій $E = U + K$, а також вираз для приросту кінетичної енергії $dK = \vec{v} \cdot d\vec{k}_v$, рівняння (14.4) записуємо як

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} + H \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - T\sigma_s - \vec{j}_s \cdot \vec{\nabla} T - \vec{j}_m \cdot \vec{\nabla} H , \qquad (14.6)$$

де $\hat{e}$ – тензор деформацій, символ „:” відзначає згортку тензорів за двома індексами. Дане співвідношення є базовим при формулюванні визначальних співвідношень моделі.

14.2.2. Визначальні співвідношення

Причиною виникнення термодинамічних потоків $\vec{j}_s, \vec{j}_m$ є термодинамічні сили, які, зазвичай, пов’язані із градієнтами температури та хімічного потенціалу $\vec{\nabla} T$, $\vec{\nabla} H$ [3, 4]. Тому потоки $\vec{j}_s, \vec{j}_m$ приймають функціями $\vec{\nabla} T$, $\vec{\nabla} H$. Більш загальним поданням залежності потоків від сил є залежність функціональна [11]

$$\vec{j}_s = Js_{\varsigma=0}^{\tau}\left(\vec{\nabla} T, \vec{\nabla} H\right), \quad \vec{j}_m = Jm_{\varsigma=0}^{\tau}\left(\vec{\nabla} T, \vec{\nabla} H\right), \qquad (14.7)$$

де $Js_{\varsigma=0}^{\tau}\left(\vec{\nabla} T, \vec{\nabla} H\right)$, $Jm_{\varsigma=0}^{\tau}\left(\vec{\nabla} T, \vec{\nabla} H\right)$ – функціонали, що перетворюють актуальні значення сил $\vec{\nabla} T(\tau), \vec{\nabla} H(\tau)$ та їх історії $\vec{\nabla} T(\varsigma), \vec{\nabla} H(\varsigma)$ ($-\infty < \varsigma < \tau$) на актуальні значення відповідних потоків.

Для ізотропного матеріалу за лінеаризованого наближення співвідношення (14.7) можна записати у вигляді

$$\vec{j}_\alpha(\tau) = G_{\alpha s} * \vec{\nabla} T + G_{\alpha m} * \vec{\nabla} H , \qquad (14.8)$$

де $G_{\alpha\beta}$ – функціонали по історіях зміни сил

$$G_{\alpha\beta} * f = \int_{-\infty}^{\tau} g_{\alpha\beta}(\tau, \varsigma) \frac{\partial f(\varsigma)}{\partial \varsigma} d\varsigma, \ \alpha, \beta = \{s, m\} , \qquad (14.9)$$

$g_{\alpha\beta}(\tau, \varsigma)$ – функції впливу (ядра).

Вибором функції впливу у функціоналах конкретизуємо вигляд залежності термодинамічних потоків від сил. Приймаємо їх такими, що ведуть до наступних термодинамічних потоків [9]

$$\vec{j}_s = -\lambda_s \frac{\vec{\nabla} T}{T}, \quad \vec{j}_m = -g_{mm} \frac{\partial(\vec{\nabla} H)}{\partial \tau}, \tag{14.10}$$

де λ_s, g_{mm} – сталі.

Подання (14.10) змінює рівняння балансу маси до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\rho - g_{mm} \nabla^2 H\right) = \sigma_m \tag{14.11}$$

та дозволяє ввести у розгляд внутрішню енергію структурно неоднорідного (гетерогенного) матеріалу

$$\aleph = U - \frac{1}{2} g_{mm} \vec{\nabla} H \cdot \vec{\nabla} H \,. \tag{14.12}$$

На основі (14.6) записуємо

$$\frac{\partial \aleph}{\partial \tau} = \hat{\sigma} : \frac{\partial \hat{e}}{\partial \tau} + T \frac{\partial S}{\partial \tau} + H \frac{\partial \rho}{\partial \tau} - T\sigma_s + \lambda_s \vec{\nabla} T \cdot \frac{\vec{\nabla} T}{T} \,. \tag{14.13}$$

Приймаючи для виробництва ентропії σ_s класичний для термопружного тіла вигляд [3, 7], вводимо у розгляд вільну енергію гетерогенного матеріалу $\Im$ перетворенням Лежандра

$$\Im = \aleph - TS \,, \tag{14.14}$$

для приросту якої справджується

$$d\Im = \hat{\sigma} : d\hat{e} - SdT + Hd\rho \,. \tag{14.15}$$

Енергія $\Im$ означена у просторі деформацій $\hat{e}$, температури T і густини ρ

$$\Im = \Im(\hat{e}, T, \rho) \,. \tag{14.16}$$

Параметрами, спряженими до базових, є напруження $\hat{\sigma}$, ентропія S та хімічний потенціал H. Збурення останнього можна ототожнити зі збуренням енергії зв'язку [9]. Зазначимо, що в моделі класичного термопружного тіла вільна енергія $F = U - TS$ означена в просторі деформації та температури, тобто $F = F(\hat{e}, T)$ [7].

Співвідношення (14.15) дозволяє записати такі рівняння стану

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial \Im}{\partial \hat{e}}, \quad H = \frac{\partial \Im}{\partial \rho}, \quad S = -\frac{\partial \Im}{\partial T} \,. \tag{14.17}$$

Явний вигляд рівнянь стану дає конкретизація енергії $\Im$ у просторі збурень базових параметрів стану. Приймаючи енергію $\Im$ квадратичною функцією на основі (14.17) записуємо такі лінійні рівняння стану

$$\hat{\sigma} = 2\mu\hat{e} + \left[\lambda e - (3\lambda + 2\mu) a_m (\rho - \rho_*) - (3\lambda + 2\mu) a_t (T - T_*)\right]\hat{I} \,,$$

$$H = H_* - (3\lambda + 2\mu) a_m e + \alpha_{mm} (\rho - \rho_*) + \alpha_{mt} (T - T_*) \,,$$

$$S = S_* + (3\lambda + 2\mu) a_t e - \alpha_{mt} (\rho - \rho_*) + \frac{c_v}{T_*} (T - T_*) \,, \tag{14.18}$$

де $\lambda, \mu, a_m, a_t, \alpha_{mm}, \alpha_{mt}, c_v$ – сталі, $\hat{I}$ – одиничний тензор, $e = \hat{e} : \hat{I}$, зірочкою

відзначено значення параметрів у відліковому стані.

Сформульовані вище співвідношення разом з виразом для імпульсу механічного поступального руху

$$\vec{k}_v = \rho\vec{v} = \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau} \tag{14.19}$$

та співвідношенням Коші

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\otimes\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\right)^T\right), \tag{14.20}$$

що пов'язує тензор деформації із вектором переміщення $\vec{u}$, складають повну систему рівнянь моделі гетерогенного термопружного тіла. Необхідно також сконкретизувати вираз джерел маси. Індекс T у (14.20) відзначає транспонування тензора другого рангу, а символ " $\otimes$ " означає діадний добуток.

14.2.3. Ключова система рівнянь

Якщо за розв'язуючі функції вибрати тензор напружень та густину, то для стаціонарного стану та ізотермічного режиму ($T = T_*$) маємо систему рівнянь

$$\vec{\nabla}\cdot\hat{\sigma} = 0\,,$$

$$Ink\left[\frac{\hat{\sigma}}{2\mu} - \left(\frac{\lambda\sigma}{2\mu(3\lambda+2\mu)} - a_m(\rho-\rho_*)\right)\hat{I}\right] = 0\,,$$

$$\nabla^2\rho - \xi^2(\rho-\rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m}\,, \tag{14.21}$$

де Ink – оператор несумісності, ξ – стала,

$$d_{\sigma m} = \int_{\tau_0}^{\tau}\sigma_m dt\,, \tag{14.22}$$

τ_0 – відліковий момент часу. Зазначимо, що у [9, 25] параметр ξ пов'язано з характерним розміром структурної неоднорідності матеріалу. При формулюванні третього співвідношення системи рівнянь (14.21) використано залежність

$$\nabla^2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = a_m\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\nabla^2\rho\,, \tag{14.23}$$

яка є наслідком рівняння рівноваги, записаного за ізотермічного наближення.

Оскільки ключову систему рівнянь сформульовано відносно тензора напружень $\hat{\sigma}$ і густини ρ, тому граничні умови варто формулювати для цих функцій. Граничну умову першого роду для густину обговорено вище, а для напружень вибираємо загальноприйняті у механіці умови [2, 7].

Конкретизація джерел маси (далі будемо використовувати той же термін для $d_{\sigma m}$, що і для σ_m в силу їх зв'язку (14.22)) пов'язана із узгодженням в

рамках моделі відлікового й актуального станів із врахуванням поверхневого значення густини [24].

14.3. Приповерхнева неоднорідність густини у півпросторі

Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження ізотропний деформівний півпростір, що займає область $x \geq 0$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Вважаємо, що на поверхні тіла задано постійне значення густини ρ_a. За відліковий стан приймаємо стан однорідного вільного від силового навантаження тіла, густина якого є сталою і дорівнює $\rho_* \geq \rho_a$.

Система рівнянь (14.21) у одновимірному випадку набуває вигляду

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0 ,$$

$$\frac{d^2\sigma_{yy}}{dx^2} = \frac{d^2\sigma_{zz}}{dx^2} = -2\mu a_m \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2\rho}{dx^2} ,$$

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} - \xi^2(\rho - \rho_*) = -\xi^2 d_{\sigma m} . \tag{14.24}$$

Граничні умови задачі та умови обмеженості розв’язку приймаємо у вигляді

$$\sigma_{xx}\big|_{x=0} = 0 , \quad \rho\big|_{x=0} = \rho_a ,$$

$$\left|\sigma_{\gamma\gamma}\right|_{x\to+\infty} < +\infty, \quad \gamma = \{x, y, z\} , \quad \left|\rho\right|_{x\to+\infty} < +\infty . \tag{14.25}$$

За відсутності джерел маси для густини одержуємо

$$\rho = \rho_* + (\rho_a - \rho_*)\exp(-\xi x) . \tag{14.26}$$

Введення джерел маси дозволяє змінювати розподіл густини у приповерхневій області тіла і таким чином враховувати різний характер геометричної неоднорідності поверхні тіла. У роботі [9] досліджено приповерхневу неоднорідність для джерел експоненційного типу

$$d_{\sigma m}(x) = (\rho_a - \rho_*)e^{-\zeta x} . \tag{14.27}$$

Будемо говорити, що параметр ζ характеризує поверхневу неоднорідність. Більш загальним, порівняно із (14.27), є подання джерел у вигляді

$$d_{\sigma m}(x) = (\rho_a - \rho_*)e^{-(\zeta x)^k} . \tag{14.28}$$

Воно дає змогу враховувати на один параметр більше при моделюванні профілю реальної поверхні, порівняно з попередніми дослідженнями. У [22] зазначено, що багато різних поверхонь можуть мати те ж значення RMS (середньоквадратичне відхилення профілю), проте значно відрізнятись геометричними властивостями. Це означає, що розширення набору параметрів геометричної неоднорідності поверхні тіла у моделі підвищує універсальність

моделі та її корисність.

Розв'язок сформульованої задачі має вигляд

$$\rho(x) = \rho_* + (\rho_a - \rho_*)e^{-\xi x} + \frac{\xi e^{\xi x}}{2}\int_x^{+\infty} d_{\sigma m}(t)e^{-\xi t}dt -$$

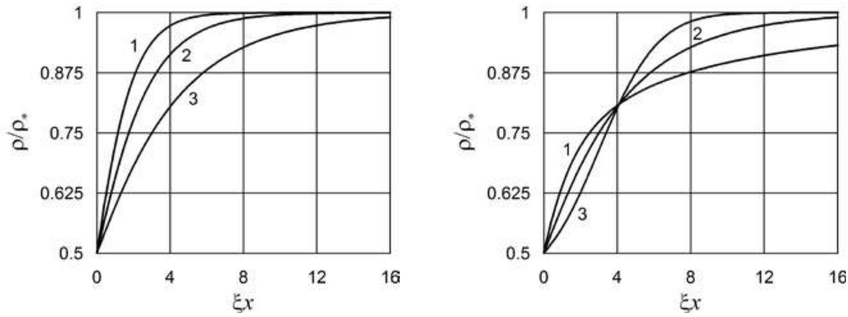
$$-\frac{\xi e^{-\xi x}}{2}\left(\int_0^{+\infty} d_{\sigma m}(t)e^{-\xi t}dt - \int_0^{x} d_{\sigma m}(t)e^{\xi t}dt\right),$$

$$\sigma_{xx}(x) = 0\ ,$$

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{zz}(x) = -2\mu a_m \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\left[(\rho_a - \rho_*)e^{-\xi x} + \frac{\xi e^{\xi x}}{2}\int_x^{+\infty} d_{\sigma m}(t)e^{-\xi t}dt - \right.$$

$$\left. -\frac{\xi e^{-\xi x}}{2}\left(\int_0^{+\infty} d_{\sigma m}(t)e^{-\xi t}dt - \int_0^{x} d_{\sigma m}(t)e^{\xi t}dt\right)\right]. \qquad (14.29)$$

Рис. 14.6 ілюструє розподіл у півпросторі приведеної густини ρ/ρ_* як функції безрозмірної координати ξx для $k = 1$, $\xi/\zeta = 1{,}2{,}4$ (криві 1-3 на рис.14.6 *а*) та $\xi/\zeta = 4$, $k = 0.5{,}1{,}2$ (криві 1-3 на рис.14.6 *б*), $\rho_a/\rho_* = 0.5$. Бачимо, що вибором параметрів, що характеризують джерела маси, можемо суттєво змінювати розподіл густини у приповерхневій області тіла, а тим самим враховувати у рамках моделі різні профілі геометричної неоднорідності реальної поверхні тіла.



а ***б***

Рис. 14.6

Як згадувалось вище, неоднорідність розподілу густини є причиною ненульового напружено-деформованого стану. Напруження у тілі є пропорційними до збурення густини $\rho - \rho_*$, а тому залежать від значення та розподілу джерел маси $d_{\sigma m}$.

14.4. Шорсткість поверхні та стан гетерогенного пружного шару

Розглянемо рівноважний стан безмежного ізотропного твердого шару, що займає область $|x|\le l$ у прямокутній декартовій системі координат $\{x, y, z\}$. Вважаємо, що поверхні шару ідентичні, вільні від силового навантаження і на них задано постійне значення густини ρ_a. На безмежності при $y \to \pm\infty$ шар перебуває під дією розтягувального навантаження сталої інтенсивності σ_a.

Поведінку шару описує система рівнянь (14.24) і умови

$$\sigma_{xx}\big|_{x=\pm l} = 0, \quad \rho\big|_{x=\pm l} = \rho_a,$$

$$\int_{-l}^{l}\sigma_{yy}dx = 2l\sigma_a, \quad \int_{-l}^{l}x\sigma_{yy}dx = 0, \quad \int_{-l}^{l}\sigma_{zz}dx = 0, \quad \int_{-l}^{l}x\sigma_{zz}dx = 0. \qquad (14.30)$$

Загальний розв'язок задачі має вигляд

$$\rho = \rho_* + (\rho_a - \rho_*)\frac{\operatorname{ch}\xi x}{\operatorname{ch}\xi l} + \xi\frac{\operatorname{ch}\xi x}{\operatorname{ch}\xi l}\int_0^l d_{\sigma m}(t)\operatorname{sh}\xi(l-t)dt + \xi\int_0^x d_{\sigma m}(t)\operatorname{sh}\xi(t-x)dt,$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_a = \sigma_{zz} = -2\mu a_m\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\left(\rho_a - \rho_* + \xi\int_0^l d_{\sigma m}(t)\operatorname{sh}\xi(l-t)dt\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\operatorname{ch}\xi x}{\operatorname{ch}\xi l} - \frac{\operatorname{th}\xi l}{\xi l}\right) - 2\mu a_m\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}\xi\left(\int_0^x d_{\sigma m}(t)\operatorname{sh}\xi(t-x)dt - N\right), \qquad (14.31)$$

де

$$N = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}dx\int_0^x d_{\sigma m}(t)\operatorname{sh}\xi(t-x)dt.$$

Для числового дослідження розв'язку необхідно сконкретизувати джерела маси. У роботах [9, 24] проведено дослідження рівноважного стану шару для джерел маси вигляду

$$d_{\sigma m}(x) = (\rho_a - \rho_*)\frac{\cosh(\zeta x)}{\cosh(\zeta l)}. \qquad (14.32)$$

Природним узагальненням цього подання є

$$d_{\sigma m}(x) = (\rho_a - \rho_*)\frac{\operatorname{ch}\left(|\zeta x|^k\right)}{\operatorname{ch}\left((\zeta l)^k\right)}. \qquad (14.33)$$

Рис. 14.7 ілюструє розподіл у шарі приведеної густини ρ/ρ_* як функції безрозмірної координати x/l для $k=2$, $\xi/\zeta = 4$, $\xi l = 2{,}4{,}8$ (криві 1-3).

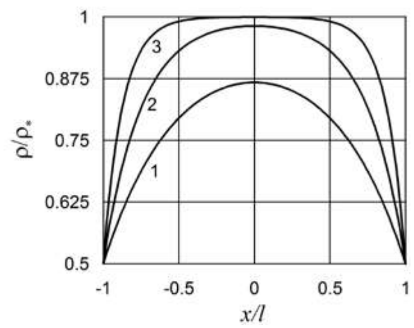


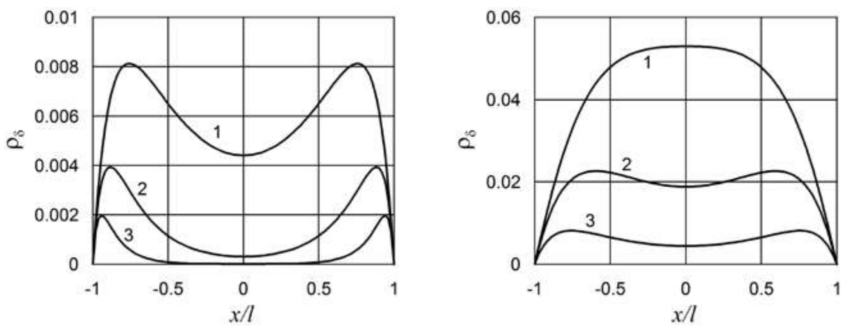
Рис. 14.7

У "товстих" шарах, товщина яких є значно більшою характерного розміру структурної неоднорідності матеріалу ($\xi l >> 1$), для прийнятих значень k і ξ/ζ густина у внутрішній області тіла практично дорівнює густині тіла у відліковому стані ρ_*, а її неоднорідність властива лише вузьким приповерхневим областям. У тонких плівках густина ρ суттєво відрізняється від ρ_* в усій області тіла.

У цьому дослідженні, порівняно із відомими у літературі, джерела маси узагальнено введенням параметра k. Проведемо порівняння розподілу густини при $k=1$ та $k=2$. Рис. 14.8 ілюструє розподіл у шарі приведеної густини

$$\rho_\delta = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)_{k=2} - \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)_{k=1}$$

для різних товщин шару та відношень характерних розмірів поверхневої та структурної неоднорідностей. На рис.14.8 *а* наведено розподіл ρ_δ для $\xi/\zeta = 4$, $\xi l = 2{,}4{,}8$ (криві 1-3), а на рис.14.8 *б* – для $\xi/\zeta = 1{,}2{,}4$ (криві 1-3), $\xi l = 2$. В усіх випадках $\rho_a/\rho_* = 0.5$.



а ***б***

Рис. 14.8

Із збільшенням товщини шару відмінність розподілу, пов'язана із параметром k, зменшується в усій області тіла. У товстих шарах ця відмінність має приповерхневий характер. Для шарів однакової товщини значення параметра ξ/ζ може змінити характер розподілу ρ_δ.

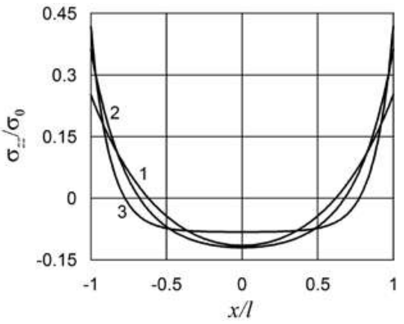


Рис. 14.9

Рис. 14.9 ілюструє залежність приведених напружень σ_{zz}/σ_0 у шарі від безрозмірної координати x/l для джерел виду (14.33) та параметрів $k=2$, $\xi/\zeta=4$, $\xi l=2{,}4{,}8$ (криві 1-3). Тут

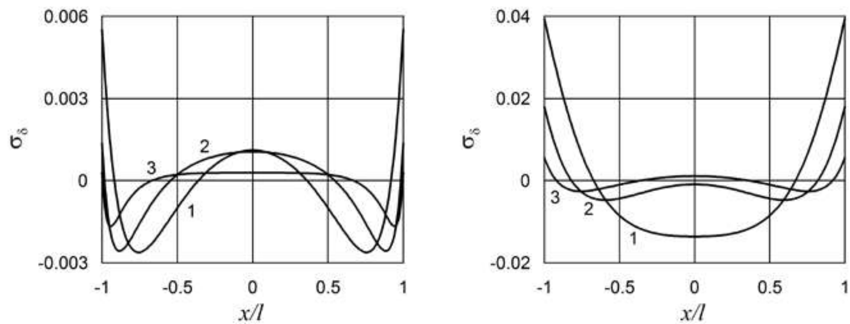
$$\sigma_0 = 2\mu a_m \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu}(\rho_* - \rho_a).$$

Аналіз розв'язку показує, що найбільшими напруженнями у вільному від зовнішнього силового навантаження шарі є напруження σ_{yy}, σ_{zz} на зовнішніх поверхнях шару $x=\pm l$. Ці напруження є розтягувальними. Вони зростають із збільшенням товщини шару та параметрів ξ/ζ і k.

Аналогічно як і у випадку густини вивчимо вплив параметру k на розподіл напружень. Рис. 14.10 ілюструє розподіл у шарі різниці напружень

$$\sigma_\delta = \left(\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_0}\right)_{k=2} - \left(\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_0}\right)_{k=1}$$

для різних товщин шару та відношень ξ/ζ. На рис.14.10 *а* наведено розподіл σ_δ для $\xi/\zeta=4$, $\xi l=2{,}4{,}8$ (криві 1-3), а на рис.14.10 *б* – для $\xi/\zeta=1{,}2{,}4$ (криві 1-3), $\xi l=2$.



а ***б***

Рис. 14.10

Параметр k може якісно змінювати розподіл напружень, хоча порівнюючи значення σ_δ із значеннями σ_{zz}/σ_0 можемо стверджувати, що такий вплив є малим.

Відомо, що стан поверхні реальних тіл суттєво впливає на міцність. На роль поверхні при вивченні межі міцності та її розмірного ефекту вказано у

чисельних експериментальних дослідженнях, у тому числі [27, 28].

Застосуємо методику, що наведена у працях [9, 23], для розрахунку міцності шару. За вихідний критерій вибираємо критерій першої класичної теорії міцності [8]: руйнування матеріалу відбувається, коли найбільше головне напруження σ_1 сягає критичного для цього матеріалу значення σ_p. Приймемо, що тіло зруйнується миттєво, якщо напруження хоча б в одній його точці досягнуть цього значення. При розтягувальному силовому навантаженні ($\sigma_a > 0$) найбільшими будуть напруження σ_{yy} на поверхнях шару $x = \pm l$:

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_a - 2\mu a_m \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\left((\rho_a - \rho_*)\left(1 - \frac{\operatorname{th}\xi l}{\xi l}\right) + \right.$$

$$\left. + \xi \int_0^l d_{\sigma m}(t) \operatorname{sh}\xi(t-l)dt - \xi N \right). \tag{14.34}$$

З умови

$$\sigma_{yy}(\pm l) = \sigma_p$$

отримуємо значення інтенсивності зовнішнього силового навантаження σ_c, що приводить до руйнування шару,

$$\sigma_c = \sigma_p + 2\mu a_m \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}\left((\rho_a - \rho_*)\left(1 - \frac{\operatorname{th}\xi l}{\xi l}\right) + \xi \int_0^l d_{\sigma m}(t) \operatorname{sh}\xi(t-l)dt - \xi N \right). \tag{14.35}$$

При зростанні товщини шару ($l \to +\infty$) значення силового навантаження σ_c прямує до величини σ_+ , що відповідає інтенсивності навантаження для зразків значної товщини і не залежить від характеру приповерхневої неоднорідності, у розглянутому тут випадку – від параметрів, що характеризують джерела маси $d_{\sigma m}$. На основі [9] приймемо

$$\sigma_+ = \sigma_p + 2\mu a_m \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}(\rho_a - \rho_*) . \tag{14.36}$$

Використовуючи позначення (14.36), запишемо співвідношення (14.35) у вигляді

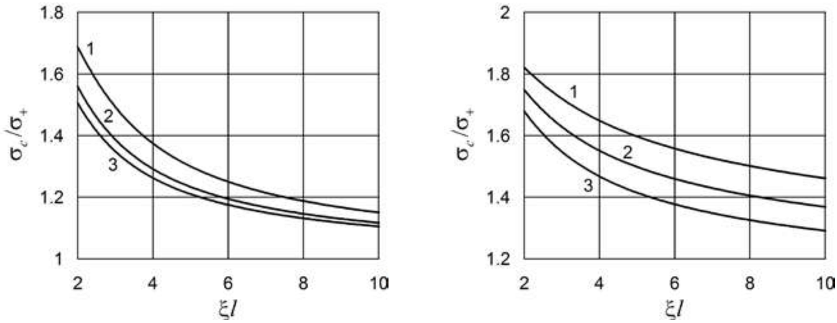
$$\sigma_c = \sigma_+ + \sigma_0 \left(\frac{\operatorname{th}\xi l}{\xi l} + \xi \int_0^l \frac{d_{\sigma m}(t)}{\rho_* - \rho_a} \operatorname{sh}\xi(t-l)dt - \frac{\xi N}{\rho_* - \rho_a} \right).$$

Виконуючи у N зміну порядку інтегрування та спрощуючи отримані вирази, із врахуванням (14.33), останнє співвідношення приводимо до вигляду

$$\sigma_c = \sigma_+ + \sigma_0 \left(\frac{\operatorname{th}\xi l}{\xi l} - \xi \int_0^l \frac{d_{\sigma m}(t)}{\rho_* - \rho_a} \left[\operatorname{ch}\xi(t-l) + \operatorname{th}\xi l \operatorname{sh}\xi(t-l) - 1 \right] dt \right). \tag{14.37}$$

Ця формула описує вплив розмірів шару та шорсткості його поверхні на межу міцності. Як показує її аналіз, із збільшенням товщини шару значення σ_c зменшується, прямуючи до σ_+. Тому тонкі плівки витримують більшу інтенсивність розтягувального силового навантаження, порівняно із товстими шарами. Це узгоджується із відомими у літературі результатами експериментальних досліджень [14, 16].

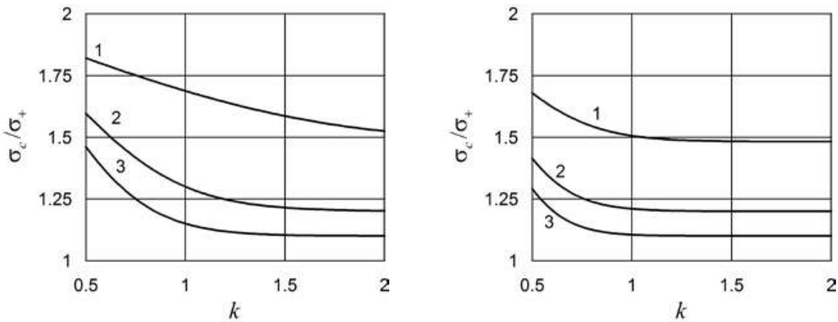
Рис. 14.11 ілюструє залежність σ_c / σ_+ від безрозмірної товщини шару ξl (розмірний ефект міцності шару) для джерел виду (14.33) та параметрів $k = 1$ (рис. *а*) та $k = 0.5$ (рис. *б*), $\xi / \zeta = 1,2,4$ (криві 1-3), $\sigma_0 / \sigma_+ = 1$. Зауважимо, що при $k = 2$ відповідні значення σ_c / σ_+ практично співпадають.



а ***б***

Рис. 14.11

Рис. 14.12 показує залежність σ_c / σ_+ від параметру k для товщин шару $\xi l = 2,5,10$ (криві 1-3) при $\xi / \zeta = 1$ (рис. *а*) та $\xi / \zeta = 4$ (рис. *б*), $\sigma_0 / \sigma_+ = 1$.



а ***б***

Рис. 14.12

Аналіз рисунків показує, що σ_c монотонно зменшується при зростанні товщини шару, а також при зростанні параметрів ξ / ζ та k. Для $\xi >> \zeta$ зміна

k у області $k > 1$ практично не впливає на значення σ_c / σ_+. Значення параметрів ξ/ζ і k, що характеризують шорсткість реальної поверхні, суттєвим чином впливають на інтенсивність силового навантаження, яке приводить до руйнування шару.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Афтаназів І. С., Шевчук Л. І., Строган О. І., Струтинська Л. Р.* Підвищення довговічності гарматних стволів зміцненням ППД їх внутрішніх поверхонь // Mech. Adv. Technol. – 2021. – **5**, No. 3. – P. 314–324.
2. *Божидарник В. В., Сулим Г. Т.* Елементи теорії пружності. – Львів: Світ, 1994. – 559 с.
3. *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. – М.: Наука, 1982. – 584 с.
4. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. – М.: Мир, 1973. – 280 с.
5. ГОСТ 2789-73 Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики.
6. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. – М.: Мир, 1974. – 304 с.
7. *Коваленко А. Д.* Введение в термоупругость. – К.: Наук. думка, 1965. – 204 с.
8. Механика разрушения и прочность материалов: справ. пособие; под ред. *Панасюка В. В.* – В 4-х т.; Т. 1. Основы механики разрушения материалов / *В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, В. С. Партон*. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.
9. *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. – Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.
10. *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Термодинамічні моделі та методи термомеханіки із врахуванням приповерхневої та структурної неоднорідностей. Основи наномеханіки I. – Львів: Сполом, 2012. – 264 с.
11. *Нагірний Т. С.* До питання про вибір функцій впливу в реологічних кінетичних рівняннях механіки суцільного середовища // ДАН України. – 1992. – № 2. – С. 49–53.
12. *Сулима А. М., Евстигнеев М. И.* Качество поверхностного слоя и усталостная прочность деталей из жаропрочных и титановых сплавов. – М.: Машиностроение, 1974. – 256 с.
13. *Afferrante L., Bottiglione F., Putignano C., Persson B., Carbone G.* Elastic contact mechanics of randomly rough surfaces: an assessment of advanced asperity models and Persson's theory // Tribol. Lett. – 2018. – **66**, No. 2. – P. 1–13.
14. *Beams J. W., Breazeale J. B., Bart W. L.* Mechanical strength of thin films of metals // Phys. rev. – 1955. – **100**, No. 6. – P. 1657.
15. *Burak Y., Nahirnyj T., Tchervinka K.* Local Gradient Thermomechanics / In Encyclopedia of thermal stresses., ed. Richard B. Hetnarski. – Springer Publishers, 2014. – P. 2794–2801.
16. *Fredriksson P., Gudmundson P.* Size-dependent yield strength of thin films // Int.

J. Plast. – 2005. – **21**, No. 9. – P. 1834–1854.

17. ISO 468:1982 Surface roughness – Parameters, their values and general rules for specifying requirements.
18. *Kim J. Y., Kang S. K., Lee J. J., Jang J. I., Lee Y. H., Kwon D.* Influence of surface-roughness on indentation size effect // Acta mater. – 2007. – **55**, No. 10. – P. 3555–3562.
19. *Li S., Wang G.* Introduction to micromechanics and nanomechanics. – Singapore: World Scientific Publishing Company, 2008. – 660 p.
20. *Ling F. F., Lai W. M., Lucca D. A.* Fundamentals of surface mechanics: with applications. – NY: Springer, 2002. – 392 p.
21. *Menezes P. L., Kailas S. V.* Effect of surface roughness parameters and surface texture on friction and transfer layer formation in tin-steel tribo-system // Journal of materials processing technology. – 2008. – **208**, No. 1–3. – P. 372–382.
22. *Myers N. O.* Characterization of surface roughness // Wear. – 1962. – **5**, No. 3, – P. 182–189.
23. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Approach and models of locally heterogeneous solid mechanics. – Zielona Góra: Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielionogórskiego, 2021. – 233 p.
24. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical Modeling of Structural and Near-Surface Non-Homogeneities in Thermoelastic Thin Films // Int. J. Eng. Sci. – 2015. – **91**. – P. 49–62.
25. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical modeling of the coupled processes in nanoporous bodies // Acta Mech. Autom. – 2018. – **12**, No 3. – P. 196–203.
26. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Near-Surface Mass Defect in Models of Locally Heterogeneous Solid Mechanics // Acta Mech. Autom. – 2019. – **13**, No. 3. – P. 205–210.
27. *Shahid M., Hashim S. A.* Effect of surface roughness on the strength of cleavage joints // Int. J. Adhes. Adhes. – 2002. – **22**, No. 3. – P. 235–244.
28. *Tsuchiya T., Tabata O., Sakata J., Taga Y.* Specimen size effect on tensile strength of surface-micromachined polycrystalline silicon thin films // J. Micromech. Sys. – 1998. – **7**, No. 1. – P. 106–113.
29. *Venables J.* Introduction to surface and thin film processes. – Cambridge: Cambridge university press, 2000. – 372 p.
30. *Whitehouse D. J.* Handbook of surface and nanometrology. – Bristol: IoP Publishing, 2003. – 1128 p.

РОЗДІЛ 15

МОДЕЛЬ КОМНІНОУ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ, ЩО ВИХОДИТЬ З КУТОВОЇ ТОЧКИ ЛАМАНОЇ МЕЖІ РОЗДІЛУ МАТЕРІАЛІВ

А.О. Камінський, М.В. Дудик, В.М. Феньків

Дослідження кусково-однорідних тіл з тріщиною на плоскій межі розділу двох різних матеріалів, започатковані у 60-х роках минулого століття Вільямсом [43], Інглендом [24], Ердоганом [25], Райсом і Сі [38] та іншими, привели до передбачення фізично неможливого взаємного перетину берегів тріщин внаслідок просторових осциляцій переміщень з'єднаних матеріалів біля вершин. Подальші дослідження показали, що осцилюючі особливості біля вершин повністю розкритої міжфазної тріщини не зникають при урахуванні таких додаткових чинників, як кривина фронту міжфазної тріщини [44], відмінність конфігурацій кусково-однорідних тіл і навантаження від плоских [14], анізотропність з'єднаних матеріалів [37]. Проблема осциляційної поведінки параметрів напружено-деформованого стану в околі вершини міжфазної тріщини є також актуальною в задачах термопружності [6, 32], у дослідженнях п'єзоелектричних біматеріалів з електропроникною або електроізольованою тріщиною [27].

Осцилюючі особливості моделей повністю розкритої міжфазної тріщини зумовили певні труднощі із коректним застосуванням до них критеріїв лінійної механіки руйнування [28]. Вирішення цієї проблеми було запропоновано М. Комніноу [16, 17], яка допустила існування біля вершин міжфазної тріщини області контакту берегів. Дослідження Ю.О. Антіпова та ін. [1, 10], В.І. Острика і А.Ф. Улітка [8], P. Anderson [9], C. Atkinson [12], B. Audoly [13], M. Comninou [16, 17], M. Comninou, J. Dundurs [18], J. Dundurs, A. K. Gautesen [23], D. Leguillon [33] та інших дійсно підтвердили зникнення осциляцій переміщень та збереження степеневого характеру сингулярності напружень внаслідок контакту берегів для міжфазних тріщин у випадку їх розташування на плоскій межі розділу двох різних ізотропних матеріалів. Контактна модель також успішно використовувалась в дослідженнях тріщин на плоскій межі розділу різних анізотропних, п'єзоелектричних, електропровідних і діелектричних матеріалів у різних поєднаннях [26, 27, 29, 30, 40].

Але чи є контактна модель типу М. Комніноу бездоганною? Чи завжди вона забезпечує усунення осциляційної особливості, притаманної розкритій міжфазній тріщині? Для відповіді на дане питання у цьому розділі розглядається випадок міжфазних тріщин, розташованих на ламаній лінії розмежування двох різних матеріалів. Вони часто зустрічаються у будові сучасних промислових виробів, композитів з гранульованими наповнювачами, гірських порід тощо, проте визначенню напружено-деформованого стану в

околі вершин таких тріщин досі не приділялось достатньо уваги. Зокрема, P. S. Theocaris і E. E. Gdoutos [39], використовуючи метод комплексних потенціалів Мусхелішвілі, отримали характеристичні рівняння для показників сингулярності напружень в рамках першої, другої та змішаної основних задач теорії пружності для міжфазної тріщини з вершиною у кутовій точці ламаної межі розділу двох різних однорідних матеріалів, не беручи до уваги можливий контакт берегів. За певних припущень показники сингулярності напружень у вищезгаданих умовах можуть бути визначені за результатами досліджень [15, 19, 34-36] локальних полів напружень в околі спільної вершини багатоклинової гетерогенної системи.

В [4, 21] було виконано аналіз поля напружень біля кутової точки ламаної межі розділу двох різних матеріалів, від якої поширюється розкрита міжфазна тріщина. У згоді з результатами [39] встановлено, що у досить широкому інтервалі кутів зламу показник сингулярності напружень в околі кутової точки є комплексним. Як і у випадку міжфазної тріщини на плоскій межі розділу, це призводить до просторових осциляцій переміщень берегів тріщини з їх взаємним перекриттям.

Як зазначено вище, альтернативою моделі розкритої міжфазної тріщини є модель тріщини типу М. Комніноу з контактуючими берегами. У зв'язку з цим актуальним є дослідження локального поля напружень і переміщень біля кутової точки ламаної межі розділу двох різних матеріалів, де розташована міжфазна тріщина, береги якої взаємодіють за законом сухого тертя. Завдання полягає у знаходженні в умовах плоскої деформації області можливого застосування контактної моделі М. Комніноу міжфазної тріщини, яка дозволяє усунути фізично неможливі просторові осциляції переміщень берегів тріщини біля кутової точки ламаної межі двох різних матеріалів, а також асимптотичних виразів для компонент тензора напружень біля вершини тріщини, необхідних при подальшому використанні для визначення граничних станів кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною, дослідження параметрів зон передруйнування в околі вершин тощо.

15.1. Розподіл напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактом берегів, яка виходить з кутової точки ламаної межі розділу

В умовах плоскої деформації в рамках статичної задачі теорії пружності для кусково-однорідного ізотропного тіла дослідимо поведінку напружень біля вершини міжфазної тріщини, яка збігається з кутовою точкою ламаної межі розділу двох різних пружних однорідних ізотропних матеріалів. Матеріали характеризуються модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 відповідно. Припускаємо, що частина берегів тріщини довжиною s перебуває у контакті з тертям за законом Кулона. Коефіцієнт тертя берегів тріщини та кут зламу межі розділу дорівнюють відповідно μ і α. Локальна структура привершинної області зображена на рис. 15.1.

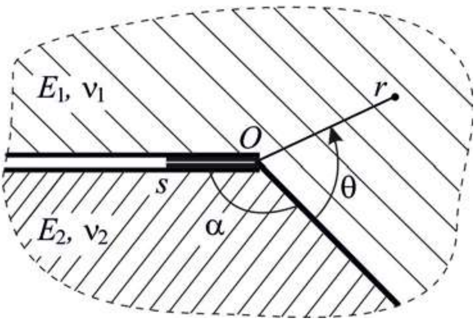


Рис. 15.1

Згідно із загальними положеннями про поведінку напружень поблизу кутових точок пружних тіл (на відстанях $r \ll s$), зводимо вихідну задачу до однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини з межею розділу матеріалів у формі прямолінійних сторін кута, на одній з яких розташована півнескінченна тріщина з контактуючими берегами, вершина якої збігається з вершиною кута зламу. Виберемо полярну систему координат (r,θ) з початком O у вершині кута зламу межі розділу матеріалів і полярною віссю вздовж лінії з'єднання матеріалів. Врахувавши контакт берегів тріщини і умову неперервності напружень і переміщень на лінії з'єднання матеріалів, приходимо до крайової задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\sigma_\theta^1(r,0)=\sigma_\theta^2(r,0),\quad \tau_{r\theta}^1(r,0)=\tau_{r\theta}^2(r,0),$$
$$u_\theta^1(r,0)=u_\theta^2(r,0),\quad u_r^1(r,0)=u_r^2(r,0),$$
$$\sigma_\theta^1(r,\beta)=\sigma_\theta^2(r,-\alpha),$$
$$\tau_{r\theta}^1(r,\beta)=\tau_{r\theta}^2(r,-\alpha)=-\mu\sigma_\theta^1(r,\beta),$$
$$u_\theta^1(r,\beta)=u_\theta^2(r,-\alpha)\quad(\beta=2\pi-\alpha), \tag{15.1}$$

де верхні індекси відповідають номеру матеріалу, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ – окружні нормальні та дотичні компоненти тензора напружень, u_r, u_θ – компоненти вектора переміщень.

Оскільки досліджуване тіло є з'єднанням двох пружних клинів, скористаємося методом Віґардта – Вільямса [41, 42] розкладання розв’язків рівнянь теорії пружності за власними функціями та подамо напруження і похідні від переміщень у кожному з матеріалів у вигляді:

$$\sigma_\theta^n(r,\theta)=r^\lambda[a_1^n\sin(\lambda+2)\theta+a_2^n\sin\lambda\theta+a_3^n\cos(\lambda+2)\theta+a_4^n\cos\lambda\theta],$$

$$\tau_{r\theta}^n(r,\theta)=-\frac{r^\lambda}{(\lambda+2)}[a_1^n(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta+$$

$$+a_2^n\lambda\cos\lambda\theta - a_3^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta - a_4^n\lambda\sin\lambda\theta],$$

$$\sigma_r^n(r,\theta) = -\frac{r^\lambda}{\lambda+2}[a_1^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta +$$

$$+a_2^n(\lambda-2)\sin\lambda\theta + a_3^n(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + a_4^n(\lambda-2)\cos\lambda\theta],$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta^n(r,\theta)}{\partial r^2} = -\frac{1+\nu_n}{E_n}\frac{\lambda r^{\lambda-1}}{\lambda+2}[a_1^n(\lambda+2)\times\cos(\lambda+2)\theta + a_2^n(\lambda+4-4\nu_n)\cos\lambda\theta -$$

$$-a_3^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta - a_4^n(\lambda+4-4\nu_n)\sin\lambda\theta],$$

$$\frac{\partial u_r^n(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{1+\nu_n}{E_n}\frac{r^\lambda}{\lambda+2}[a_1^n(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta +$$

$$+a_2^n(\lambda-2+4\nu_n)\sin\lambda\theta + a_3^n(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + a_4^n(\lambda-2+4\nu_n)\cos\lambda\theta], \quad (15.2)$$

де n=1 для $0\le\theta\le\beta$ і n=2 для $-\alpha\le\theta\le 0$. Задовольняючи граничні умови (15.1) за допомогою формул (15.2), приходимо до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_j^n (j=1÷4), нетривіальний розв’язок якої вимагає рівності нулю її детермінанта. Ця умова приводить до характеристичного рівняння задачі для визначення показника λ у функціональній залежності напружень від відстані r до вершини тріщини, яке після розрахунку детермінанта і його алгебраїчних перетворень набуває вигляду:

$$D(\lambda) \equiv D_1(\lambda) + \mu D_2(\lambda) = 0, \quad (15.3)$$

$$D_1(\lambda) = (1-e)[0,5(1+\kappa_1)D_{11}t_1 - 0,5e(1+\kappa_2)D_{12}t_3 + e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)d_3] +$$
$$+e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)D_{13},$$

$$D_2(\lambda) = (1-e)\{(1+\kappa_1)D_{21}t_1 - e(1+\kappa_2)[D_{22}t_3 - (1+\kappa_1)d_4] + 2(1-e)^2 t_1 t_3\} +$$
$$+e(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)D_{23},$$

$$D_{11}(\lambda) = (1-e)d_5 + (1+\kappa_1)\sin 2(\lambda+1)(2\pi-\alpha),$$

$$D_{12}(\lambda) = e(1+\kappa_2)\sin 2(\lambda+1)\alpha + (1-e)d_2,$$

$$D_{13}(\lambda) = \sin^2\lambda\pi[(1+\kappa_1)d_7 - e(1+\kappa_2)d_9];$$

$$D_{21}(\lambda) = (1-e)d_6 - (1+\kappa_1)t_2,$$

$$D_{22}(\lambda) = e(1+\kappa_2)t_4 + (1-e)d_1,$$

$$D_{23}(\lambda) = \sin^2\lambda\pi[(1+\kappa_1) - e(1+\kappa_2)]d_8;$$

$$d_1 = (\lambda+1)\sin^2\alpha + 3t_4, \quad d_2 = (\lambda+1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda+1)\alpha,$$

$$d_3 = \left[(\lambda+1)^2\sin^2\alpha + \sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta\right]\sin 2(\lambda+1)(\alpha-\pi) -$$
$$-2(\lambda+1)\sin^2\lambda\pi\sin 2\alpha\cos^2(\lambda+1)(\pi-\alpha),$$

$$d_4 = 2\left[(\lambda+1)^2 \sin^2\alpha + \sin(\lambda+1)\alpha \sin(\lambda+1)\beta\right]\sin^2(\lambda+1)(\pi-\alpha) -$$

$$-4\sin^2\lambda\pi\left[(\lambda+1)\sin^2\alpha\cos^2(\lambda+1)(\pi-\alpha) + \sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta\right],$$

$$d_5 = (\lambda+1)\sin 2\alpha - \sin 2(\lambda+1)\beta, \quad d_6 = (\lambda+1)\sin^2\alpha + 3t_2,$$

$$d_7 = (\lambda+1)\sin\alpha\cos\alpha - \sin(\lambda+1)\alpha\cos(\lambda+1)\beta,$$

$$d_8 = (\lambda+1)\sin^2\alpha + \sin(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta,$$

$$d_9 = (\lambda+1)\sin\alpha\cos\alpha + \cos(\lambda+1)\alpha\sin(\lambda+1)\beta.$$

$$t_1 = (\lambda+1)^2\sin^2\alpha - \sin^2(\lambda+1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda+1)\beta,$$

$$t_3 = (\lambda+1)^2\sin^2\alpha - \sin^2(\lambda+1)\beta, \quad t_4 = \sin^2(\lambda+1)\alpha,$$

$$e = \frac{E_1}{E_2}\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

У випадку $\alpha=\pi$ рівняння (15.3) з точністю до несуттєвих множників зводиться до відомого результату М. Комніноу [16]

$$\cos\lambda\pi + \mu\beta_D\sin\lambda\pi = 0$$

($\beta_D = \dfrac{(1+e\kappa_2)-(e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2)+(e+\kappa_1)}$ – так званий другий параметр Дандерса), якому відповідає показник сингулярності напружень $\lambda = -\pi^{-1}\mathrm{arcctg}\left|\mu\beta_D\right|$.

Для кожного із знайдених коренів λ_i рівняння (15.3) вважатимемо один з коефіцієнтів a_j^n відомим і рівним заданій сталій, а саме: $a_4^2(\lambda_i) \equiv C_i$. Це дозволяє визначити решту коефіцієнтів, виразивши їх через C_i, та отримати шукані формули для локального поля напружень і переміщень біля вершини тріщини, які подамо у вигляді суперпозиції частинних розв'язків задачі з $\lambda_i > -1$:

$$\sigma_\theta(r,\theta) = \sum_i C_i F_1(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i}, \quad \tau_{r\theta}(r,\theta) = \sum_i C_i F_2(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i},$$

$$\sigma_r(r,\theta) = \sum_i C_i F_3(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i},$$

$$\frac{\partial^2 u_\theta(r,\theta)}{\partial r^2} = \sum_i C_i F_4(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i - 1}, \quad \frac{\partial u_r(r,\theta)}{\partial r} = \sum_i C_i F_5(\lambda_i,\theta) r^{\lambda_i}$$

$$F_m(\lambda,\theta) = \begin{cases} F_m^1(\lambda,\theta), & 0 \le \theta \le 2\pi-\alpha, \\ F_m^2(\lambda,\theta), & -\alpha \le \theta \le 0; \end{cases} \quad (m = 1 \div 5)$$

$$F_1^n(\lambda,\theta) = \tilde{a}_1^n(\lambda)\sin(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)\sin\lambda\theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)\cos(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda)\cos\lambda\theta,$$

$$F_2^n(\lambda,\theta) = -\tilde{a}_1^n(\lambda)\cos(\lambda+2)\theta - \tilde{a}_2^n(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda+2}\cos\lambda\theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)\sin(\lambda+2)\theta +$$
$$+\tilde{a}_4^n(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda+2}\sin\lambda\theta,$$
$$F_3^n(\lambda,\theta) = -[\tilde{a}_1^n(\lambda)\sin(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)\frac{\lambda-2}{\lambda+2}\sin\lambda\theta + \tilde{a}_3^n(\lambda)\cos(\lambda+2)\theta +$$
$$+\tilde{a}_4^n(\lambda)\frac{\lambda-2}{\lambda+2}\cos\lambda\theta],$$
$$F_4^n(\lambda,\theta) = -\frac{1+\nu_n}{E_n}\frac{\lambda}{\lambda+2}[\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda+4-4\nu_n)\cos\lambda\theta -$$
$$-\tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta - \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda+4-4\nu_n)\sin\lambda\theta],$$
$$F_5^n(r,\theta) = -\frac{1+\nu_n}{E_n(\lambda+2)}[\tilde{a}_1^n(\lambda)(\lambda+2)\sin(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_2^n(\lambda)(\lambda-2+4\nu_n)\sin\lambda\theta +$$
$$+\tilde{a}_3^n(\lambda)(\lambda+2)\cos(\lambda+2)\theta + \tilde{a}_4^n(\lambda)(\lambda-2+4\nu_n)\cos\lambda\theta]. \quad (15.4)$$

Функції $\tilde{a}_j^n(\lambda)$ подано у Додатку. Отже, формули (15.4) з точністю до сталих C_i, які залежать від конфігурації кусково-однорідного тіла і прикладених навантажень, повністю визначають поле напружень і переміщень в околі кутової точки ламаної межі розділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина. У множниках C_i закладена можливість урахування зовнішнього навантаження і будови конкретного кусково-однорідного тіла. На множник C_1 накладається умова $C_1F_1(\lambda_1,-\alpha)<0$, що відповідає дії стискального нормального напруження на береги тріщини і забезпечує їх контакт.

Отриманий розв'язок дозволяє оцінити довжину області контакту берегів за відстанню від вершини до точки, в якій нормальне напруження на берегах тріщини перетворюється в нуль. Обмежуючись у розвиненні $\sigma_\theta(r,2\pi-\alpha)$ двома першими доданками, знаходимо

$$s \approx \left(-\frac{C_1F_1(\lambda_1,2\pi-\alpha)}{C_2F_1(\lambda_2,2\pi-\alpha)}\right)^{1/(\lambda_2-\lambda_1)}. \quad (15.5)$$

Оскільки знайдений вище розв'язок описує локальне поле напружень, використання отриманої оцінки довжини контактної зони обмежено вимогою, що розміри зони повинні бути значно меншими порівняно з довжиною тріщини або будь-якими іншими актуальними довжинами (відстанями від вершини тріщини до найближчої межі конкретного тіла, до найближчої точки прикладання зовнішніх сил тощо).

15.2 Наслідки контактної моделі міжфазної тріщини та межі її застосовності

З (15.2) випливає, що поведінка напружень біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами носитиме сингулярний характер, якщо рівняння (15.3) матиме корені у смузі $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ (корені з дійсною частиною $\mathrm{Re}\,\lambda \le -1$ є неприйнятними, оскільки зумовлюють нескінчені переміщення при $r \to 0$). Якщо найменший з цих коренів, λ_1, є дійсним, особливість напружень буде степеневою. У випадку ж комплексного λ_1 на степеневу сингулярність з показником $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$ накладатимуться осциляції за радіальною координатою, що призводить до залежності напружень від відстані за законом $\sigma_{ik} \sim r^{\mathrm{Re}\,\lambda_1} \cos(\mathrm{Im}\,\lambda_1 \cdot \ln r + \varphi)$ (φ – деяка стала); аналогічний осцилюючий множник з'являється у виразі для переміщень, зумовлюючи фізично неприпустимий взаємний перетин берегів тріщини.

Нижче подано результати числових розрахунків характеристик напруженого стану біля вершини тріщини та їх аналіз для з'єднання матеріалів з модулями Юнга, які задовольняють умову $E_1<E_2$. Отримані висновки переносяться на випадок $E_1>E_2$ шляхом одночасних замін $E_1 \leftrightarrow E_2$, $\nu_1 \leftrightarrow \nu_2$, $\mu \to -\mu$, $\alpha \to 2\pi - \alpha$.

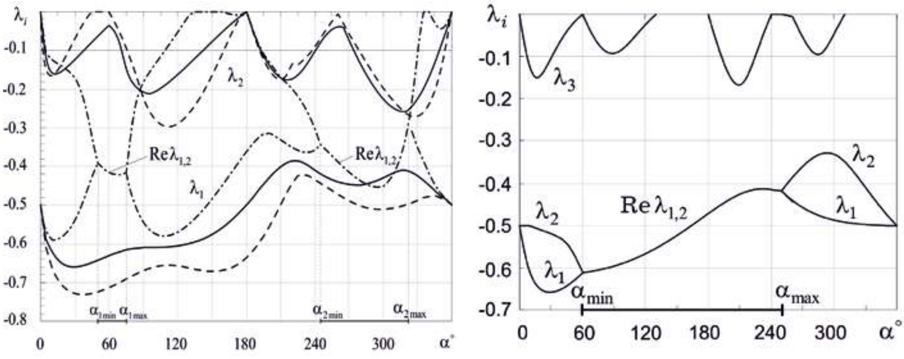
Чисельний аналіз рівняння (15.3) виявив, що коренів у смузі $-1 < \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ може бути 1 або 2. На рис. 15.2 *а* показані залежності показників сингулярності λ_1, λ_2 у разі E_1/E_2=0,1, ν_1=ν_2=0,3 для μ=0 (суцільна лінія), μ=2 (штрихована лінія) і $\mu = -2$ (штрих-пунктирна лінія). Знак μ визначається напрямком відносних зсувних переміщень берегів тріщин, від якого залежить не лише показник сингулярності напружень, але й розмір області контакту. Останній висновок випливає з результатів досліджень контактної моделі міжфазної тріщини на плоскій межі розділу [8, 23], які для внутрішньої тріщини за дії зсувних навантажень прогнозують біля різних вершин тріщини співрозмірну та дуже малу порівняно з тріщиною контактні зони. В подальшому акцент робитимемо переважно на конфігурації тіла з параметрами $E_1<E_2$ і μ<0 (рис. 15.1), за яких очікуються значні розміри області контакту.

На рис. 15.2 для частинного випадку пружних характеристик з’єднаних матеріалів E_1/E_2=0,1, ν_1=ν_2=0,3 подано залежність від кута зламу межі розділу показника сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини за наявності (*а*) та відсутності (*б*) контакту берегів. Розрахунки показника сингулярності для випадку *б*) виконано за результатами робіт [21, 39].

Як показано в [21, 39], показники сингулярності напружень біля вершин повністю розкритої міжфазної тріщини на певних інтервалах кутів зламу межі розділу (α_{min}, α_{max}) (ділянка на рис. 15.2 *б* позначена $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}$) мають комплексні значення, яким відповідають фізично некоректні осциляції переміщень берегів тріщини [21, 39]. Внаслідок контакту берегів у випадку μ≥0 (рис. 15.2 *а*,

суцільна та штрихована лінії) показник сингулярності λ_1 виявляється дійсним для всіх кутів зламу, тому напруження біля вершини тріщини мають виключно степеневу особливість, а осциляції переміщень і напружень відсутні. Отже, використання контактної моделі типу М. Комніноу у випадку $\mu \geq 0$, $E_1/E_2<1$ дозволяє уникнути труднощів класичної моделі повністю розкритої міжфазної тріщини.

Проте, для $\mu<0$ існують інтервали кутів зламу (α_{1min}, α_{1max}), (α_{2min}, α_{2max}), на яких показники сингулярності можуть набувати комплексно спряжених значень λ_1, $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, які зумовлюють фізично некоректні осциляції переміщень (штрих-пунктирна лінія, ділянка $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2}$ на графіку для $\mu = -2$ (рис. 15.2 *а*)). Отже, для кутів зламу межі розділу, що попадають у ці інтервали, контактна модель міжфазної тріщини типу М. Комніноу стає неефективною.



а) *б)*

Рис. 15.2

Як видно з порівняння рис. 15.2 *а* і рис. 15.2 *б*, показники сингулярності λ_1 біля вершин тріщини з контактуючими берегами та розкритої тріщини для більшості значень кутів зламу виявляються близькими між собою та до значення –0,5, яке відповідає тріщині в однорідному матеріалі. Водночас показники λ_2 досить суттєво відрізняються, тому відповідно до їх значень передбачається значно менший вплив λ_2 на напружений стан біля вершин у випадку закритої тріщини, ніж розкритої.

У таблиці подано інтервали (α_{1min}; α_{1max}), (α_{2min}; α_{2max}) кутів зламу межі розділу (в градусах), яким відповідають комплексні показники сингулярності біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами ($\nu_1=\nu_2=0{,}3$). Ширина інтервалів залежить від відношення модулів Юнга з'єднаних матеріалів і коефіцієнта тертя та прямує до нуля за зближення пружних характеристик матеріалів і зменшення (за модулем) коефіцієнта тертя. Для моделі повністю розкритої тріщини аналогічний інтервал кутів зламу подано в таблиці значеннями α_{min}, α_{max}. В моделі міжфазної тріщини з контактуючими берегами інтервали кутів зламу (α_{1min}; α_{1max}), (α_{2min}; α_{2max}) для значень

коефіцієнтів тертя, для яких такі інтервали існують, є значно вужчими порівняно з інтервалом (α_{min}; α_{max}).

Таблиця

E_1/E_2	0,1		0,3		0,5		0,7		0,9	
μ	–1	–2	–1	–2	–2	–3	–3	–4	–12	–13
(α_{1min};α_{1max})	–	(46; 77)	–	(57; 84)	–	(55; 91)	–	(73;76)	–	(64;84)
(α_{2min};α_{2max})	(264; 317)	(242; 322)	(274; 305)	(252; 312)	(267; 305)	(267; 305)	–	(268; 304)	(277; 296)	(272; 300)
(α_{min};α_{max})	(61; 252)		(75; 258)		(82; 262)		(86; 266)		(89; 268)	

Для кожної пари параметрів біматеріального з'єднання (E_1/E_2, α) існує граничний коефіцієнт тертя μ_c такий, що при $\mu<\mu_c$ ($|\mu|>|\mu_c|$) показники сингулярності будуть комплексними. На рис. 15.3 показана залежність граничного коефіцієнта тертя μ_c від кута зламу межі розділу для $\nu_1=\nu_2=0{,}3$ і відношень модулів Юнга з’єднаних матеріалів $E_1/E_2=0{,}1$ (штрихована лінія), $E_1/E_2=0{,}5$ (суцільна лінія), $E_1/E_2=0{,}9$ (штрих-пунктирна лінія). Бачимо, що $|\mu_c|$ зростає зі зближенням пружних характеристик з’єднаних матеріалів.

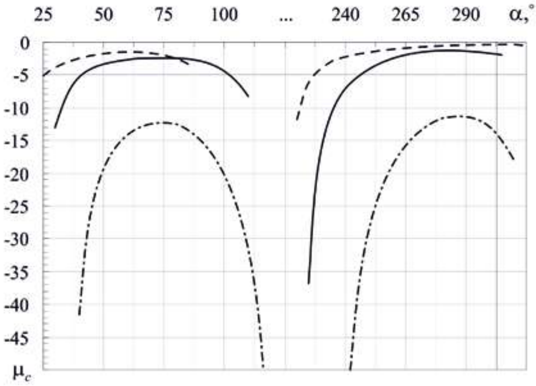
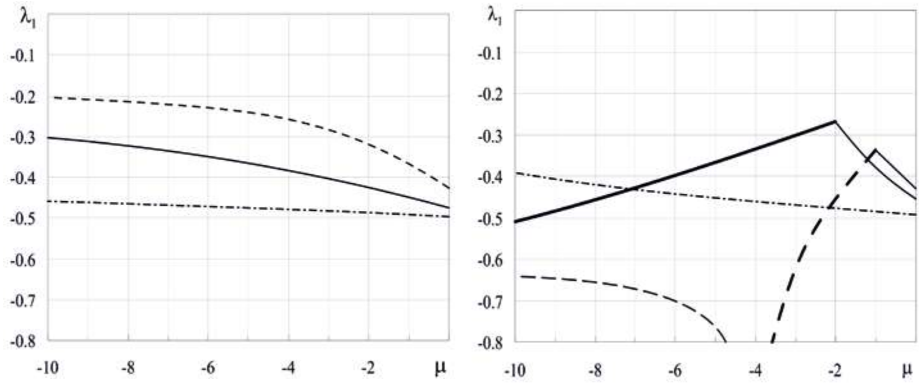


Рис. 15.3

Графіки залежності показника сингулярності напружень біля вершини міжфазної тріщини від коефіцієнта тертя, подані на рис. 15.4 для кутів зламу межі розділу α=200° (*а*) і α=300° (*б*) ($\nu_1=\nu_2=0{,}3$; $E_1/E_2=0{,}1$ – штрихована лінія, $E_1/E_2=0{,}5$ – суцільна лінія, $E_1/E_2=0{,}9$ – штрих-пунктирна лінія), демонструють послаблення концентрації напружень при збільшенні коефіцієнта тертя (за модулем). Ця закономірність порушується у випадку комплексних показників сингулярності (рис. 15.4 *б*, ділянки графіків, виділені жирним), але ці випадки вимагають перегляду в рамках інших моделей міжфазної тріщини.



а) *б*)

Рис. 15.4.

Наведений вище розв’язок задачі про міжфазну тріщину із взаємодіючими за законом сухого тертя берегами, вершина якої збігається з кутовою точкою ламаної межі розділу матеріалів, та аналіз виконаних за його результатами числових розрахунків дозволяє зробити такі висновки. Врахування контакту берегів дозволяє усунути можливі просторові осциляції переміщень берегів, які передбачає модель розкритої міжфазної тріщини. Проте, в рамках розглянутого варіанту моделі М. Комніноу тріщини з контактуючими берегами виявлено можливість існування невеликих інтервалів кутів злому межі розділу, для яких, залежно від напрямку зсувних переміщень берегів тріщини, все ж отримуємо комплексні показники сингулярності, що зумовлюють осциляції переміщень берегів.

Отже, модель міжфазної тріщини з контактом берегів не дає остаточного вирішення проблеми осцилюючої сингулярності. Розв’язання цієї проблеми вбачається нами в урахуванні утворення зони передруйнування в околі вершини тріщини, що становить суть комплексної моделі міжфазної тріщини [22, 31]. Заслуговують на увагу й інші чинники, урахування яких здатне усунути фізично некоректні осциляції переміщень берегів тріщини, зокрема, зчеплення берегів тріщини без проковзування [20], неідеальність з'єднання матеріалів [11] тощо.

Знайдені у підрозділі 15.1 вирази для полів напружень і переміщень в околі вершини міжфазної тріщини можуть бути використані в механіці руйнування для дослідження параметрів маломасштабних зон передруйнування і граничних навантажень у кусково-однорідних тілах з ламаною межею розділу матеріалів. З цією метою може бути використана модель Леонова – Панасюка, успішна реалізація якої для випадку розкритої тріщини на ламаній межі розділу здійснена у [21].

15.3. Параметри маломасштабної області контакту берегів біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу

Оцінка розмірів маломасштабної контактної зони (15.5), отримана у підрозділі 15.1 за результатами дослідження напружено-деформованого стану біля вершини міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу двох різних матеріалів, є наближеною і потребує уточнення. Це уточнення можна виконати за прикладом праці [5], в якій за допомогою методу Вінера – Гопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про контактну зону малих розмірів для міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі розділу, за наявності тертя берегів та урахування навантаження через коефіцієнт інтенсивності напружень біля вершини. У зв’язку з цим в умовах плоскої деформації розглянемо задачу про розрахунок розмірів маломасштабної контактної зони біля вершини міжфазної тріщини, яка збігається з кутовою точкою ламаної межі розділу двох різних пружних матеріалів з модулями Юнга E_1, E_2, коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 і кутом зламу межі розділу α. Контактну зону моделюємо розрізом, береги якого взаємодіють за законом сухого тертя Кулона з коефіцієнтом тертя μ. На розрізі передбачається стискальне нормальне напруження і допускається стрибок лише дотичної складової переміщення.

Вважаючи довжину контактної зони s значно меншою порівняно з довжиною тріщини L та іншими суттєвими розмірами тіла, будемо розглядати тіло як кусково-однорідну площину з півнескінченним розрізом на одній зі сторін зламу межі розділу, частина берегів якого, прилегла до вершини, перебуває у контакті (Рис. 15.1). Малість контактної зони дозволяє сформулювати умову на нескінченості у вигляді вимоги можливості зшивання розшукуваного розв'язку з асимптотичним розв’язком біля вершини тріщини аналогічної задачі про міжфазну тріщину без контакту берегів [3, 4]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\theta = 0: \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \tag{15.6}$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha): \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta; \tag{15.7}$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha): \quad \begin{cases} r \le s, \ \langle u_\theta \rangle = 0, \\ r \ge s, \ \ \sigma_\theta = 0; \end{cases} \tag{15.8}$$

$$\theta = (2\pi - \alpha) \bigcup (-\alpha), \ r \to \infty: \ \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = -\frac{4(1-\nu_1{}^2)}{E_1} \times$$

$$\times \sum_i (2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') r^{\lambda_i'} + o(1/r), \tag{15.9}$$

де K_i – коефіцієнти інтенсивності напружень біля вершини тріщини за відсутності контакту берегів, λ_i' – відповідні показники сингулярності

напружень, які є коренями характеристичного рівняння $(-1<\mathrm{Re}\,\lambda_i'<0)$ [3, 4]:

$$D_0(-\lambda-1)=0, \tag{15.10}$$

$$D_0(p)=(1+\kappa_1)^2\Delta_1+e^2(1+\kappa_2)^2\Delta_2-4(1-e)^2\Delta_1\Delta_2-2(1+\kappa_1)e(1+\kappa_2)\Delta_3+$$
$$-4(1-e)(1+\kappa_1)\Delta_1\sin^2 p(2\pi-\alpha)+4(1-e)e(1+\kappa_2)\Delta_2\sin^2 p\alpha\ ,$$
$$\Delta_1=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p\alpha\ ,\ \Delta_2=p^2\sin^2\alpha-\sin^2 p(2\pi-\alpha)\,,$$
$$\Delta_3=p^2\sin^2\alpha+\sin p\alpha\sin p(2\pi-\alpha)\cos 2p\pi\ .$$

Функція $F(\lambda)$, визначена за результатами робіт [3, 4], має вигляд:

$$F(\lambda)=\frac{e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)F_1(\lambda)+eF_2(\lambda)}{(1+\kappa_1)(\lambda+2)\Delta_0(\lambda)},$$
$$F_1(\lambda)=(1+\kappa_1)\psi_1+2(1-e)(\psi_2-\psi_1)+e(1+\kappa_2)(\psi_4-\psi_1),$$
$$F_2(\lambda)=2e(1+\kappa_2)t_3[(e-1)\psi_6-e(1+\kappa_2)]+4e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)\psi_1+$$
$$+4(1-e)^2t_3\psi_5-(1+\kappa_1)[(1+\kappa_1)-4(1-e)t_2]\psi_5\ ,$$
$$\psi_1=\lambda\sin\alpha\sin(2\lambda\pi+\alpha)+\cos 2\lambda\pi-\cos(\lambda+2)\alpha\cos\lambda(2\pi-\alpha),$$
$$\psi_2=(\lambda^2+3\lambda+2)\sin^2\alpha\cos 2(\lambda+1)(\pi-\alpha),$$
$$\psi_3=(\lambda+1)^2\sin^2\alpha+\sin(\lambda+1)\alpha\cos 2\lambda\pi\sin(\lambda+1)(2\pi-\alpha),$$
$$\psi_4=\lambda\sin^2\alpha+\cos^2 2\lambda\pi-\cos(\lambda+2)\alpha\cos\lambda\alpha,$$
$$\psi_5=2\lambda(\lambda+2)\sin^2\alpha-2\sin\lambda\alpha\sin(\lambda+2)\alpha+$$
$$+(1+\kappa_2)[\lambda\sin^2\alpha+1-\cos\lambda\alpha\cos(\lambda+2)\alpha],$$
$$\psi_6=(1+\kappa_2)\cos 2(\lambda+1)\alpha+4\sin^2(\lambda+1)\alpha,$$
$$\Delta_0=2(e-1)t_3[2(e-1)t_5+e(1+\kappa_2)\sin(\lambda+2)\alpha]-$$
$$-(1+\kappa_1)t_5[4(e-1)t_2+(1+\kappa_1)]+e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)t_6,$$
$$t_5=\lambda\cos(\lambda+1)\alpha\sin\alpha-\sin\lambda\alpha\ ,$$
$$t_6=\lambda\sin\alpha\cos(\lambda+1)\alpha+\cos 2\lambda\pi\sin\lambda(2\pi-\alpha)\,;$$

решта позначень введено у підрозділі 15.1.

Коефіцієнти інтенсивності напружень K_i в (15.9) через відсутність симетрії у будові кусково-однорідного тіла не пов'язані безпосередньо з суто відривними чи зсувними модами навантаження. Надалі вважаємо K_i заданими за умовою задачі і такими, що забезпечують стискальні напруження на берегах тріщини в області контакту $(\sigma_\theta\left(r,2\pi-\alpha\right)=\sigma_\theta\left(r,-\alpha\right)<0$ при $r<s)$.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (15.6)-(15.9) шукаємо у вигляді суми розв'язків наступних двох задач. Перша задача відрізняється від початкової тим, що замість першої з умов (15.8) використовуємо умову

$$\theta = (2\pi - \alpha) \cup (-\alpha),\ r < s:\ \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle = \frac{4(1-\nu_1{}^2)}{E_1} \sum_i (2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') r^{\lambda_i'}, \qquad (15.11)$$

а на нескінченності $\left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \sim o(1/r)$. Друга задача – аналогічна задача без контактної зони, розв'язок якої відомий [3, 4], тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

Застосувавши до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і крайових умов (15.6)-(15.7) інтегральне перетворення Мелліна виду $f^*(p,\theta) = \int_0^\infty f(r,\theta) r^p dr$ (p – комплексний параметр перетворення), та використавши другу умову в (15.8) і умову (15.11), зводимо першу задачу до функціонального рівняння для трансформант напружень і градієнтів переміщень у смузі $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$ (ε_1, ε_2 – достатньо малі позитивні числа), що містить уявну вісь:

$$\Phi^+(p) - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} = -G_0(p) \frac{B \sin p\pi}{\sin(p-\lambda)\pi} \Phi^-(p), \qquad (15.12)$$

$$\Phi^+(p) = \frac{E_1}{2(1-\nu_1^2)} \int_1^\infty \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Bigg|_{\substack{r=\rho s \\ \theta = 2\pi-\alpha \cup -\alpha}} \rho^p d\rho,\ \Phi^-(p) = \int_0^1 \sigma_\theta(\rho s, 2\pi-\alpha) \rho^p d\rho;$$

$$G_0(p) = \frac{2D(-1-p)}{D_0(p)} \frac{\sin(p-\lambda)\pi}{B(1+\kappa_1)\sin p\pi}, \quad B = \frac{1+\kappa_1+e\left(1+\kappa_2\right)}{2\left(1+\kappa_1\right)}$$

(λ і $D(x)$ визначені у підрозділі 15.1). Розв'язок рівняння (15.12) шукаємо за допомогою методу Вінера – Гопфа [7].

Функція $G_0(it)$ має парну додатну дійсну і непарну уявну частини, які при $t \to \pm\infty$ прямують до 1 і 0 відповідно, тому індекс функції $G_0(p)$ по уявній вісі дорівнює 0 і справедлива факторизація за формулою [2]:

$$G_0(p) = \frac{G_0^+(p)}{G_0^-(p)}\ \left(\operatorname{Re} p = 0\right),\ \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz\right] = \begin{cases} G_0^+(p), & \operatorname{Re} p < 0, \\ G_0^-(p), & \operatorname{Re} p > 0. \end{cases} \qquad (15.13)$$

Відношення тригонометричних функцій у правій частині рівняння (15.12) виразимо за допомогою гамма-функцій Ейлера [7]:

$$\frac{\sin p\pi}{\sin(p-\lambda)\pi} = \frac{p}{\left(p-\lambda\right) Q^+(p) Q^-(p)}, \quad Q^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(1 \mp p \pm \lambda)}. \qquad (15.14)$$

Використовуючи (15.13) і (15.14), перепишемо (15.12) у вигляді:

$$\frac{\Phi^+(p) Q^+(p)}{p G_0^+(p)} - \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i) s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} \left[\frac{Q^+(p)}{p G_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{\left(1+\lambda_i'\right) G_0^+(-1-\lambda_i')} \right] =$$

$$= -\sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} \frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{\left(1+\lambda_i'\right) G_0^+(-1-\lambda_i')} -$$

$$-\frac{B\Phi^-(p)}{\left(p-\lambda\right) G_0^-(p) Q^-(p)} \quad (\operatorname{Re} p = 0). \qquad (15.15)$$

Ліва частина рівняння (15.15) є аналітичною функцією у півплощині $\operatorname{Re} p < 0$, а права – у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$. Тому, згідно з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, яка є аналітичною у всій комплексній площині змінної p і дорівнює лівій і правій частинам цього рівняння у відповідних півплощинах. Для її знаходження дослідимо асимптотичну поведінку функцій, що входять в рівняння (15.15) на нескінченості.

За допомогою формули Стірлінга отримаємо $Q^\pm(p) \sim e^{\pm\lambda}\left(\mp p\right)^{\mp\lambda}$, а з (15.13) випливає, що $\lim_{p\to\infty} G_0^\pm(p) = 1$. Врахуємо також, що у відповідності із загальними положеннями про поведінку напружень і переміщень біля концентраторів в кінці контактної зони мають місце сингулярності виду

$$\sigma_\theta(r, 2\pi-\alpha \cup -\alpha) \sim M_1 (s-r)^{-1-\lambda} \quad (r \to s-0),$$

$$\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle \Bigg|_{\theta=2\pi-\alpha\cup-\alpha} \sim M_2 (r-s)^{-1-\lambda} \quad (r \to s+0),$$

де M_1, M_2 – деякі сталі. Тоді за теоремою абелевого типу [7] знаходимо, що на нескінченості мають місце асимптотики

$$\Phi^-(p) \sim M_1 \Gamma(-\lambda) s^{-1-\lambda} p^\lambda \quad (p \to \infty,\ \operatorname{Re} p > 0),$$

$$\Phi^+(p) \sim M_2 \Gamma(-\lambda_0) s^{-1-\lambda} (-p)^\lambda \quad (p \to \infty,\ \operatorname{Re} p < 0). \qquad (15.16)$$

Підставляючи знайдені вище асимптотики $Q^\pm(p)$, $G_0^\pm(p)$ та $\Phi^\pm(p)$ в (15.15), виявляємо, що функції в її лівій і правій частинах на нескінченості перетворюються в нуль. Отже, за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині. В результаті, прирівнюючи обидві частини рівняння (15.15) до нуля, отримаємо його точний розв'язок:

$$\Phi^+(p) = \frac{pG_0^+(p)}{Q^+(p)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i) s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} \left[\frac{Q^+(p)}{pG_0^+(p)} + \frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{\left(1+\lambda_i'\right) G_0^+(-1-\lambda_i')} \right]$$

$$\left(\operatorname{Re} p < 0\right),$$

$$\Phi^-(p) = -\frac{\left(p-\lambda\right) G_0^-(p) Q^-(p)}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i) s^{\lambda_i'}}{p+1+\lambda_i'} \frac{Q^+(-1-\lambda_i')}{\left(1+\lambda_i'\right) G_0^+(-1-\lambda_i')}$$

$$\left(\operatorname{Re} p > 0\right). \qquad (15.17)$$

З (15.17) випливає, що при $p \to \infty$

$$\Phi^{-}(p) \sim -\frac{e^{-\lambda} p^{\lambda}}{B} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'} Q^{+}(-1-\lambda_i')}{\left(1+\lambda_i'\right) G_0^{+}(-1-\lambda_i')} \quad \left(\operatorname{Re} p > 0\right). \tag{15.18}$$

Порівнюючи (15.16) з (15.18), знаходимо:

$$M_1 = -\frac{e^{-\lambda} s^{1+\lambda}}{B\Gamma(-\lambda)} \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'} Q^{+}(-1-\lambda_i')}{\left(1+\lambda_i'\right) G_0^{+}(-1-\lambda_i')}.$$

Оскільки в кінці контактної зони нормальне напруження перетворюється в 0 (при $r > s$ тріщина розкрита), тому повинно бути $M_1 = 0$, що приводить до трансцендентного рівняння для визначення довжини контактної зони:

$$\sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i') s^{\lambda_i'} Q^{+}(-1-\lambda_i')}{\left(1+\lambda_i'\right) G_0^{+}(-1-\lambda_i')} = 0. \tag{15.19}$$

(Таке ж саме рівняння отримується при аналізі асимптотики $\Phi^{+}(p)$ для $p \to \infty$, $\operatorname{Re} p < 0$). У цьому рівнянні для підвищення точності можна взяти довільну кількість доданків з коренями характеристичного рівняння (15.10), що задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda_i' > -1$, проте для маломасштабної зони з $s \ll L$ можна обмежитись лише двома найбільшими за модулем показниками сингулярності $\lambda_1', \lambda_2' \sim -0,5$, що дозволяє отримати вираз для довжини контактної зони

$$s = \left[-\frac{(2\pi)^{\lambda_1'} K_1 F(\lambda_1') Q^{+}(-1-\lambda_1')}{(2\pi)^{\lambda_2'} K_2 F(\lambda_2') Q^{+}(-1-\lambda_2')} \frac{\left(1+\lambda_2'\right) G_0^{+}(-1-\lambda_2')}{\left(1+\lambda_1'\right) G_0^{+}(-1-\lambda_1')} \right]^{\frac{1}{\lambda_2'-\lambda_1'}}. \tag{15.20}$$

Цей вираз годиться як для дійсних λ_1', λ_2', так і для комплексно спряжених $\lambda_1' = \bar{\lambda}_2'$. В останньому випадку в (15.20) використовуються комплексно спряжені коефіцієнти інтенсивності напружень $K_1 = \bar{K}_2$.

Згідно з (15.19) і (15.20), довжина контактної зони при незмінній конфігурації зовнішнього навантаження не залежить від його модуля, який лінійно входить в коефіцієнти інтенсивності напружень. Виконаємо дослідження залежності розмірів контактної зони від конфігурації навантаження і параметрів композитного тіла у частинному випадку дії зосереджених сил з відривними нормальними компонентами *P* і дотичними *Q*, прикладених на відстані $a \ll L$ від вершини тріщини до її берегів. Конфігурацію навантаження задаємо відношенням $n=P/Q$. Коефіцієнти інтенсивності напружень K_i для цього випадку визначені в [3]. Результати числових розрахунків довжини контактної зони для окремих параметрів тіла і навантаження подані на рис. 15.5. В усіх розрахунках покладали $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

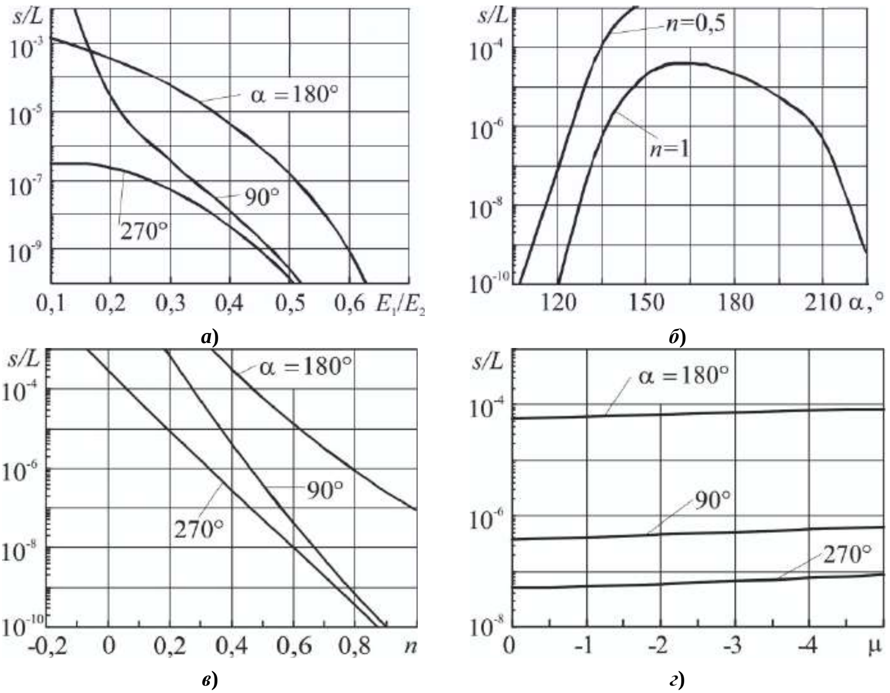


Рис. 15.5. *а*) n=0,5, μ=–0,5; *б*) E_1/E_2=0,1, μ=–0,5; *в*) E_1/E_2=0,3, μ=–0,5; *г*) E_1/E_2=0,3, n=0,5.

Довжина контактної зони стрімко зменшується при зближенні пружних характеристик з’єднаних матеріалів (рис. 15.5 *а*) та зі збільшенням відношення $n=P/Q$ розтягувальних зусиль до зсувних (рис. 15.5 *в*), набуваючи екстремально малих значень, для яких контактна модель міжфазної тріщини стає фізично некоректною. Навпаки, зусилля, що призводять до зсуву берега тріщини в менш жорсткому матеріалі відносно протилежного берега в напрямку від вершини, зумовлюють розміри зони, зрівнянні за порядком величини з довжиною тріщини, однак у цьому випадку порушується прийнята в даній роботі умова маломасштабності зони, і для великих її розмірів отриманий розв'язок стає необґрунтованим.

Залежність розміру контактної зони від тертя менш виражена: її довжина повільно зростає зі збільшенням тертя (рис. 15.5 *г*), що узгоджується з висновками праць [1, 5, 8]. Водночас, довжина області контакту берегів істотно залежить від кута зламу межі розділу з’єднаних матеріалів (рис. 15.5 *в*): в цій залежності виявили максимум при куті зламу, близькому до $\alpha \approx 170^0$.

Відповідно до визначення функції $\Phi^{-}(p)$ в (15.12), враховуючи знайдений розв'язок (15.17), знаходимо трансформанту нормального напруження на берегах тріщини. Застосувавши до даної трансформанти

зворотне перетворення Мелліна і теорему про лишки, отримаємо вираз для контактного напруження:

$$\sigma_\theta(r, 2\pi - \alpha) = \sum_k \left[\frac{(1+\kappa_1) D_0(-1-\lambda_k)}{2D'(\lambda_k)} \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda_k} \frac{(1+\lambda_k) G_0^+(-1-\lambda_k)}{Q^+(-1-\lambda_k)} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_i \frac{(2\pi)^{\lambda_i'} K_i F(\lambda_i, \alpha) s^{\lambda_i'} Q^+(-1-\lambda_i')}{(\lambda_i' - \lambda_k)(1+\lambda_i') G_0^+(-1-\lambda_i')} \right], \tag{15.21}$$

де λ_k – корені рівняння (15.3), $D'(\lambda_k) \equiv \left. \frac{dD(-1-p)}{dp} \right|_{p=-1-\lambda_k}$. Вираз (15.21) узгоджується зі зробленим у підрозділі 15.2 висновком, що біля вершини тріщини зберігається концентрація напружень з попередньо визначеними показниками сингулярності λ_1, λ_2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Антипов Ю.А.* Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, вып. 2. – С. 290-306.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. *Дудик М.В.* Дослідження напружено-деформованого стану біля кутової точки межі поділу матеріалів, з якої виходить міжфазна тріщина // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2014. – № 3. – С. 87–98.
4. *Дудик М.В., Решітник Ю.В., Феньків В.М.* Асимптотичний аналіз напружено-деформованого стану біля вершини міжфазної тріщини, що виходить із кутової точки ламаної межі розділу матеріалів // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фізико-математичні науки. – 2020. – № 1. – С. 27–37.
5. *Камінський А.О., Дудик М.В., Кіпніс Л.А.* Маломасштабна контактна зона з тертям берегів біля вершини міжфазної тріщини // Вісник Київськ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 62–67.
6. *Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7. – 2017. – 168 с.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
8. *Острик В.И., Улитко А.Ф.* Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К. : Наук. думка, 2006. – 328 с.
9. *Anderson P.* Small Scale Contact Conditions for the Linear-Elastic Interface Crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1988. – **55**. – P. 814–817.

10. *Antipov Y.A., Bardzokas D., Exadactylos G.E.* Interface edge crack in a bimaterial elastic half-plane // Int. J. Fracture. – 1997. – **88**, No. 3. – P. 281–304.
11. *Antipov Y.A., Avila-Pozos O., Kolaczkovski S.T., Movchan A.B.* Mathematical model of delamination cracks on imperfect interfaces // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**. – P. 6665–6697.
12. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone // Int. J. Fract. – 1982. – **18**. – P. 161–177.
13. *Audoly B.* Asymptotic study of the interfacial crack with friction // J. Mech. Phys. Solids. – 2000. – **48**, No. 9. – P. 1851–1864.
14. *Bercial-Velez J.P, Antipov Y.A., Movchan A.B.* High-order asymptotics and perturbation problems for 3D interfacial cracks // J. Mech. Phys. Solids. – 2005. – **53**. – P. 1128–1162.
15. *Carpinteri A., Paggi M.* Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems // Eng. Fract. Mech. – 2007. – **74**. – P. 59–74.
16. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 780–781.
17. *Comninou M.* The Interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 631–636.
18. *Comninou M., Dundurs J.* Effect of friction on the interface crack loaded in shear // Journal of Elasticity. – 1980. – **10**, No. 2. – P. 203–212.
19. *Djoković J.M., Nikolić R.R., Ulewicz R., Hadzima B.* Interface crack approaching a three-material joint // Appl. Sci. – 2020. – **10**, No. 1, 416.
20. *Dorogoy A., Banks-Sills L.* Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens – A finite difference solution // Eng. Fract. Mech. – 2005. – **72**. – P. 2758–2773.
21. *Dudyk M.V., Dikhtyarenko Yu.V.* Development of a prefracture zone from an interfacial crack at a corner point of an interface of two elastic media // J. Math. Sci. – 2012. – **184**, No. 2. – P. 121–135.
22. *Dudyk M.V., Kipnis L.A.* Model of the structure of the near tip area of interface crack in a piece-homogeneous elastic-plastic body // Strength, Fracture and Complexity. – 2018. – **11**, No. 1. – P. 31–50.
23. *Dundurs J., Gautesen A.K.* An opportunistic analysis of the interface crack // Int. J. Fract. – 1988. – **36**. – P. 151–159.
24. *England A.H.* A crack between dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 400–402.
25. *Erdogan F.* Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 403–410.
26. *Govorukha V.B., Loboda V.V.* Contact zone models for an interface crack in a piezoelectric material // Acta Mech. – 2000. – **140**. – P. 233–246.

27. *Govorukha V., Kamlah M., Loboda V., Lapusta Y.* Fracture Mechanics of Piezoelectric Solids with Interface Cracks. Series: Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. – Luxembourg : Springer, 2017. – 236 p.
28. *Guz A.N.* On physically incorrect results in fracture mechanics // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 10. – P. 1041–1051.
29. *Herrmann K. P., Loboda V. V.* Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric biomaterials by consideration of various contact zone model // Arch. App. Mech. – 2000. – **70**. – P. 127–143.
30. *Herrmann K.P., Loboda V.V.* On interface crack models with contact zone situated in an anisotropic biomaterials // Arch. App. Mech. – 1999. – **69**. – P. 317–335.
31. *Kamins'kyi A.O., Dudyk M.V., Kipnis L.A.* Investigation of the process zone near the tip of an interface crack in the elastic body in shear within the framework of the complex model // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 2. – P. 117–132.
32. *Kuo A.-Y.* Interface crack between two dissimilar half-spaces subjected to a uniform heat flow at infinity – open crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – **57**, No. 2. – P. 359–364.
33. *Leguillon D.* Interface crack tip singularity with contact and friction // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIb. – 1999. – **327**, No. 5. – P. 437–442.
34. *Linkov A.M., Koshelev V.F.* Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**. – P. 5909–5930.
35. *Luo Y., Subbarayan G.* A study of multiple singularities in multi-material wedges and their use in analysis microelectronic interconnect structures // Eng. Fract. Mech. – 2007. – **74**. – P. 416–430.
36. *Pageau S.S., Gadi K.S., Biggers S.B., Joseph P.F.* Standardized complex and logarithmic eigensolutions for *n*-material wedges and junctions // Int. J. Eng. Fract. – 1996. – **77**. – P. 51–76.
37. *Qu J., Bassani J.L.* Cracks on Bimaterial and Bicrystal Interfaces // J. Mech. Phys. Solids. – 1989. – **37**. – P. 417–434.
38. *Rice J.R., Sih G.C.* Plane problems of cracks in dissimilar media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**, No. 2. – P. 418–423.
39. *Theocaris P.S., Gdoutos E.E.* Stress singularities in cracked composite full-planes // Int. J. Fract. – 1977. – **13**, No. 6. – P. 763–773.
40. *Wang S.S., Choi I.* The interface crack between dissimilar anisotropic composite materials // J. Appl. Mech. – 1983. – **50**. – P. 169–178.
41. *Wieghardt K.* Über das spalten und zerreißen elastischer Körper // Z. Math. Phys. – 1907. – **55**. – S. 60–103.
42. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – **19**, No. 4. – P. 526–535.

43. *Williams M.L.* The stresses around a fault or crack in dissimilar media // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1959. – **49**. – P. 199–204.
44. *Willis J.R*. The penny-shaped crack on an interface // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1972. – **25**. – P. 367–385.

ДОДАТОК. Власні функції в розвиненнях компонент напружень і похідних від переміщень біля вершини міжфазної тріщини з контактуючими берегами

$$\tilde{a}_1^2(\lambda) = \Delta_{12}(\lambda)B_1(\lambda) - \Delta_{22}(\lambda)B_2(\lambda) + \Delta_{32}(\lambda)B_3(\lambda),$$

$$\tilde{a}_2^2(\lambda) = -\Delta_{11}(\lambda)B_1(\lambda) + \Delta_{21}(\lambda)B_2(\lambda) - \Delta_{31}(\lambda)B_3(\lambda),$$

$$\tilde{a}_3^2(\lambda) = \Delta_{14}(\lambda)B_4(\lambda) + \Delta_{24}(\lambda)B_5(\lambda) + \Delta_{34}(\lambda)B_6(\lambda),$$

$$\tilde{a}_4^2(\lambda) = -\left(\Delta_{13}(\lambda)B_4(\lambda) + \Delta_{23}(\lambda)B_5(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda)B_6(\lambda)\right);$$

$$\tilde{a}_1^1(\lambda) = \frac{1}{(1+\kappa_1)}\left[\tilde{a}_1^2(\lambda)\left((1+\kappa_1) + \lambda(1-e)\right) + \right.$$
$$\left. + \tilde{a}_2^2(\lambda)\frac{\lambda}{\lambda+2}\left((1+\kappa_1) + \lambda(1-e) - e(1+\kappa_2)\right)\right],$$

$$\tilde{a}_2^1(\lambda) = \frac{1}{(1+\kappa_1)}\left[-\tilde{a}_1^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e) - \tilde{a}_2^2(\lambda)\left(\lambda(1-e) - e(1+\kappa_2)\right)\right],$$

$$\tilde{a}_3^1(\lambda) = \frac{1}{(1+\kappa_1)}\left[\tilde{a}_3^2(\lambda)\left((1+\kappa_1) - (\lambda+2)(1-e)\right) + \right.$$
$$\left. + \tilde{a}_4^2(\lambda)\left((1+\kappa_1) - (\lambda+2)(1-e) - e(1+\kappa_2)\right)\right],$$

$$\tilde{a}_4^1(\lambda) = \frac{1}{(1+\kappa_1)}\left[\tilde{a}_3^2(\lambda)(\lambda+2)(1-e) + \tilde{a}_4^2(\lambda)\left((\lambda+2)(1-e) + e(1+\kappa_2)\right)\right];$$

$$\Delta_{11}(\lambda) = (\lambda+2)\left[\cos(\lambda+2)\alpha + \mu\sin(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{12}(\lambda) = \lambda\cos\lambda\alpha + \mu(\lambda+2)\sin\lambda\alpha,$$

$$\Delta_{13}(\lambda) = (\lambda+2)\left[\sin(\lambda+2)\alpha - \mu\cos(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{14}(\lambda) = \lambda\sin\lambda\alpha - \mu(\lambda+2)\cos\lambda\alpha;$$

$$\Delta_{21}(\lambda) = (1-e)(\lambda+2)\left[\cos\lambda\beta - \cos(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{22}(\lambda) = \left[\lambda(1-e) - e(1+\kappa_2)\right](\cos\lambda\beta - \cos\lambda\alpha),$$

$$\Delta_{23}(\lambda) = (1-e)(\lambda+2)\left[\sin\lambda\beta - \sin(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{24}(\lambda) = (1-e)\left[(\lambda+2)\sin\lambda\beta - \lambda\sin\lambda\alpha\right] + e(1+\kappa_2)(\sin\lambda\alpha + \sin\lambda\beta);$$

$$\Delta_{31}(\lambda) = (1-e)\delta_{11}(\lambda) + (1+\kappa_1)\left[\sin(\lambda+2)\beta + \sin(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{32}(\lambda) = \frac{(1-e)-e(1+\kappa_2)}{\lambda+2}\delta_{11}(\lambda) + \frac{1+\kappa_1}{\lambda+2}\left[\lambda\sin(\lambda+2)\beta + (\lambda+2)\sin\lambda\alpha\right],$$

$$\Delta_{33}(\lambda) = (1-e)(\lambda+2)\delta_{12}(\lambda) + (1+\kappa_1)\left[\cos(\lambda+2)\beta - \cos(\lambda+2)\alpha\right],$$

$$\Delta_{34}(\lambda) = \left[(\lambda+2)(1-e) + e(1+\kappa_2)\right]\delta_{12}(\lambda) + (1+\kappa_1)\left[\cos(\lambda+2)\beta - \cos\lambda\alpha\right];$$

$$B_1(\lambda) = (1-e)^2 B_{11}(\lambda) - e(1+\kappa_2)(1-e)B_{12}(\lambda) + (1+\kappa_1)(1-e)B_{13}(\lambda) -$$
$$-e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)B_{14}(\lambda),$$

$$B_{11}(\lambda) = -(\lambda+2)\delta_{12}(\lambda)\delta_{13}(\lambda), \quad B_{12}(\lambda) = (\lambda+2)\left[\sin\lambda\alpha + \sin(\lambda+2)\alpha\right]\delta_{12}(\lambda),$$

$$B_{13}(\lambda) = -\left[(\lambda+2)\sin\lambda\beta\delta_{22}(\lambda) + \cos(\lambda+2)\beta\delta_{23}(\lambda)\right] + \delta_{32}(\lambda),$$

$$B_{14}(\lambda) = (\sin\lambda\alpha + \sin\lambda\beta)\left[\cos(\lambda+2)\beta - \cos(\lambda+2)\alpha\right];$$

$$B_2(\lambda) = (1-e)B_{21}(\lambda) + e(1+\kappa_2)B_{22}(\lambda) + (1+\kappa_1)B_{23}(\lambda),$$

$$B_{21}(\lambda) = (\lambda+2)\left[\delta_{23}(\lambda) + \mu(\lambda+2)\delta_{22}(\lambda)\right]\delta_{12}(\lambda),$$

$$B_{22}(\lambda) = (\lambda+2)\left[\sin(\lambda+2)\alpha - \mu\cos(\lambda+2)\alpha\right]\delta_{12}(\lambda),$$

$$B_{23}(\lambda) = \left[\delta_{23}(\lambda) + \mu(\lambda+2)\delta_{22}(\lambda)\right]\cos(\lambda+2)\beta - \delta_{32}(\lambda);$$

$$B_3(\lambda) = (1-e)B_{31}(\lambda) + e(1+\kappa_2)B_{32}(\lambda),$$

$$B_{31}(\lambda) = (\lambda+2)\left[\left[\delta_{32}(\lambda) + \mu(\lambda+2)\delta_{22}(\lambda)\right]\sin\lambda\beta - \mu\delta_{32}(\lambda)\right],$$

$$B_{32}(\lambda) = (\lambda+2)(\sin\lambda\beta + \sin\lambda\alpha)\left[\sin(\lambda+2)\alpha - \mu\cos(\lambda+2)\alpha\right];$$

$$B_4(\lambda) = (1-e)\left[[(1-e)\lambda - e(1+\kappa_2)]B_{41}(\lambda) + (1+\kappa_1)B_{42}(\lambda)\right] +$$
$$+e(1+\kappa_2)(1+\kappa_1)B_{43}(\lambda),$$

$$B_{41}(\lambda) = \delta_{11}(\lambda)\delta_{22}(\lambda), \; B_{42}(\lambda) = \lambda\sin(\lambda+2)\beta\delta_{22}(\lambda) - \cos\lambda\beta\delta_{21}(\lambda) - \delta_{31}(\lambda),$$

$$B_{43}(\lambda) = \left[\sin(\lambda+2)\alpha + \sin(\lambda+2)\beta\right](\cos\lambda\beta - \cos\lambda\alpha);$$

$$B_5(\lambda) = (1-e)B_{51}(\lambda) + e(1+\kappa_2)B_{52}(\lambda) + (1+\kappa_1)B_{53}(\lambda),$$

$$B_{51}(\lambda) = \left[\lambda\delta_{22}(\lambda) - \mu\delta_{21}(\lambda)\right]\delta_{11}(\lambda),$$

$$B_{52}(\lambda) = \left[\cos(\lambda+2)\alpha + \mu\sin(\lambda+2)\alpha\right]\delta_{11}(\lambda),$$

$$B_{53}(\lambda) = \left[\lambda\delta_{22}(\lambda) - \mu\delta_{21}(\lambda)\right]\sin(\lambda+2)\beta - \delta_{31}(\lambda);$$

$$B_6(\lambda) = (1-e)B_{61}(\lambda) - e(1+\kappa_2)B_{62}(\lambda),$$

$$B_{61}(\lambda) = (\lambda+2)\left[-\left[\lambda\delta_{22}(\lambda) - \mu\delta_{21}(\lambda)\right]\cos\lambda\beta + \mu\delta_{31}(\lambda)\right],$$

$$B_{62}(\lambda) = (\lambda+2)(\cos\lambda\beta - \cos\lambda\alpha)\left[\cos(\lambda+2)\alpha + \mu\sin(\lambda+2)\alpha\right];$$

$$\delta_{11}(\lambda) = \lambda\sin(\lambda+2)\beta - (\lambda+2)\sin\lambda\beta, \quad \delta_{12}(\lambda) = \cos\lambda\beta - \cos(\lambda+2)\beta,$$

$$\delta_{13}(\lambda) = (\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\beta - \lambda \sin \lambda\beta;$$

$$\delta_{21}(\lambda) = \lambda \sin(\lambda + 2)\alpha - (\lambda + 2)\sin \lambda\alpha, \quad \delta_{22}(\lambda) = \cos \lambda\alpha - \cos(\lambda + 2)\alpha,$$

$$\delta_{23}(\lambda) = (\lambda + 2)\sin(\lambda + 2)\alpha - \lambda \sin \lambda\alpha;$$

$$\delta_{31}(\lambda) = -(\lambda + 1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$\delta_{32}(\lambda) = (\lambda + 1)\sin 2\alpha + \sin 2(\lambda + 1)\alpha.$$

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**Кундрат Микола Михайлович, Гук Наталія Анатоліївна,
Козакова Наталія Леонідівна, Острик Володимир Іванович,
Слободян Микола Степанович, Кузьменко Василь Іванович,
Приходько Олена Валеріївна, Д'яченко Наталія Миколаївна,
Шашкова Євгенія Віталіївна, Силованюк Віктор Петрович,
Вайсфельд Наталія Данилівна, Фесенко Ганна Олександрівна,
Козачок Олег Петрович, Мартиняк Ростислав Михайлович,
Максимук Олександр Васильович, Сачук Юрій Володимирович,
Сяський Андрій Олексійович, Шевцова Наталія Вікторівна,
Сяський Володимир Андрійович, Дейнека Олег Юрійович,
Нагірний Тарас Семенович, Червінка Костянин Андрійович,
Камінський Анатолій Олексійович, Дудик Михайло Володимирович,
Феньків Володимир Михайлович**

КОНТАКТНА МЕХАНІКА
ШОРСТКІСТЬ, РОЗШАРУВАННЯ І ЗНОШУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ

Колективна монографія

За загальною редакцією Р. М. Мартиняка

Літературне редагування *Д. С. Бриняк*
Комп'ютерне макетування *О. П. Козачок*

Підписано до друку 12.12.2022
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 22,79

Видавець Вікторія Кундельська
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців ДК № 7454 від 21.09.2021 р.

79037, Львів, вул. Студинського, 4
тел. +380 98 44 92 543, +380 50 73 42 330
e-mail: kundelskaviktoria6859@gmail.com